Jan Šabata

1)

Pro reálné konstanty $a, \mathcal{R}$ splňující $a \geq \mathcal{R}\sqrt{2} > 0$ spočtěte objem tělesa ohraničeného plochami

$$x + y + z = a, x^2 + y^2 = \mathcal{R}^2, x = 0, y = 0, z = 0$$

Předpokládejte, že počátek souřadnic $[x, y, z] = [0,0,0]$ je součástí hranice tělesa.

Objem tělesa je ohraničen, dle druhé podmínky válcem, to doslova volá po zavedení substituce Φ:

$$x = r\cos\varphi$$

$$y = r\sin\varphi$$

$$z = z$$

Řešení:

Protože se jedná o válec, tak $r \in [0, \mathcal{R}]$.

První a třetí podmínka dají dohromady čtyřstěn, jenž je omezen osami a rovinou

$$x + y + z = a$$

$$x = 0, y = 0, z = 0$$

Která po převedení na válcové souřadnice vypadá

$$r\cos\varphi + r\sin\varphi + z = a \to z = a - r(\cos\varphi + \sin\varphi) \to z \in [0, a - r(\cos\varphi + \sin\varphi)]$$

Vzhledem k tomu, že $a \geq \mathcal{R}\sqrt{2} > 0$ a zároveň je těleso ohraničeno osami, tak se výsledný útvar bude nacházet právě v oktantu, kde jsou všechny souřadnice kladné. Z toho vyplývá, že úhel $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Nyní vypočítám $|\det \nabla\Phi| = \left|\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = r$

Nyní už mám vše, co potřebuji k výpočtu objemu tělesa. Musíme mít na paměti, že z závisí na r, φ. Proto musíme integrovat nejdříve podle z.

$$V = \int_0^{\mathcal{R}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{a - r(\cos\varphi + \sin\varphi)} r\, dz \right) d\varphi \right) dr =$$

$$\int_0^{\mathcal{R}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} [rz]_0^{a - r(\cos\varphi + \sin\varphi)}\, d\varphi \right) dr = \int_0^{\mathcal{R}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} ra - r^2\cos\varphi - r^2\sin\varphi\, d\varphi \right) dr =$$

$$\int_0^{\mathcal{R}} [ra\varphi + r^2\cos\varphi - r^2\sin\varphi]_0^{\frac{\pi}{2}}\, dr = \int_0^{\mathcal{R}} \frac{ra\pi}{2} + r^2(0-1) - r^2(1-0)\, dr =$$

$$\int_0^{\mathcal{R}} \frac{ra\pi}{2} - 2r^2\, dr = \left[\frac{\pi a r^2}{4} - \frac{2r^3}{3}\right]_0^{\mathcal{R}} = \frac{\pi a \mathcal{R}^2}{4} - \frac{2\mathcal{R}^3}{3}$$

$$V = \frac{\pi a \mathcal{R}^2}{4} - \frac{2\mathcal{R}^3}{3}$$

2)

Spočtěte objem tělesa ohraničeného plochami

$$2x^2 + \frac{y^2}{2} = \frac{z^2}{9}, 2x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{9} = 1$$

Předpokládejte, že těleso je konvexní a pro všechny body $[x, y, z]$, které do tělesa patří, platí $z \geq 0$

Řešení:

V tomto příkladu budeme jistě používat sférickou transformaci souřadnic. A máme několik cest, kterými se můžeme vydat. Buď nebudeme přemýšlet a zavedeme hned substituci β(β jako $\beta\lambda\beta\alpha$)

$$\beta: x = r \sin\varphi \cos\psi$$

$$y = r \sin\varphi \sin\psi$$

$$z = r \cos\varphi$$

Tato substituce však není výhodná, protože se nám s nepodaří využít goniometrickou jedničku. Zkusme tedy zavést jinou substituci třeba ϕ ($\varphi\iota\kappa\alpha\nu\alpha$)

