Jméno: ______________________

Příklad	1	2	3	**Celkem bodů**
Bodů	10	10	10	30
Získáno				

[10] 1. Zkoumejte posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ definovanou jako

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & x < -\frac{1}{n}, \\ cn^\alpha & -\frac{1}{n} \leq x < 0, \\ -cn^\alpha & 0 \leq x < \frac{1}{n}, \\ 0 & \frac{1}{n} \leq x. \end{cases}$$

Určete hodnotu parametrů $\alpha \in \mathbb{R}^+$ a $c \in \mathbb{R}$ tak, aby platilo

$$f_n \to \delta',$$

kde δ' je derivace Dirac distribuce. Přesně specifikujte v jaké smyslu je konvergence definována.

Řešení:

Chceme ukázat, že pro každou testovací funkci φ platí

$$\langle T_{f_n}, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})} \to \langle T_{\delta'}, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})},$$

kde konvergence je nyní standardní kovergence posloupnosti reálných čísel $\langle T_{f_n}, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})}$, a kde distribuce $T_{\delta'}$ je definována jako

$$\langle T_{\delta'}, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})} =_{\mathrm{def}} - \langle T_\delta, \varphi' \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})}.$$

Diracova distribuce T_δ je zavedena standardním způsobem jako $\langle T_\delta, \varphi' \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})} =_{\mathrm{def}} \varphi'(0)$, kde φ' značí klasickou derivaci testovací funkce φ. Musíme proto ukázat, že pro každou testovací funkci φ dostaneme

$$\langle T_{f_n}, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})} \to -\varphi'(0).$$

(Ve smyslu posloupnosti čísel.) Dualita $\langle T_{f_n}, \varphi' \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})}$ je reprezentována integrálem, neboť f_n jsou lokálně integrovatelné funkce

$$\langle T_\delta, \varphi' \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})} = \int_{x=-\infty}^{+\infty} f_n(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

(Využíváme standardního ztotožnění lokálně integrovatelných funkcí s příslušnými distribucemi.) Po překladu definic do primitivních pojmů tedy chceme ukázat, že pro každou testovací funkci φ dostaneme

$$\int_{x=-\infty}^{+\infty} f_n(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\varphi'(0)$$

Nyní již musíme pracně počítat. Označme si F_n primitivní funkci k funkci f_n aneb

$$F_n(x) =_{\mathrm{def}} \int_{\xi=-\infty}^{x} f_n(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

Podle věty o integraci per partes platí

$$\int_{x=-\infty}^{+\infty} f_n(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u' = f_n & u = F_n \\ v = \varphi & v' = \varphi' \end{vmatrix} = \left[F_n(x)\varphi(x)\right]_{x=-\infty}^{+\infty} - \int_{x=-\infty}^{+\infty} F_n(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{x=-\infty}^{\infty} F_n(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x,$$

kde jsme využili toho, že testovací funkce φ má kompaktní nosič, aneb je nenulová pouze uvnitř nějakého intervalu $[A, B]$. Nyní explicitně spočteme primitivní funkci F_n, jest

$$F_n = \begin{cases} 0 & x \in \left(-\infty, -\frac{1}{n}\right), \\ \left(x + \frac{1}{n}\right) cn^\alpha, & x \in \left[-\frac{1}{n}, 0\right], \\ \left(-x + \frac{1}{n}\right) cn^\alpha & x \in \left[0, \frac{1}{n}\right], \\ 0, & x \in \left(\frac{1}{n}, +\infty\right). \end{cases}$$

Jest

$$-\int_{x=-\infty}^{+\infty} F_n(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{x=-\infty}^{+\infty} cn^\alpha \left\{ \left(x + \frac{1}{n}\right) \chi_{\left(-\frac{1}{n},0\right)} + \left(-x + \frac{1}{n}\right) \chi_{\left(0,\frac{1}{n}\right)} \right\} \varphi'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Nyní provedeme substituci a ze zjevných důvodů zafixujeme $\alpha = 2$,

$$
\begin{aligned}
&-\int_{x=-\infty}^{+\infty} cn^{\alpha} \left\{ \left(x + \frac{1}{n} \right) \chi_{\left(-\frac{1}{n},0\right)} + \left(-x + \frac{1}{n} \right) \chi_{\left(0,\frac{1}{n}\right)} \right\} \varphi'(x) \,\mathrm{d}x \\
&\qquad = \left| \begin{array}{c} x = \frac{y}{n} \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{n}\mathrm{d}y \end{array} \right| = -\int_{y=-\infty}^{+\infty} \frac{cn^{\alpha}}{n^2} \left\{ (y+1)\,\chi_{(-1,0)} + (-y+1)\,\chi_{(0,1)} \right\} \varphi'\left(\frac{y}{n}\right) \mathrm{d}y \\
&\qquad \stackrel{\alpha=2}{=} -c \int_{y=-\infty}^{+\infty} \left\{ (y+1)\,\chi_{(-1,0)} + (-y+1)\,\chi_{(0,1)} \right\} \varphi'\left(\frac{y}{n}\right) \mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

