Príklad 1:

Spočítajte integrál

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}\ dx$$

Riešenie:

Upravíme si $\frac{1}{1-x^2}$ na geometrický rad:

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$$

Máme teda:

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} \ln x\ \ dx$$

Ďalej upravme:

$$-\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} -x^{2n} \ln x\ \ dx$$

A ukážeme, že môžeme použiť Léviho vetu pre rady na zámenu sumy a integrálu.

Označme si:

$$f_n := -x^{2n} \ln x$$

Ihneď vidíme, že $f_n \geq 0$ pre $\forall x \in (0,1)$

Musí ešte platiť $f_n \in L,\ \ \forall n \in \mathbb{N}$. Teda nájdeme $g(x) \in L$ také, že $f_n(x) \leq g(x)$.

To nájdeme ako maximum f_n:

$$(-x^{2n} \ln x)' = -2nx^{2n-1} \ln x - \frac{x^{2n}}{x} = -x^{2n-1}(2n \ln x + 1\ )$$

$$2n \ln x + 1 = 0$$

$$\ln x = -\frac{1}{2n}$$

$$x_{max} = e^{-\frac{1}{2n}}$$

Teda

$$f_n(x) = -x^{2n} \ln x \leq -x_{max}^{2n} \ln(x_{max}) = e^{-1} \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{2e} := g(x)$$

Pre $g(x)$ ďalej máme:

$$\int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{2e}\,dx = \left[\frac{1}{2e}x\right]_0^1 = \frac{1}{2e} - 0 = \frac{1}{2e}$$

a teda $g(x) \in L$.

Platí

$$\left|\int_0^1 f_n(x)\,dx\right| \leq \int_0^1 |f_n(x)|\,dx = \int_0^1 f_n(x)\,dx \leq \int_0^1 g(x)\,dx = \frac{1}{2e}$$

čo znamená, že $f_n \in L,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Na zámenu sumy integrálu musí ešte platiť:

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{m} -x^{2n} \ln x\,dx \leq K$$

kde $K \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Máme

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{m} -x^{2n} \ln x\,dx = \sum_{n=0}^{m} \int_0^1 -x^{2n} \ln x\ \,dx = -\sum_{n=0}^{m} \int_0^1 x^{2n} \ln x\ \,dx \qquad (1)$$

Zámena v (1) bola možná pretože je to súčet konečného počtu členov. Ďalej využijeme per partes:

$$\int_0^1 x^{2n} \ln x\ \,dx = \left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\ln x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{2n}}{2n+1}\,dx = 0 - \left[\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{(2n+1)^2}$$

Dosadením do (1) dostaneme:

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{m} -x^{2n} \ln x\,dx = \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{(2n+1)^2} < K$$

pretože ide o konečný súčet konvergentného radu.

Splnili sme všetky predpoklady na Léviho vetu pre rady. Môžeme preto prehodiť integrál a sumu. Dostaneme:

$$-\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} -x^{2n} \ln x\,dx = -\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 -x^{2n} \ln x\ \,dx$$

Opäť ako vyššie, dostaneme pomocou per partes:

$$-\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} -x^{2n} \ln x\,dx = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \qquad (2)$$

Vidíme, že posledná suma v (2) je súčet nepárnych čísel a preto môžeme využiť vzťah:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \tag{3}$$

Dosadíme (3) do (2) dostaneme:

$$-\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = -\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(2n)^2}\right) - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^2}\right) - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Využijeme, že $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{\pi^2}{6}$ dostávame:

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}\, dx = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^2}\right) - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{24} - \frac{\pi^2}{6} = -\frac{3\pi^2}{24} = -\frac{\pi^2}{8}$$

Príklad 2:

Spočítajte

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x^2+(2n-1)x-n^2}\, dx$$

Riešenie:

Označíme si

$$f_n := e^{-x^2+(2n-1)x-n^2}$$

a ukážeme, že platí zámena limity a integrálu pomocou Lebesgueovej vety.

Vidíme, že f_n sú spojité na $x \in [0, +\infty)$.

