Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale přesně odůvodněte. V případě studia číselných řad doslovně uveďte jaké kritérium používáte při studiu konvergence. Ve výpočtech můžete bez dalšího komentáře používat známé výsledky ohledně konvergence řad $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$, vlastnosti řad $\sum_{n=1}^{N} \sin(nx)$, $\sum_{n=1}^{N} \cos(nx)$, a dále Taylorovy rozvoje elementárních funkcí.

Jméno: ______________________________

Příklad	1	2	3	4	5	6	**Celkem bodů**
Bodů	5	5	6	6	7	7	36
Získáno							

[5] 1. Metodou Taylorových polynomů určete $a \in \mathbb{R}$ tak, aby limita

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x}\right) - \ln\left(1+\frac{3x}{2}\right) + ax^2}{x^3}$$

byla vlastní. Tuto limitu spočtěte.

[5] 2. Uvažujte funkci $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem

$$f(x,y) = \frac{yx^2}{y^2 + x^4}.$$

i. Rozhodněte, zda existuje limita $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. Pokud limita existuje, určete, čemu se rovná.

ii. V libovolném bodě $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ spočtěte totální diferenciál f.

iii. Určete směrovou derivaci funkce f v bodě $(1,2)$ ve směru $v = (1,0)$.

[6] 3. Pro všechna $z \in \mathbb{C}$ rozhodněte, zda mocninná řada

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{\sqrt{n}} z^n$$

konverguje (absolutně či neabsolutně) nebo nekonverguje.

[6] 4. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $y' = \frac{y^2-3x^2}{yx}$. (Nápověda: ověřte, že se jedná o homogenní rovnici 1. řádu a použijte substituci $z(x) = \frac{y(x)}{x}$.)

[7] 5. Mějme množinu

$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 \ \wedge \ x^2 + z^2 = 1\right\}.$$

Je množina $M \subset \mathbb{R}^3$ kompaktní? Nalezněte minimum a maximum funkce $f(x, y, z) = y^2 + z^2$ vzhledem k M.

[7] 6. Ukažte, že rovnice $xy + z + e^{x+y+z} = 0$ určuje v jistém okolí U bodu $(1, 1, -2)$ implicitně zadanou funkci proměnných x a y. Označme tuto funkci φ (tj. $z = \varphi(x, y)$). Spočtěte $\nabla\varphi(1, 1)$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(1, 1)$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial y}(1, 1)$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(1, 1)$. Rozhodněte o platnosti následujících výroků:

i. funkce $\varphi(x, y) + x + y$ má lokální minimum v bodě $(1, 1)$,

ii. funkce $\varphi(x, y) + x + y + (x - 1)^2 + (y - 1)^2$ má lokální minimum v bodě $(1, 1)$.