Poslední integrál je ve vhodném tvaru pro limitní přechod $n \to +\infty$,

$$
\begin{aligned}
\int_{x=-\infty}^{+\infty} f_n(x)\varphi(x) \,\mathrm{d}x &= -c \int_{y=-\infty}^{+\infty} \left\{ (y+1)\,\chi_{(-1,0)} + (-y+1)\,\chi_{(0,1)} \right\} \varphi'\left(\frac{y}{n}\right) \mathrm{d}y \\
&\stackrel{n\to+\infty}{=} -c \int_{y=-\infty}^{+\infty} \left\{ (y+1)\,\chi_{(-1,0)} + (-y+1)\,\chi_{(0,1)} \right\} \varphi'(0) \,\mathrm{d}y = -c\varphi'(0) \stackrel{c=1}{=} -\varphi'(0).
\end{aligned}
$$

(Opět využíváme skutečnost, že testovací funkce je hladká funkce s kompaktním nosičem.) Volbou $\alpha = 2$ a $c = 1$ tedy dostaneme požadovanou rovnost

$$
\int_{x=-\infty}^{+\infty} f_n(x)\varphi(x) \,\mathrm{d}x \xrightarrow{n\to+\infty} -\varphi'(0).
$$

[10] 2. S použitím Laplaceovy transformace najděte řešení obyčejné diferenciální rovnice

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} + x\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} - 2f = 2$$

na intervalu $(0, +\infty)$ s počátečními podmínkami

$$f|_{x=0} = 0,$$
$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = 0.$$

Řešení:

S použitím známých vztahů pro Laplaceovu transformaci $\mathcal{L}[f] =_{\mathrm{def}} \int_{x=0}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-px}\,\mathrm{d}x$ derivace funkce

$$\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right] = p\mathcal{L}[f] - f(0),$$
$$\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}\right] = p^2\mathcal{L}[f] - pf(0) - \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(0),$$

a s pomocí tabulky pro Laplaceovu transformaci, která říká, že

$$\mathcal{L}[2](p) = \frac{2}{p},$$

převedeme rovnici do tvaru

$$p^2\mathcal{L}[f] + \mathcal{L}\left[x\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right] - 2\mathcal{L}[f] = \frac{2}{p}.$$

Dále využijeme derivaci integrálu podle parametru, a spočteme si Laplaceovu transformaci druhého členu na levé straně,

$$\mathcal{L}\left[x\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right] = \int_{x=0}^{+\infty} x\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{-px}\,\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\int_{x=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{-px}\,\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right] = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(p\mathcal{L}\left[f\right]\right),$$

kde jsme využili počáteční podmínky pro hledanou funkci f a vztah pro Laplaceovu transformaci derivace. Původní diferenciální rovnice se tudíž po Laplaceově transformaci změní na

$$p^2\mathcal{L}[f] - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(p\mathcal{L}\left[f\right]\right) - 2\mathcal{L}[f] = \frac{2}{p},$$

což lze přepsat jako

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\mathcal{L}\left[f\right] - \left(p - \frac{3}{p}\right)\mathcal{L}\left[f\right] = -\frac{2}{p^2}.$$

Tuto diferenciální rovnici snadno vyřešíme standardními technikami, například metodou integračního faktoru. Jest

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\mathcal{L}\left[f\right]\mathrm{e}^{-\int_{s=a}^{p}\left(s-\frac{3}{s}\right)\mathrm{d}s} - \left(p - \frac{3}{p}\right)\mathcal{L}\left[f\right]\mathrm{e}^{-\int_{s=a}^{p}\left(s-\frac{3}{s}\right)\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(\mathcal{L}\left[f\right]\mathrm{e}^{-\int_{s=a}^{p}\left(s-\frac{3}{s}\right)\mathrm{d}s}\right).$$

Původní rovnici pro Laplace obraz $\mathcal{L}\left[f\right]$ proto můžeme zapsat jako

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(\mathcal{L}\left[f\right]\mathrm{e}^{-\int_{s=a}^{p}\left(s-\frac{3}{s}\right)\mathrm{d}s}\right) = -\frac{2}{p^2}\mathrm{e}^{-\int_{s=a}^{p}\left(s-\frac{3}{s}\right)\mathrm{d}s}.$$

Spočteme si primitivní funkci v integračním faktoru

$$\mathrm{e}^{-\int_{s=a}^{p}\left(s-\frac{3}{s}\right)\mathrm{d}s} = \mathrm{e}^{-\frac{p^2}{2}+3\ln p} = p^3\mathrm{e}^{-\frac{p^2}{2}}.$$

(Využíváme toho, že potřebujeme skutečně jenom primitivní funkci, což nám umožní položit integrační konstantu rovnou nule.) Celkem proto

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(\mathcal{L}\left[f\right]p^3\mathrm{e}^{-\frac{p^2}{2}}\right) = -2p\mathrm{e}^{-\frac{p^2}{2}}.$$

Řešením této rovnice je

$$\mathcal{L}\left[f\right]p^3\mathrm{e}^{-\frac{p^2}{2}} = 2\mathrm{e}^{-\frac{p^2}{2}} + C,$$

kde C je integrační konstanta. Je tedy

$$\mathcal{L}\left[f\right] = \frac{2}{p^3} + C\mathrm{e}^{\frac{p^2}{2}},$$

z čehož je vidět, že integrační konstantu musím volit rovnou nule jinak bychom na pravé straně nedostali obraz při Laplaceově transformaci. V tabulce Laplaceovy transformace dohledáme, že vzorem funkce $\frac{1}{p^3}$ je funkce $\frac{x^2}{2!}$ a výsledkem výpočtu je

$$f = x^2,$$

což je skutečně řešení původní diferenciální rovnice s příslušnými počátečními podmínkami.

