17. TEORIE DISTRIBUCÍ

Na konci 20. let minulého století Paul Dirac zavedl, při bádání v oblasti kvantové mechaniky, tzv. δ-funkci, která má tyto vlastnosti:

(D1) • $\delta(x) = 0$ pro $x \neq 0$

(D2) • $\int_{\mathbb{R}} \delta(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0)$ pro libovolnou spojitou fci φ.

Víme z teorie Lebesgueova integrálu, že δ nemůže být (lokálně) integrovatelná funkce, neboť z druhé podmínky pro $\varphi \equiv 1$ plyne

$$1 = \int_{\mathbb{R}} \delta(x)\,dx,$$

přičemž z první podmínky plyne

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(x)\,dx = 0.$$

Trvalo několik let než se matematikům podařilo najít přístup, který dá δ-funkci, vnímané jako lineární spojitý funkcionál definovaný na prostoru hladkých funkcí, přesný matematický význam.

Matematická teorie, která na tyto otázky odpovídá, se nazývá teorie distribucí.

17.1. FUNKCE A ZOBECNĚNÉ (ČI SYMBOLICKÉ) FUNKCE NEBOLI (DISTRIBUCE)

Distribuce zobecňují pojem funkce tak, abychom mohli dobře matematicky popsat pojmy jako hustota materiálového bodu, hustota bodového náboje či dipólu, intenzita bodového zdroje, velikost okamžité síly působící v bodě.

Distribuce také zachycují skutečnost, že ve skutečnosti je velice obtížné měřit např. teplotu v bodě a spíše měříme průměrné hodnoty v okolí a za hodnotu v bodě pak prohlásíme limitu průměrů.

Teorie distribucí byla vyvinuta Laurentem Schwartzem (Francie) a S.L. Sobolevem (SSSR). Pokusme se motivovat tuto teorii snahou porozumět významu distribuce náboje. Inženýři a fyzici vždy využívali různé typy distribuce náboje: bodový zdroj (náboj), křivkový náboj, plošný náboj, objemový náboj, bodový dipól, plošná vrstva dipólů, atd. Pokusme se dát těmto termínům přesnější matematický význam.

Jak můžeme rozpoznat jaký druh (typ) distribuce náboje máme? Jediná možnost je provést experiment, který měří náboj. Přitom používáme zařízení, které nám zobrazí jakýsi průměr náboje v oblasti. Velikost oblasti závisí na kvalitě instrumentu (měřícího zařízení). Pokud chceme měřit bodový náboj, musíme mít zařízení, které je schopné měřit náboj ve stále menší a menší oblasti obsahující bod našeho zájmu. I když pomineme kvantové jevy, ani teoreticky ani prakticky nemáme nástroj, který by měřil náboj přesně v bodě.

Tuto situaci lze popsat matematicky takto:
buď φ měřící zařízení a $Q(\varphi)$ hodnota náboje daná skrze zařízení φ.

Například, pokud existuje objemová hustota náboje $\rho = \rho(x)$,
$(\rho \in L^1)$ pak $Q(\varphi) := \int \rho(x)\varphi(x)\,dx$

Zřejmě $Q(\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) = \alpha_1 Q(\varphi_1) + \alpha_2 Q(\varphi_2)$
pro $\forall\, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$
$\forall\, \varphi_1, \varphi_2$

neboli Q je <u>lineární funkcionál</u> na množině <u>měřících zařízení</u>

Prvky φ (dopod měřicí zařízení) budeme nazývat <u>testovací funkce</u>. Lze uvažovat spoustu variant pro prostory testovacích funkcí; níže zavedeme $\mathcal{D}(\Omega)$, $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

<u>Lineární</u> <u>spojité</u> funkcionály na $\mathcal{D}(\Omega)$, viz funkcionál měřicí Q výše, pak budeme nazývat <u>distribuce</u> či <u>zobecněné</u> nebo symbolické funkce.

Důvody proč budeme pracovat s $\mathcal{D}$ či $\mathcal{S}$ je několik.

Matematika : • funkcionály na těchto prostorech budou mít dobré konvergenční vlastnosti
• třída distribucí bude "velká"

Fyzika : měřicí zařízení (testovací funkce) je efektivní v místě měření a daleko od něj jsou hodnoty potlačeny.

$\boxed{\text{Definice} \mid \mathcal{D}(\Omega)}$ Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřená. Řekneme, že $\varphi_k \to \varphi$ v $\mathcal{D}(\Omega)$, píšeme $\boxed{\varphi_k \to \varphi \text{ v } \mathcal{D}}$, pokud <u>$\exists K \subset \mathbb{R}^d$</u> kompaktní tak, že:

- $\operatorname{supp} \varphi_k \subset K$ pro každé $k \in \mathbb{N}$ & $\operatorname{supp} \varphi \subset K$
- $\varphi_k \rightrightarrows \varphi$ v K a také $D^\alpha \varphi_k \rightrightarrows D^\alpha \varphi$ v K pro každý multiindex $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$

Připomeň : • $\operatorname{supp} \varphi := \overline{\{x \in \Omega ; \varphi(x) \neq 0\}}$ (uzávěr množiny bodů, kde je φ nenulová.)