$$\Phi: x = \frac{1}{\sqrt{2}} r \sin\varphi \cos\psi$$

$$y = \sqrt{2} r \sin\varphi \sin\psi$$

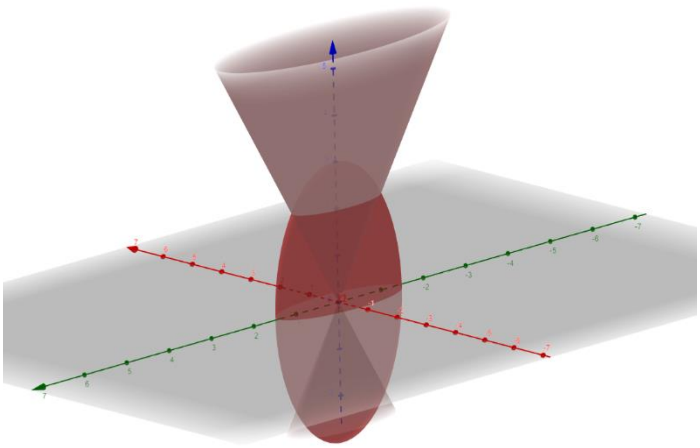
$$z = 3r \cos\varphi$$

Pomocí této fikané substituce se rovnice přetransformují na

$$2\frac{1}{2} r^2 (\sin\varphi)^2 (\cos\psi)^2 + \frac{1}{2} 2r^2 (\sin\varphi)^2 (\sin\psi)^2 = \frac{1}{9} 9r^2 (\cos\varphi)^2 \to (\sin\varphi)^2 = (\cos\varphi)^2$$

$$2\frac{1}{2} r^2 (\sin\varphi)^2 (\cos\psi)^2 + \frac{1}{2} 2r^2 (\sin\varphi)^2 (\sin\psi)^2 + \frac{1}{9} 9r^2 (\cos\varphi)^2 = 1 \to r^2 = 1$$

Nyní je asi na místě si tento objekt správně představit, abychom věděli, jaké meze jsou ty správné.



Náš objekt existuje pouze na vrchním poloprostoru, protože $z \geq 0$. Na obrázku, vidíme, že zespodu, je ohraničován převráceným kuželem (jehož základnou je elipsa nikoli kruh) a z vrchu je to elipsoid. Také odsud vidíme, že $\psi \in [0, 2\pi]$, což napovídá, také výsledek upravených rovnic, které na ψ

nezáleží. Zásadnější problém je, jak meze vyřešit pro φ. Na jednu stranu musíme uvažovat podmínku, že $(\sin\varphi)^2 = (\cos\varphi)^2 \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$, což tvoří jednu mez. Dále podíváme-li se na souřadnici z a dáme r pevné tak zjistíme, že $z(\varphi) = 3r\cos\varphi\,; z(0) = 3r = max$, čili nula je druhá mez neboli $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Nakonec zbývá r, protože $z \geq 0$ a $r^2 = 1$, meze jsou $r \in [0,1]$.

$$|\det\nabla\Phi| = \left|\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \psi} & \frac{\partial y}{\partial \psi} & \frac{\partial z}{\partial \psi} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{pmatrix}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi\cos\psi & \sqrt{2}\sin\varphi\sin\psi & 3\cos\varphi \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}r\sin\varphi\, sin\,\psi & \sqrt{2}r\sin\varphi\cos\psi & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}r\cos\varphi\cos\psi & \sqrt{2}r\cos\varphi\sin\psi & -3r\sin\varphi \end{pmatrix}\right| =$$

$$= |(-3r^2(\sin\varphi)^3(\cos\psi)^2 + 0 - 3r^2(\cos\varphi)^2\sin\varphi\,(\sin\psi)^2)$$
$$- (3r^2(\cos\varphi)^2\sin\varphi\,(\cos\psi)^2 + 0 + 3r^2(\sin\varphi)^3(\sin\psi)^2)|$$
$$= |-3r^2(\sin\varphi)^2\sin\varphi - 3r^2(\cos\varphi)^2\sin\varphi| = 3r^2\sin\varphi$$

Nyní už tedy máme vše potřebné k tomu, abychom spočetli objem tělesa, na pořadí toho, co integrujeme nezáleží.