[10] 3. S pomocí Fourierovy transformace vyřešte pro $x \in \mathbb{R}$ parciální diferenciální rovnici

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \gamma u,$$

kde k a γ jsou kladné konstanty, a počáteční podmínka je

$$u(x,t)|_{t=0} = f(x).$$

Nejprve odvoďte obecný vzorec pro řešení úlohy. (Obecné řešení je dáno prostřednictvím konvolučního integrálu.) Pro speciální počáteční podmínku

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$$

pak najděte explicitní předpis pro funkci $u(x,t)$.

Řešení:

Provedeme Fourierovu transformaci vůči proměnné x. Z tabulky pro Fourierovu transformaci víme, že

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right](\xi) = -\xi^2 \mathcal{F}[u](\xi),$$

což můžeme úsporně zapsat jako

$$\widehat{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} = -\xi^2 \widehat{u}.$$

Toto značení použijeme při výpočtu. Fourierova transformace dané rovnice je tedy

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t} = -k\;\xi^2\widehat{u} - \gamma\widehat{u}.$$

Tuto diferenciální rovnici v proměnné t řešíme s počáteční podmínkou

$$\widehat{u}|_{t=0} = \widehat{f}.$$

Řešením diferenciální rovnice s příslušnou počáteční podmínkou je funkce

$$\widehat{u} = \widehat{f}\mathrm{e}^{\left(-k\xi^2-\gamma\right)t}.$$

Pokud dokážeme spočíst zpětnou Fourierovy transformaci $\widehat{u}$, získáme řešení původní parciální díferenciální rovnice. Potřebujeme spočíst

$$\mathcal{F}^{-1}[\widehat{u}](x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\int_{\xi\in\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)\mathrm{e}^{\left(-k\xi^2-\gamma\right)t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}\xi.$$

V ideálním případě se nám podaří zpětnou Fourierovu transformaci vyjádřit jako konvoluční integrál zahrnující počáteční podmínku f. V tabulce Fourierových transformací dohledáme, že platí

$$\mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{-ax^2}\right](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2a}}\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{4a}},$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}[g]\,\mathcal{F}[h]\right](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}[g \star h](x),$$

kde hvězdička značí operátor konvoluce, který je definován jako

$$[g\star h](x) =_{\mathrm{def}} \int_{y\in\mathbb{R}} g(x-y)h(y)\,\mathrm{d}y.$$

Vrátíme se zpět ke vztahu pro inverzní Fourierovu trasformaci, a vidíme, že

$$\mathcal{F}^{-1}[\widehat{u}](x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\int_{\xi\in\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)\mathrm{e}^{\left(-k\xi^2-\gamma\right)t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}\xi = \mathrm{e}^{-\gamma t}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\int_{\xi\in\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)\mathrm{e}^{-k\xi^2 t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}\xi$$
$$= \mathrm{e}^{-\gamma t}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\int_{\xi\in\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)\widehat{\left(\frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4kt}}}{\sqrt{2kt}}\right)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}\xi = \mathrm{e}^{-\gamma t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[f\star\frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4kt}}}{\sqrt{2kt}}\right](x) = \mathrm{e}^{-\gamma t}\int_{y\in\mathbb{R}} f(x-y)\frac{\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{4kt}}}{\sqrt{4\pi kt}}\,\mathrm{d}x,$$

přičemž v druhém členu v integrálu rozeznáváme fundamentální řešení pro rovnici vedení tepla. (To není náhoda, původní rovnice přejde po přechodu k nové neznámé $\widetilde{u} =_{\mathrm{def}} u\mathrm{e}^{\gamma t}$ na standardní rovnici vedení tepla pro funkci $\widetilde{u}$.) Můžeme tedy prohlásit, že obecné řešení zadané diferenciální rovnice s příslušnou počáteční podmínkou je dáno vzorcem

$$u(x,t) = \mathrm{e}^{-\gamma t}\int_{y\in\mathbb{R}} f(x-y)\frac{\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{4kt}}}{\sqrt{4\pi kt}}\,\mathrm{d}x.$$

Pokud je počáteční podmínka daná vztahem

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x^2},$$

pak řešení spočteme dosazením do právě odvozeného vzorce. Jest

$$u(x,t) = \mathrm{e}^{-\gamma t} \int_{y \in \mathbb{R}} \mathrm{e}^{-(x-y)^2} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{4kt}}}{\sqrt{4\pi k t}} \, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-\gamma t} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{1+4kt}}}{\sqrt{1+4kt}},$$

kde jsme použili standardní úpravu s doplněním na čtverec.