• $D^\alpha \varphi(x) := \dfrac{\partial^{|\alpha|} \varphi(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}}$ $\quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$, $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_d$

$\boxed{\text{Definice}}$ (DISTRIBUCE) DISTRIBUCE nebo ZOBECNĚNÁ FUNKCE nebo SYMBOLICKÁ FUNKCE je <u>funkcionál T na $\mathcal{D}(\Omega)$</u>, <u>který je *lineární a spojitý*</u>, tzn.: $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ (nebo $\mathbb{C}$) splňuje

1) $T(\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2) = \alpha_1 T(\varphi_1) + \alpha_2 T(\varphi_2)$ pro každé $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ (nebo $\mathbb{C}$), $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$
LINEARITA

2) $T(\varphi_k) \to 0$ pokud $\varphi_k \to 0$ v $\mathcal{D}$
SPOJITOST

Pozorování! Všimněme si, že z vlastností 1) a 2) plyne tvrzení:

$\boxed{\text{Pokud } \varphi_k \to \varphi \text{ v } \mathcal{D}(\Omega), \text{ pak } T(\varphi_k) \to T(\varphi).}$

(Dk) Označme $\psi_k := \varphi_k - \varphi$. Pak $\psi_k \to 0$ v $\mathcal{D}(\Omega)$ dle předpokladu.

Z vlastnosti 2) plyne $T(\psi_k) \to 0$, což znamená $T(\varphi_k - \varphi) \to 0$.

Z vlastnosti 1) pak máme $T(\varphi_k) - T(\varphi) \to 0$ neboli $T(\varphi_k) \to T(\varphi)$.

PONAUČENÍ: U lineárních funkcionálů stačí zkoumat spojitost v 0.

Označení

- $\mathcal{D}' = \mathcal{D}'(\Omega)$ je množina všech spojitých lineárních funkcionálů na $\mathcal{D}(\Omega)$. je množina všech distribucí
- Temperované distribuce = spojité lineární funkcionály na $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$
  $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ je množina všech temperovaných distribucí

PŘÍKLADY ① Integrovatelné funkce jsou distribuce. Buď $f \in L^1_{loc}(\Omega)$

tzn. $f \in L^1(K)$ pro každý kompakt $K \subset \Omega$.

Definujme $\boxed{T(\varphi) := \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx \quad \text{pro libovolné } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)}$

Ukážeme, že T je distribuce.

a) $T(\varphi) < \infty$ pro $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ neboť $\int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx \overset{\varphi \text{ má nosič v nějakém } K}{=} \int_K f(x)\varphi(x)\,dx$
$$\le \max_{x\in\Omega}|\varphi(x)| \int_K |f(x)| < \infty$$

b) T je lineární. $T(\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) = \int_\Omega f(x)[\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x)]\,dx$

$$\overset{\text{linearita integrálu}}{=} \alpha_1 \int_\Omega f(x)\varphi_1(x)\,dx + \alpha_2 \int_\Omega f(x)\varphi_2(x)\,dx$$

$$= \alpha_1 T(\varphi_1) + \alpha_2 T(\varphi_2)$$

c) T je spojité. Buď $\varphi_k \to 0$ v $\mathcal{D}(\Omega)$ libovolné. Pak existuje $K \subset \Omega$ kompaktní tak, že $\varphi_k \rightrightarrows 0$ v K

tzn. $\sup_{x\in\Omega} |\varphi_k(x)| \to 0$ pro $k \to \infty$.

Pak $|T(\varphi_k)| = \left|\int_\Omega f(x)\varphi_k(x)\,dx\right| = \left|\int_K f(x)\varphi_k(x)\,dx\right| \le$

$$\int_K |f(x)||\varphi_k(x)|\,dx \le \underbrace{\underbrace{\sup_{x\in K}|\varphi_k(x)|}_{\to\, 0}\ \underbrace{\int_K |f(x)|\,dx}_{<+\infty}}_{0} \longrightarrow 0.$$

■

$\boxed{\text{Definice}}$ Distribuci T, kterou lze popsat ve tvaru $\int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx$, tzn.

$$\langle T,\varphi\rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx \quad \forall \varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$$

přičemž $f\in L^1_{loc}(\Omega)$, nazýváme <u>regulární distribuce</u>.

Př. (2) <u>Diracova distribuce</u> Buď $a\in\Omega$. Označme δ_a funkcionál na $\mathcal{D}(\Omega)$ definovaný $\delta_a(\varphi) := \varphi(a)$.
Speciálně $\delta(\varphi) := \delta_0(\varphi)$.

