Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale co nejpřesněji odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte ověřit splnění předpokladů.

Jméno a příjmení: ____________________

Příklad	1	2	3	4	5	**Celkem bodů**
Bodů	8	7	7	6	7	35
Získáno						

[8] 1. Buď dán funkcionál Φ na množině $M = \left\{ y \in \mathcal{C}^1\left([0,1]\right) \,|\, y(0) = 0, y(1) = 1 - \frac{1}{e} \right\}$ předpisem

$$\Phi(y) = \int_0^1 \left(2yy' - e^x \left(y'\right)^2 \right) \mathrm{d}x.$$

a) Spočtěte první Gâteaux derivaci funkcionálu Φ v bodě y ve směru h. (Tedy $\delta\Phi[y](h)$ neboli $D\Phi(y)[h]$, záleží na značení, kterému dáváte přednost.) Popište přesně v jakém prostoru funkcí leží h.

b) Napište Euler–Lagrange rovnici pro funkcionál Φ.

c) Najděte extremálu funkcionálu Φ na množině M, extremálu označte y_{ext}.

d) Spočtěte druhou Gâteaux derivaci funkcionálu Φ v bodě y ve směru h. (Tedy $\delta^2\Phi[y](h,h)$ neboli $D^2\Phi(y)[h,h]$, záleží na značení, kterému dáváte přednost.)

e) Vyčíslete druhou Gâteaux derivaci funkcionálu Φ v bodě y_{ext} ve směru h pro y_{ext}, které je řešením Euler–Lagrange rovnice pro funkcionál Φ. Ukažte, že Gâteaux derivace je v tomto bodě v libovolném směru h nekladná.

[7] 2. Buď dána posloupnost funkcí

$$f_n(x) = n\left[\sin\left(x + \frac{1}{n}\right) - \sin x\right]$$

Najděte bodovou limitu f této posloupnosti v intervalu $I = [0, +\infty)$. Rozhodněte, zda posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ konverguje stejnoměrně k f na intervalu J a K, kde

1. $J = (0, +\infty)$,
2. $K = (\varepsilon, +\infty)$, kde $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ je dané kladné reálné číslo.

[7] 3. Spočtěte

$$I(a) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax} \frac{1 - \cos x}{x} \, \mathrm{d}x,$$

kde $a \in \mathbb{R}^+$ je libovolné ale pevné kladné reálné číslo. *Postupy použité při řešení je nutné pečlivě zdůvodnit!*

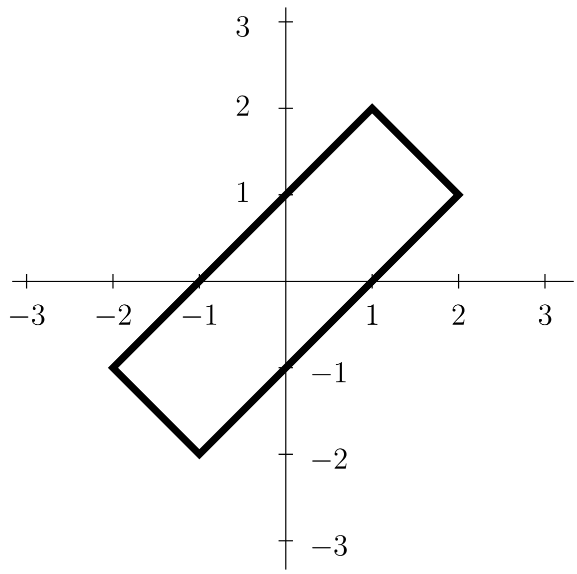
[6] 4. Buď f spojitá funkce *jedné* reálné proměnné $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, a buď Ω množina v $\mathbb{R}^2$ načrtnutá na Obrázku 1. (Množina Ω je obdélník s vrcholy v bodech $[1, 2]$, $[2, 1]$, $[-1, -2]$ a $[-2, -1]$.)

a) Spočtěte plošný obsah množiny Ω.

b) Ukažte, že platí

$$\int_\Omega f\,(x + y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{w=-3}^{3} f\,(w)\,\mathrm{d}w,$$

kde dvojice x a y značí standardní souřadnice v $\mathbb{R}^2$.



Obrázek 1: Množina Ω.

[7] 5. Uvažujte funkci $f(x) = |\sin x|$ na $\mathbb{R}$.

a) Načrtněte graf funkce f.

b) Najděte Fourierovu řadu funkce f. (Funkci uvažujte s periodou 2π.)

c) Diskutujte konvergenci nalezené Fourierovy řady. Určete zda Fourierova řada konverguje k funkci f ve smyslu konvergence v L^2, ve smyslu bodové konvergence a ve smyslu stejnoměrné konvergence.

d) Ukažte, že pro $x \in [0, \pi]$ platí

$$\frac{\pi}{4}(\cos x - 1) + \frac{x}{2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(2kx)}{(2k-1)(2k)(2k+1)}$$

a najděte součet číselné řady

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(4k-3)(4k-2)(4k-1)}.$$