Pre limitu platí:

$$\lim_{n\to+\infty} f_n = \lim_{n\to+\infty} e^{-x^2+(2n-1)x-n^2} = e^{\lim_{n\to+\infty} -x^2+(2n-1)x-n^2} \tag{4}$$

kde sme v poslednej rovnosti využili vzťah pre limitu mocniny. Ďalej:

$$\lim_{n\to+\infty} -x^2 + (2n-1)x - n^2 = \lim_{n\to+\infty} -x^2 + 2nx - n^2 - x = \lim_{n\to+\infty} -(x-n)^2 - x = -\infty$$

pre všetky $x \geq 0$. Po dosadení do (4) máme:

$$\lim_{n\to+\infty} f_n = e^{\lim_{n\to+\infty} -x^2+(2n-1)x-n^2} = e^{-\infty} = 0$$

Teraz nájdeme $g(x) \in L$ také, že $f_n(x) \leq g(x)$.

Vidíme, že:

$$-x^2 + (2n-1)x - n^2 = -(x-n)^2 - x \leq -x$$

z čoho plynie:

$$f_n(x) = e^{-x^2+(2n-1)x-n^2} \leq e^{-x} := g(x)$$

Ďalej

$$\int_0^{+\infty} g(x)\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = [-e^{-x}]_0^{+\infty} = -0 + e^0 = 1$$

a teda $g(x) \in L$.

Musí ešte platiť $f_n \in L,\ \forall n \in \mathbb{N}$. To plynie z

$$\left|\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx\right| \leq \int_0^{+\infty} |f_n(x)|\,dx = \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx \leq \int_0^{+\infty} g(x)\,dx = 1$$

Rovnosť $|f_n(x)| = f_n(x)$ dostaneme z toho, že exponenciála je vždy kladná funkcia.

Tým máme splnené všetky predpoklady Lebesgueovej vety a môžeme zameniť limitu a integrál. Dostávame teda:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x^2+(2n-1)x-n^2}\,dx = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} e^{-x^2+(2n-1)x-n^2}\,dx = \int_0^{+\infty} 0\,dx = 0$$

Príklad 3:

Pomocou Fatuovho lemmatu ukáže, že rad

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n n^2}{x^{4n}}$$

definuje na $[2, +\infty)$ lebesgueovsky integrovateľnú funkciu.

Riešenie:

Označíme si:

$$f_n := \frac{(-1)^n n^2}{x^{4n}}$$

A ukážeme, že platí Fatuovo lemma.

Chceme aby $f_n \to f\ \ s.v.$

To ukážeme zo stejnoměrnej konvergencie radu. Na to využijeme Weierstrassov test:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} |f_n| = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^2}{x^{4n}} \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^2}{2^{4n}} = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{n}{2^{2n}}\right)^2 \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{2^{2n}} \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$$

kde $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$ konverguje. Teda rad stejnoměrne konverguje. Z toho plynie, že $f_n \to f\ \ s.v.$

Označíme si:

$$s_n(x) := \sum_{i=2}^{n} \frac{(-1)^i i^2}{x^{4i}}$$

ako čiastočný súčet radu.

Chceme ukázať, že $s_n \geq 0 \;\; \wedge \;\; s_n \in L$ pre $\forall n \in \mathbb{N}: n \geq 2$.

Vidíme, že ide o alternujúci rad a ten konverguje ak je limita a_n nulová.

$$\lim_{n\to+\infty} a_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{x^{4n}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{x^n} \cdot \frac{n}{x^n} \cdot \frac{1}{x^n} \cdot \frac{1}{x^n}\right) = 0$$

posledná rovnosť plynie zo spojitosti jednotlivých členov súčinu na intervale $x \in [2, +\infty)$.

Ďalej určíme či a_n sú monotónne:

$$\frac{(n+1)^2}{x^{4n+4}} \leq \frac{n^2}{x^{4n}}$$

$$\frac{(n+1)^2}{n^2} \leq x^4$$

$$\frac{(n+1)^2}{n^2} = \frac{n^2+2n+1}{n^2} = 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \leq 1 + \frac{2}{2} + \frac{1}{4} = \frac{9}{4} \leq x^4$$

$$\frac{9}{4} \leq 16 = 2^4 \leq x^4$$

a teda monotónnosť platí pre $x \geq 2$.