Ukážeme, že δ_a je distribuce.

a) $\delta_a(\varphi) = \varphi(a) < \infty$ pro libovolné $\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$

b) linearita. $\delta_a(\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2) = \left(\alpha_1\varphi_1(x)+\alpha_2\varphi_2(x)\right)\Big|_{x=a}$
$= \alpha_1\varphi_1(a)+\alpha_2\varphi_2(a) = \alpha_1\delta_a(\varphi_1)+\alpha_2\delta_a(\varphi_2).$

c) spojitost. Buď $\{\varphi_k\}\subset\mathcal{D}(\Omega)$ libovolná splňující $\varphi_k\to 0$ v $\mathcal{D}$, pak speciálně
$$\varphi_k(a)\to 0 \quad (k\to\infty)$$

Tedy $\delta_a(\varphi_k) = \varphi_k(a)\to 0$.

Př. (3) <u>Funkce, jež mají integrál ve smyslu hlavní hodnoty, jsou distribuce.</u>

Lze definovat v.p. $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x}\,dx$ předpisem v.p. $\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{x}\,dx = \lim_{\substack{R\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\left[\int_{-R}^{-\varepsilon}\frac{1}{x}\,dx+\int_{\varepsilon}^{R}\frac{1}{x}\,dx\right]$

Vidíme, že zatímco $\frac{1}{x}\notin L^1(\mathbb{R})$, tak $\frac{1}{x}$ má integrál ve smyslu hlavní hodnoty a platí

(*) $\quad$ v.p. $\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{x}\,dx = \left[\ln|x|\right]_{-R}^{-\varepsilon} + \left[\ln x\right]_{\varepsilon}^{R} = 0$

$\boxed{\text{v.p.}}$ je zkratka francouzského „valeur principale"; někdy se používá také PV pro anglické „principal value", či $\boxed{\text{p.v.}}$ místo v.p.

Definujme funkcionál $T_{v.p.\frac{1}{x}}$ předpisem

$$T_{v.p.\frac{1}{x}}(\varphi) := v.p. \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx. \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Ukážeme, že $T_{v.p.\frac{1}{x}}(\varphi)$ je distribuce.

1) $\boxed{|T_{v.p.\frac{1}{x}}(\varphi)| < \infty \quad \text{pro } \forall \varphi}$

Pro libovolné, pevné $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\exists (k>0)$ $\operatorname{supp}\varphi \subset \langle -K, K\rangle$.

Dk

$$v.p. \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{-k}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} + \int_{\varepsilon}^{K} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx\right]$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{-k}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(0)}{x} + \int_{\varepsilon}^{K} \frac{\varphi(0)}{x}\right] + \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{-k}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx\right]$$

$$+ \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{\varepsilon}^{K} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx\right]$$

$$=: I_1 + I_2 + I_3.$$

První člen I_1 je roven 0, dle (*), viz str 3/5 dole.
Dle Taylorova rozvoje s Lagrangeovým tvarem zbytku:

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} = \varphi'(\xi_x) \qquad \text{kde } \xi_x \in (x,0)$$

$$\text{Tedy } |I_2| \leq \max_{\xi \in [-k,0]} |\varphi'(\xi)|\, K < \infty$$

Člen $I_3 < \infty$ s použitím stejného argumentu

2) $\boxed{\text{Linearita}}$ $T_{v.p.\frac{1}{x}}(\varphi)$ plyne z linearity $\int_{\mathbb{R}} \dots dx$.

3) $\boxed{\text{Spojitost}}$ Nechť $\varphi_k \to 0$ v $\mathcal{D}$. Speciálně

$$\varphi_k \rightrightarrows 0 \ \text{ a } \ \varphi_k' \rightrightarrows 0 \ \text{ na jistém } [-K,K] \quad K \in (0,\infty)$$

Pak, podobně jako v 1), máme

$$T_{v.p.\frac{1}{x}}(\varphi_k) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{-k}^{-\varepsilon} \frac{\varphi_k(0)}{x} + \int_{\varepsilon}^{K} \frac{\varphi_k(0)}{x}\right] + \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-k}^{\varepsilon} \varphi_k'(\xi_x)\,dx$$

$$+ \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon}^{K} \varphi_k'(\xi_x)\,dx.$$

Opět, první člen je nulový a zbylé dva odhadneme členem

$2K \max_{s \in [-k,k]} |\varphi_k'(s)|$, který konverguje k 0, neboť

$$\varphi_k' \rightrightarrows 0 \ \text{ v } [-K,K].$$

///

Zavedli jsme pojem distribuce a ukázali, že Diracova δ-funkce je vlastně spojitý lineární funkcionál na $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ či $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Můžeme však lépe motivovat vlastnost (D2) δ-funkce? Pokusíme se o to?