$$V = \int_0^1\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^{2\pi} 3r^2\sin\varphi\, d\psi\right)d\varphi\right)dr = \int_0^1\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} 6\pi r^2\sin\varphi\, d\varphi\right)dr =$$

$$= \int_0^1 [-6\pi r^2\, cos\,\varphi]_0^{\frac{\pi}{4}}\, dr = \int_0^1 3(2-\sqrt{2})\pi r^2\, dr = \left[(2-\sqrt{2})\pi r^3\right]_0^1 = (2-\sqrt{2})\pi$$

3)

Kvádr se čtvercovou podstavou s délkou strany $a > 0$ je naplněn plynem. Dno kvádru leží v rovině $z = 0$, výška kvádru je rovna konstantě $h > 0$. Na dně kvádru má tlak konstantní hodnotu $p_0 > 0$, hustota konstantní hodnotu $\rho_0 > 0$. Konstanta $g > 0$ značí velikost tíhového zrychlení.

Předpokládejte, že:

- Pro hustotu $\rho = \rho(z)$ a tlak $p = p(z)$ platí
$$p(z) = \int_z^h \rho(\hat{z})g\, d\hat{z}.$$
- Pro plyn platí stavová rovnice
$$\frac{p}{\rho\theta} = konst.$$
- Systém je izotermální, tedy teplota $\theta > 0$ je konstantní.

Úkoly:

- Odvoďte formuli $\rho(z) = \rho_0 e^{-\frac{\rho_0}{p_0}gz}$.
- Spočtěte hmotnost plynu uvnitř kvádru.

Řešení:

Jan Šabata

Vzhledem k tomu, že systém je izotermální a platí stavová rovnice, smíme říct, že hustota je přímo úměrná tlaku neboli $\rho = p \cdot K$, kde hodnotu K určíme z nulového z, takže $K = \frac{\rho_0}{p_0}$. Nyní dosadíme do integrálu dle vztahu $\rho(z) = \frac{\rho_0}{p_0} \cdot p(z)$

$$\rho(z) = \frac{\rho_0}{p_0} \int_z^h \rho(\hat{z}) g \, d\hat{z}$$

Nyní označme primitivní funkci k $\rho(\hat{z})$ jako $P(\hat{z})$, pak postupuje dál ve výpočtu.

$$\rho(z) = \frac{\rho_0}{p_0} g\big(P(h) - P(z)\big)$$

Zderivuji podle z

$$\frac{d\rho}{dz} = -\frac{\rho_0}{p_0} g\rho(z)$$

Separuji

$$\ln \rho(z) = -\frac{\rho_0}{p_0} gz + C$$

Užiji exponenciálu

$$\rho(z) = e^{-\frac{\rho_0}{p_0} gz + C} = e^C e^{-\frac{\rho_0}{p_0} gz} = \rho_0 e^{-\frac{\rho_0}{p_0} gz}$$

Tento vztah musí platit i pro $z = 0$, pro tuto hodnotu máme hustotu ze zadání.

$$\rho(0) = \rho_0 = e^C$$

Použiji vztah pro výpočet hmotnosti

$$m = \int_V \rho dV$$

Kvádr má čtvercovou postavu o velikosti strany a a výšku h, je jedno v jakém pořadí budu integrovat, protože hustota(tlak) nezávisí na velikosti průřezu kvádru, pouze na výšce.

$$m = \int_0^a \left(\int_0^a \left(\int_0^h \rho \, dz \right) dy \right) dx = a^2 \int_0^h \rho_0 e^{-\frac{\rho_0}{p_0} gz} \, dz = a^2 \rho_0 \int_0^h e^{-\frac{\rho_0}{p_0} gz} \, dz$$

$$m = a^2 \rho_0 \left[-\frac{p_0}{\rho_0 g} e^{-\frac{\rho_0}{p_0} gz} \right]_0^h = a^2 \frac{p_0}{g} \left(1 - e^{-\frac{\rho_0}{p_0} gh} \right)$$