Teda platí $s_n(x) \geq s_2(x)$ a stačí ukázať, že $s_2(x) \geq 0$. Priamym dosadením dostaneme:

$$s_2(x) = \frac{2^2}{x^8} - \frac{3^2}{x^{12}} = \frac{4}{x^8} - \frac{9}{x^{12}}$$

$$s_2(x) = \frac{1}{x^8} \cdot \left(4 - \frac{9}{x^4}\right) \geq \frac{1}{x^8} \cdot \left(4 - \frac{9}{16}\right) = \frac{1}{x^8} \cdot \frac{53}{16} \geq 0$$

kde sme využili:

$$x \geq 2 \Leftrightarrow x^4 \geq 16 \Leftrightarrow \frac{1}{x^4} \leq \frac{1}{16} \Leftrightarrow -\frac{1}{x^4} \geq -\frac{1}{16}$$

Máme teda $s_n(x) \geq 0$.

Teraz ukážeme, že $s_n \in L$. Máme:

$$\int_2^{+\infty} s_n(x)\, dx = \int_2^{+\infty} \sum_{i=2}^{n} \frac{(-1)^i i^2}{x^{4i}}\, dx$$

Pretože ide o konečný súčet môžeme prehodiť sumu a integrál a teda:

$$\int_2^{+\infty} \sum_{i=2}^{n} \frac{(-1)^i i^2}{x^{4i}}\, dx = \sum_{i=2}^{n} \int_2^{+\infty} \frac{(-1)^i i^2}{x^{4i}}\, dx$$

Integrál $\int_2^{+\infty} \frac{(-1)^i i^2}{x^{4i}}\, dx$ je konvergentný pre:

$$4i \geq 2 \Rightarrow i \geq \frac{1}{2}$$

a teda $f_i(x) := \int_2^{+\infty} \frac{(-1)^i i^2}{x^{4i}}\, dx$ patria do L a pretože ide o vektorový priestor tak tam patrí aj ich konečný súčet. Preto:

$$\int_2^{+\infty} s_n(x)\, dx = \sum_{i=2}^{n} f_i(x) \tag{5}$$

a teda $s_n \in L$.

Musíme ešte ukázať, že $(\exists K \in \mathbb{N})\ (\forall n \in \mathbb{N}: n \geq 2): \int_2^{+\infty} s_n(x)\, dx \leq K$

Z (5) máme:

$$\int_2^{+\infty} s_n(x)\, dx = \sum_{i=2}^{n} \int_2^{+\infty} \frac{(-1)^i i^2}{x^{4i}}\, dx = \sum_{i=2}^{n} \frac{(-1)^i i^2}{1-4i} \left[x^{-4i+1}\right]_2^{+\infty} = \sum_{i=2}^{n} \frac{(-1)^i i^2}{1-4i} \left(0 - 2^{-4i+1}\right)$$

$$\int_2^{+\infty} s_n(x)\, dx = \sum_{i=2}^{n} \frac{(-1)^{i+1} 2i}{1-4i} \frac{i}{2^{4i}} \tag{6}$$

kde v (6) platí:

$$\frac{i}{2^{4i}} = \frac{1}{16} \frac{i}{2^i} \xrightarrow{i \to +\infty} 0$$

$$\frac{2i}{1-4i} = \frac{2}{\frac{1}{i} - 4} \xrightarrow{i \to +\infty} -\frac{1}{2}$$

Suma v (6) teda konverguje pre $i \to +\infty$ a teda:

$$\sum_{i=2}^{n} \frac{(-1)^{i+1} 2i}{1-4i} \frac{i}{2^{4i}} \leq K$$

a existuje $(\exists n_0 \in \mathbb{N})\ (\forall n \in \mathbb{N}: n \geq 2): \int_2^{+\infty} s_n(x)\, dx \leq K + 1$.

Splnili sme všetky predpoklady Fatuovho lemmatu a teda platí, že rad

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n n^2}{x^{4n}}$$

definuje na $[2, +\infty)$ lebesgueovsky integrovateľnú funkciu.