Z úvodu do variačního počtu víme, že nutná podmínka existence minimizéru nějakého obecně nelineárního funkcionálu Φ je charakterizována podmínkou $g'(0)=0$, kde $g(t):=\Phi(u+t\varphi)$.

Víme také, že v případě, kdy

(VarP) $$\Phi(u):=\frac{1}{2}\int_\Omega a(x)|\nabla u(x)|^2 dx - \int_\Omega f(x)u(x)\,dx,$$

podmínka
$$g'(0)=0$$
implikuje

$(E-L)^\bullet_{PDR}$ $$\boxed{\int_\Omega a(x)\nabla u(x)\cdot\nabla\varphi(x)\,dx - \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx = 0 \text{ které platí pro } \forall\varphi\in\mathcal{D}(\Omega).}$$

[Proveďte!]

Zde $a:\Omega\to\mathbb{R}^+$ je vhodná daná funkce, může být hladká, ale také jen omezená a měřitelná.

Ukázali jsme si, že za předpokladu, že f, a, u jsou hladké, $(E-R)_{PDR}$ implikuje

$(E-L)_{PDR}$ $$\boxed{-\operatorname{div}(a(x)\nabla u) = f \quad v\ \Omega}$$

Soustřeďme se nyní jen na druhý člen v $(E-L)^\bullet_{PDR}$, tj.
$$\int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx \quad, \text{kde } \varphi\in\mathcal{D}(\Omega).$$

Zkusme spočítat
$$\lim_{k\to\infty}\int_\Omega f_k(x)\varphi(x)\,dx \quad \text{pro } f_k(x)=\begin{cases}\frac{1}{|B_{\frac{1}{k}}(0)|} & x\in B_{\frac{1}{k}}(0)\\ 0 & \text{jinak}\end{cases}$$

míra 1-koule v $\mathbb{R}^d$

Pak $\int_\Omega f_k(x)\,dx = 1 \quad \forall k\in\mathbb{N}$. (Předpokládáme, že $B_1(0)\subset\Omega$).

Navíc, pro libovolné pevné $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\int_\Omega f_k(x)\varphi(x)\,dx = \frac{1}{|B_{\frac{1}{k}}(0)|}\int_{B_{\frac{1}{k}}(0)} \varphi(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{|B_{\frac{1}{k}}(0)|}\int_{B_{\frac{1}{k}}(0)} \varphi(0)\,dx + \underbrace{\frac{1}{|B_{\frac{1}{k}}(0)|}\int_{B_{\frac{1}{k}}(0)} \varphi(x)-\varphi(0)\,dx}_{= I}$$

$$= \varphi(0) + I$$

a $$|I| \leq \frac{1}{|B_{\frac{1}{k}}(0)|}\int_{B_{\frac{1}{k}}(0)} |\nabla\varphi'(\xi_x)\cdot(x-0)| \leq \max_{s\in\overline{B_1(0)}}|\nabla\varphi'(s)| \int_{B_{\frac{1}{k}}(0)}\frac{|x|}{|B_{\frac{1}{k}}(0)|}\,dx$$

$$\leq \underset{\downarrow\atop 0}{\frac{1}{k}}\ \underbrace{\max_{x\in\overline{B_1(0)}}|\nabla\varphi'(x)|}_{<\infty} \longrightarrow 0 \text{ pro } k\to\infty.$$

Tedy $$\lim_{k\to\infty}\int_\Omega f_k(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0).$$

Nyní jsme nejen motivovali podmínku (D2) ze strany 3/1, ale také jsme ukázali, že f_k vnímané jako regulární distribuce T_{f_k} (tzn. $T_{f_k}(\varphi) = \int_\Omega f_k(x)\varphi(x)$)

splňují $$\boxed{\lim_{k\to\infty} T_{f_k}(\varphi) = \delta(\varphi) \quad \text{pro } \forall \varphi\in\mathcal{D}(\Omega)}$$, kde δ je δ-distribuce definovaná v příkladu 2.

Tento limitní vztah motivuje následující definici.

Definice Buď $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ otevřené, $\{T_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathcal{D}'(\Omega)$, $T\in\mathcal{D}'(\Omega)$.
Říkáme, že T_k konvergují k T slabě (nebo v $\mathcal{D}'$) pokud
$$\langle T_k,\varphi\rangle \to \langle T,\varphi\rangle \qquad \forall\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$$
Říkáme, že $$\boxed{\sum_{k=1}^\infty T_k = T \text{ v } \mathcal{D}'} \iff \sum_{k=1}^\infty \langle T_k,\varphi\rangle = \langle T,\varphi\rangle \quad \forall\varphi\in\mathcal{D}(\Omega).$$

17.2 ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI DISTRIBUCÍ (DISTRIBUTIVNÍ POČET)

V této sekci se budeme snažit pochopit operace s distribucemi: posunutí, škálování, derivování, integrování, ...

Distribuce můžeme rozdělit na regulární a ostatní (singulární). Regulární distribuce jsou takové, které jsou určeny lokálně integrovatelnými fce:

$$T_f(\varphi) := \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

$$\updownarrow$$

$$f \in L^1_{loc}$$

kde ztotožňuji funkce, které se liší na množině míry nula, neboť jen pak je každá regulární distribuce určena jednoznačně fcí z L^1_{loc} [pomocí třídou ekvivalence]. Viz též str. 3/14

Tedy

$$L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$$

Také víme

$$\mathcal{D}(\Omega) \subset L^1(\Omega) \text{ je hustý v } L^1$$

Máme tedy

$$\boxed{\mathcal{D}(\Omega) \subset L^1_{loc} \subset \mathcal{D}'(\Omega)}$$

Platí následující věta, kterou lze z předchozích později ověřovat.

Tvrzení

Buď $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Pak $\exists \{f_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{D}(\Omega)$ tak, že $f_n \to T$ v $\mathcal{D}'$.

Toto tvrzení nám umožňuje vybudovat distributivní počet tak, že nejdříve vyšroubujeme mnohé vztahy pro regulární distribuce generované funkcemi z $\mathcal{D}(\Omega)$ a pak provedeme rozšíření těchto vztahů pro libovolné distribuce přes hustotu.

Na ZNAČENÍ ZÁLEŽÍ. Budeme psát

$\boxed{\langle T, \varphi\rangle}$ místo $\boxed{T(\varphi)}$, kde $T \in \mathcal{D}'$ a $\varphi \in \mathcal{D}$

a také

$\boxed{\langle f, \varphi\rangle}$ místo $\boxed{\langle T_f, \varphi\rangle = T_f(\varphi)}$ je-li $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ a T_f je korespondující regulární distribuce.

Distributivní počet pro regulární distribuce

- **POSUNUTÍ** Připomeň, že pro $a \in \mathbb{R}^d$: $\tau_a f(x) := f(x+a)$

$$\underline{\langle \tau_a f, \varphi \rangle} = \int_\Omega f(x+a)\varphi(x)\,dx \underset{z=x+a}{=} \int_{\mathbb{R}^d} f(z)\varphi(z-a)\,dz = \underline{\langle f, \tau_{-a}\varphi \rangle}$$

Posunutí distribuce o a

$f \equiv 0$ mimo Ω

$\varphi \equiv 0$ mimo Ω

Posunutí test. fce o $-a$

- **ŠKÁLOVÁNÍ** (změna měřítka)

Zavedeme pro $\lambda > 0$: $d_\lambda f(x) := f(\lambda x)$

$$\underline{\langle d_\lambda f, \varphi \rangle} = \int_\Omega f(\lambda x)\varphi(x)\,dx \underset{\substack{z=\lambda x\\ dx = \frac{dz}{\lambda^d}}}{=} \frac{1}{\lambda^d}\int_\Omega f(z)\varphi\left(\frac{z}{\lambda}\right)dz = \underline{\frac{1}{\lambda^d}\langle f, d_{\frac{1}{\lambda}}\varphi \rangle}$$

- **DERIVOVÁNÍ** Nechť $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ je multi index, a $D^\alpha f$ a všechny derivace nižšího řádu jsou z $L^1_{loc}(\Omega)$.

$$\underline{\langle D^\alpha f, \varphi \rangle} = \int_\Omega D^\alpha f(x)\varphi(x)$$

$$= \int_\Omega \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}}\varphi(x)\,dx$$

$$\underset{\substack{\text{per partes}\\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)}}{=} (-1)^{|\alpha|}\int f(x) D^\alpha \varphi(x)\,dx = \underline{(-1)^{|\alpha|}\langle f, D^\alpha \varphi \rangle}$$

- **NÁSOBENÍ** (skalární) funkcí $m \in C^\infty(\Omega)$

$$\underline{\langle mf, \varphi \rangle} = \int_\Omega m(x) f(x)\varphi(x)\,dx = \int_\Omega f(x)\, m(x)\varphi(x)$$

$$= \langle f, m\varphi \rangle$$

DŮLEŽITÉ: $m\varphi \in \mathcal{D}$!! pro $\varphi \in \mathcal{D}$

Pokud m není diferencovatelné, nelze násobení zavést. Uvažme například $m(x) = \operatorname{sgn} x$, pak $m\delta$ nelze smysluplně definovat neb $\langle m\delta, \varphi \rangle = m(0)\varphi(0)$ a není konzistentní způsob jak definovat $m(0)$.

Všechny výše uvedené vztahy mají tvar.

pro $\mathcal{O}f \in \mathcal{D}(\Omega)$, $f \in \mathcal{D}(\Omega)$: $\boxed{\langle \mathcal{O}f, \varphi \rangle = \langle f, S\varphi \rangle \quad \text{pro } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),}$

kde $\mathcal{O}$ je operátor, který chceme zavést – operátor posunutí, škálování, derivování, násobení C^∞ fcí.

a S je operátor, který dává platnost vztahu v $\square$.

Je-li $T \in \mathcal{D}'$ takové, že $\{f_n\} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ splňuje $f_n \to T$ v $\mathcal{D}'(\Omega)$

tzn. $\langle f_n, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle$ $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

pak $\langle f_n, S\varphi \rangle \to \langle T, S\varphi \rangle$ $\forall \varphi$

neboli:

$$(\star) \qquad \lim_{n\to\infty} \langle O f_n, \varphi \rangle = \langle T, S\varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

a levou stranu $(\star)$ označme $\langle OT, \varphi \rangle$. Tedy

$$\langle OT, \varphi \rangle = \langle T, S\varphi \rangle \quad \text{pro } \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

Máme tedy, pro lib. $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$:

(1) $\langle \tau_a T, \varphi \rangle = \langle f, \tau_{-a} \varphi \rangle$ $\quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $a \in \mathbb{R}$

(2) $\langle d_\lambda T, \varphi \rangle = \frac{1}{\lambda^d} \langle f, d_{\frac{1}{\lambda}} \varphi \rangle$ $\quad$ —"— , $\lambda > 0$

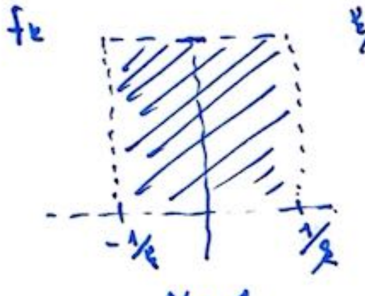
(3) $\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = \langle f, (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \varphi \rangle$ $\quad$ —"— , $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$

(4) $\langle mT, \varphi \rangle = \langle T, m\varphi \rangle$ $\quad$ —"— , $m \in C^\infty$

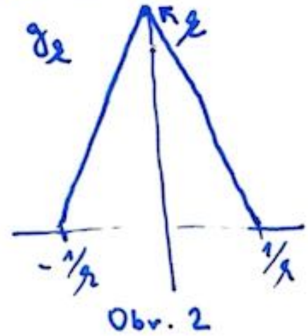
Příklady ① Ze vztahu (3) plyne, že $(E\text{-}L)_{PDR}$ je pro $f \in L^1_{loc}$ a pro $a \nabla u \in L^1_{loc}$ (což plyne mapř. z předpokladů $a \in L^\infty(\Omega)$ a $\nabla u \in L^1_{loc}$) popis PDR $(E\text{-}L)_{PDR}$ v $\mathcal{D}'(\Omega)$, přičemž oba členy představují regulární distribuce. Je-li však $f = \delta$ pak pro $a \in C^\infty(\Omega)$ $U \in \mathcal{D}'(\Omega)$ je distributivní řešení $(E\text{-}L)_{PDR}$ pokud

$$\langle u, -\operatorname{div}(a(x)\nabla\varphi) \rangle = \langle \delta, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

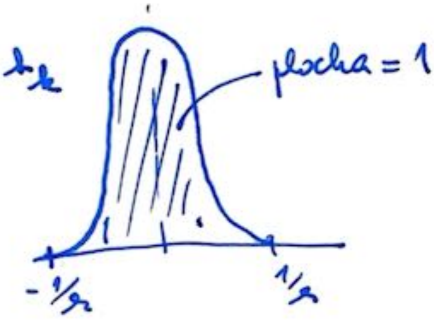
② Víme, že $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ definované obrázkem 1 konvergují k δ v $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Ověřte, že také $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ definované obrázkem 2 konvergují k δ v $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Rovněž $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ + obrázek 3.



Obr. 1



Obr. 2



---

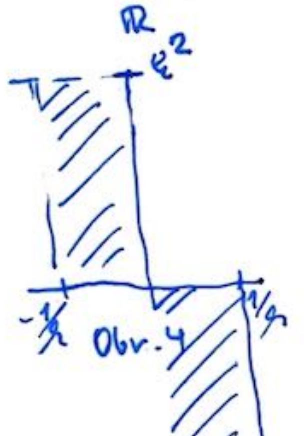
speciálně
$$\langle g_k, \varphi\rangle = \int_{\Omega} g_k(x)\varphi(x) \longrightarrow \langle \delta, \varphi\rangle = \varphi(0) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Počítejme přímo $\lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_{\Omega=\mathbb{R}} g_k'(x)\varphi(x)$. Funkce g_k' je načrtnuta v Obr. 4. Tedy

$$\int_{\mathbb{R}} g_k'(x)\varphi(x) = k^2\int_{-1/k}^{0}\varphi(x)\,dx - k^2\int_{0}^{1/k}\varphi(x)\,dx \approx \frac{\varphi\left(-\frac{1}{2k}\right)-\varphi\left(\frac{1}{2k}\right)}{\frac{1}{k}}$$

$$\Big\downarrow\ k\to\infty$$

$$-\varphi'(0)$$



Obr. 4

Tedy platí: $\langle \delta', \varphi\rangle = -\langle \delta, \varphi'\rangle$
ve shodě s vlastností (3), a také:
pokud $g_k \to \delta$ v $\mathcal{D}'$, pak $g_k' \to \delta'$ v $\mathcal{D}'$. ☒

③ Spočtěme $m\delta'$ pro $m \in C^\infty$. Uvidíme, že náš naivní předpoklad:
$\langle m\delta', \varphi\rangle = -m(0)\varphi'(0)$
nebude správný.

Platí:
$$\langle m\delta', \varphi\rangle \overset{(4)}{=} \langle \delta', m\varphi\rangle \overset{\text{Př. ②}}{=} -(m\varphi)'(0)$$
$$= -m'(0)\varphi(0) - m(0)\varphi'(0) = \langle -m'(0)\delta + m(0)\delta', \varphi\rangle$$

Tedy
$$\boxed{m\delta' = +m(0)\delta' - m'(0)\delta}$$

④ Ukážeme, že pro libovolné $a>0$, je f_a definovaná předpisem

$$\langle f_a,\varphi\rangle := \int_{-\infty}^{-a}\frac{\varphi(x)}{|x|}\,dx + \int_{a}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{|x|}\,dx + \int_{-a}^{a}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{|x|}\,dx$$

je distribuce.

Řešení: ① $\boxed{\langle f_a,\varphi\rangle < \infty \text{ pro } \forall \varphi}$ $\quad$ $\operatorname{supp}\varphi \subset \langle -K,K\rangle$ pro nějaké $K>0$

Intervaly $\langle -K,-a\rangle$ a $\langle a,K\rangle$ jsou kompaktní a funkce $\frac{\varphi(x)}{|x|}$ je zde omezená, tedy

$$\int_{-\infty}^{-a}\frac{\varphi(x)}{|x|} + \int_{a}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{|x|} < \infty$$

Člen

$$\left|\int_{-a}^{a}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{|x|}\,dx\right| = \left|\int_{-a}^{a}\frac{\varphi'(\xi_x)\,x}{|x|}\right| \le \underbrace{\max_{s\in[-a,a]}|\varphi'(s)|}_{<+\infty}\,2a < \infty$$

② Linearita ano, ověřte.

③ spojitost $\quad \varphi_k \to 0$ v $\mathcal{D}(\Omega) \Rightarrow \begin{matrix}\varphi_k \rightrightarrows 0\\ \varphi_k' \rightrightarrows 0\end{matrix}$ na jedné $\langle -L,L\rangle$, $L>0$.

Pak argumenty užitými v bodě ① výše, lze vyvodit, že

$$\langle f_a,\varphi_k\rangle \to 0 \quad \text{pro } k\to\infty.$$

$\boxed{\text{PONAUČENÍ}}$ Funkce $\frac{1}{|x|}$ není prvkem $L^1_{loc}(\mathbb{R})$, ani není integrovatelná ve smyslu hlavní hodnoty. K této funkci existují ∞-distribucí (parametrizovaných parametrem $a>0$).

Ačkoliv $\frac{1}{|x|}\ge 0$, tak neplatí $\langle f_a,\varphi\rangle \ge 0$ pro $\forall\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$, $\varphi\ge 0$. Tedy f_a není nezáporná distribuce; zatímco např. δ_0 je nezáporná distribuce.

Definice Řekneme, že $T\in\mathcal{D}'(\Omega)$ je nezáporná $\equiv \langle T,\varphi\rangle \ge 0 \;\forall \varphi\ge 0$, $\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$.

Kontrolní otázky

1) Je $\langle f,\varphi\rangle := \varphi^{(3)}(0)$ distribuce? NE

2) Je $\langle f,\varphi\rangle := \sum_{n=1}^{\infty} \varphi^{(n)}(n)$ distribuce? ANO

$\boxed{\text{KONSISTENCE DERIVACÍ}}$

Nechť $f, \frac{\partial f}{\partial x_k}$ jsou spojité v Ω. Ztotožníme f s $T_f \in \mathcal{D}'$ a uvažujme $\frac{\partial T_f}{\partial x_k}$. Platí pak, že $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ a $\frac{\partial T_f}{\partial x_k}$ se rovnají v distributivním smyslu? Odpověď je kladná. Důkaz:

pro $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ a $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ platí

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_k}\varphi \, dx = -\int_\Omega f \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \, dx$$

integrací per-partes vzhledem k proměnné x_k.

pro T_f platí

$$\left\langle \frac{\partial T_f}{\partial x_k}, \varphi \right\rangle = -\left\langle T_f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right\rangle.$$

Avšak f je regulární distribuce, tak $\left\langle T_f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right\rangle = \int_\Omega f \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \, dx$

Tedy s předchozím plyne

$$\left\langle \frac{\partial T_f}{\partial x_k}, \varphi \right\rangle = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_k}\varphi \, dx$$

což znamená, že $\frac{\partial T_f}{\partial x_k}$ je regulární distribuce a $T_{\frac{\partial f}{\partial x_k}}$, což jsme chtěli ukázat.

Ještě jedna poznámka k regulárním distribucím.

- Pokud $f, g \in L^1_{loc}$ a $f = g$ s.v. v Ω, pak $T_f = T_g$ v $\mathcal{D}'$.
- Naopak jsou-li T, U dvě regulární distribuce takové, že $T = U$ v $\mathcal{D}'$, pak ($T = T_f$ a $U = U_g$) $f = g$ s.v.

Ověření: $T_f = U_g$ v $\mathcal{D}'$ $\Rightarrow$ $\int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx = \int_\Omega g(x)\varphi(x)\,dx$ $\forall \varphi \in \mathcal{D}$

to ale implikuje $\int [f(x) - g(x)]\varphi(x)\,dx = 0$

tedy $f = g$ s.v. v Ω.

Derivace jsou konsistentní pro širší třídu funkcí, viz následující:

$\boxed{\text{Věta 3.1}}$ Nechť $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ a

$$g(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h e_k) - f(x)}{h}$$ existuje a je spojitá vyjma

bodu y a $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Potom:

je-li $d \geq 2$, pak $\frac{\partial T_f}{\partial x_k} = g = T_{\frac{\partial f}{\partial x_k}}$ v $\mathcal{D}'$

je-li $d = 1$, pak $\frac{\partial T_f}{\partial x_k} = T_{\frac{\partial f}{\partial x_k}}$ v $\mathcal{D}'$ jen pokud f je spojitá v y

$\boxed{\text{POUČENÍ}}$ V $d=1$, jsou funkce se skokovou nespojitostí problém, neboť jejich distributivní derivace má regulární část.
Naopak, v $d \geq 2$, nespojitost v jednom bodě není problém, ačkoli v $d=2$, skoková nespojitost na křivce (úsečce) by byl problém.

Dk V dvou spec. případech.

ⓐ $\boxed{d=1, y=0}$ $\left\langle \frac{d}{dx} T_f, \varphi \right\rangle = -\langle T_f, \varphi' \rangle$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ -\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \cdots - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \cdots \right\}$$

per partes $= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} g(x)\varphi(x) + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} g(x)\varphi(x) + \lim \left[f(\varepsilon)\varphi(\varepsilon) - f(-\varepsilon)\varphi(-\varepsilon) \right]$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\varphi(x) + \left[f(0+) - f(0-) \right] \varphi(0)$$

$$= \langle T_{g = f'}, \varphi \rangle + \underbrace{\left[f(0+) - f(0-) \right] \varphi(0)}_{= 0 \text{ pokud } f(0+) = f(0-).}$$

ⓑ $\boxed{d = 2, \frac{\partial}{\partial x_1}}$ $f(x_1, x_2)$ je spojitě diferencovatelná dle x_1 vyjma $(x_1, x_2) = (0, 0)$

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_1} T_f, \varphi \right\rangle = -\left\langle T_f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right\rangle = -\int_{\mathbb{R}^2} f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\,dx$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x_1, x_2)\,dx_1 \right) dx_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{g(x_1, x_2)}_{= \frac{\partial f}{\partial x_1}} \varphi(x_1, x_2)\,dx_1 \right) dx_2$$

$$= \left\langle T_{\frac{\partial f}{\partial x_1}}, \varphi \right\rangle \text{ pro libovolné } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2).$$

Příklady na procvičení

① Buď $H(x) = \begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$ (Heavisideova fce) v 0 lze definovat libovolně.

Ukažte, že

- $H \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$
- $\langle \frac{d}{dx} T_H, \varphi \rangle \left(= \langle H', \varphi \rangle\right) = \langle \delta, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

neboli $\boxed{H' = \delta \quad \text{v } \mathcal{D}'}$

② $\langle \delta^{(k)}, \varphi \rangle = (-1)^k \varphi^{(k)}(0)$

③ Buď $f \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, $f' \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ a $\exists$ vlastní $f(0+)$ a $f(0-)$. Pak

$$T_f' = \underline{\underline{f'}} = \underline{[f(0+) - f(0+)]\,\delta + T_{f'}} \quad \text{v } \mathcal{D}'$$

④ Buď $f(x) = \log|x|$. Pak ukažte, že

- $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$
- $(T_f)' = T_{v.p.\frac{1}{x}}$ v $\mathcal{D}'$
- $(T_f)'' = -T_{v.p.\frac{1}{x^2}}$ v $\mathcal{D}'$.