Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale přesně odůvodněte. V případě studia číselných řad doslovně uveďte jaké kritérium používáte při studiu konvergence. Ve výpočtech můžete bez dalšího komentáře používat známé výsledky ohledně konvergence řad $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$, vlastnosti řad $\sum_{n=1}^{N} \sin(nx)$, $\sum_{n=1}^{N} \cos(nx)$, a dále Taylorovy rozvoje elementárních funkcí.

Jméno: ______________________________

Příklad	1	2	3	4	5	6	**Celkem bodů**
Bodů	7	6	6	5	6	6	36
Získáno							

[7] 1. Najděte hodnoty parametrů a_0, a_1, a_2 a a_3 tak, aby pro $x \to 0$ platilo

$$\frac{\sin\left(1-\sqrt{1-x}\right) - \sin\left(1-\sqrt{1+x}\right)}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + o\left(x^3\right).$$

Řešení:

Povšimneme si, že funkce

$$f(x) =_{\mathrm{def}} \frac{\sin\left(1-\sqrt{1-x}\right) - \sin\left(1-\sqrt{1+x}\right)}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$$

je sudá funkce, aneb $f(x) = f(-x)$. Z toho okamžitě plyne, že $a_1 = 0$ a $a_3 = 0$. Polovinu příkladu tedy máme vyřešenou! Nyní použijeme známé Taylorovy rozvoje pro $\sin z$ a $\sqrt{1+z}$ pro $z \to 0$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + o\left(z^3\right),$$

$$\sqrt{1+z} = 1 + \frac{z}{2} - \frac{z^2}{8} + \frac{z^3}{16} + o\left(z^3\right).$$

Jest tedy

$$\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x} = \left(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}\right) - \left(1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{16}\right) + o\left(x^3\right) = x + \frac{x^3}{8} + o\left(x^3\right),$$

a dále

$$\begin{aligned}
\sin\left(1-\sqrt{1+x}\right) &= \sin\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{16}+o\left(x^3\right)\right) \\
&= \left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{16}+o\left(x^3\right)\right) - \frac{\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{16}+o\left(x^3\right)\right)^3}{3!} + o\left(x^3\right) \\
&= \left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{16}+o\left(x^3\right)\right) - \frac{-\left(\frac{x}{2}\right)^3 + o\left(x^3\right)}{3!} = -\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{24}+o\left(x^3\right),
\end{aligned}$$

z čehož plyne, že

$$\sin\left(1-\sqrt{1-x}\right) = \frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{24}+o\left(x^3\right)$$

a následně tedy

$$\sin\left(1-\sqrt{1-x}\right) - \sin\left(1-\sqrt{1+x}\right) = x + \frac{x^3}{12} + o\left(x^3\right).$$

(Jak se dalo očekávat, sudé mocniny vymizely.) Vrátíme se nyní k původnímu zlomku, a vidíme, že potřebujeme a_0, a_1, a_2 a a_3 tak, aby pro $x \to 0$ platilo

$$\frac{x + \frac{x^3}{12} + o\left(x^3\right)}{x + \frac{x^3}{8} + o\left(x^3\right)} = a_0 + a_2 x^2 + o\left(x^3\right).$$

Po přenásobení tedy dostaneme požadavek

$$x + \frac{x^3}{12} + o\left(x^3\right) = \left(a_0 + a_2 x^2 + o\left(x^3\right)\right)\left(x + \frac{x^3}{8} + o\left(x^3\right)\right),$$

což za použití pravidel pro práci se symbolem $o\left(x^3\right)$ vede na

$$x + \frac{x^3}{12} + o\left(x^3\right) = a_0 x + \left(a_2 + \frac{a_0}{8}\right) x^3 + o\left(x^3\right),$$

z čehož plyne, že

$$a_0 = 1, \qquad a_2 = -\frac{1}{24}.$$

(Srovnali jsme koeficienty u jednotlivých mocnin.) Odpověď na položenou otázku tedy je, že koeficienty musíme volit takto $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = -\frac{1}{24}$ a $a_3 = 0$.

[6] 2. Uvažujte funkci $f(x,y) =_{\text{def}} \frac{2(x-1)^{\frac{1}{3}} y}{(x-1)^2+y^2}$.

a) Spočtěte limitu

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{2(x-1)^{\frac{1}{3}} y}{(x-1)^2+y^2}$$

či v jiném značení limitu $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \frac{2(x-1)^{\frac{1}{3}} y}{(x-1)^2+y^2}$, kde $\boldsymbol{a} =_{\text{def}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. *Případně ukažte, že limita neexistuje.*

b) Spočtěte derivaci funkce $f(\boldsymbol{x})$ v bodě $\boldsymbol{x}_0 =_{\text{def}} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ ve směru $\boldsymbol{v} =_{\text{def}} \begin{bmatrix} \mathrm{e} \\ 2 \end{bmatrix}$.

c) Spočtěte totální diferenciál funkce $f(\boldsymbol{x})$ v bodě $\boldsymbol{x}_1 =_{\text{def}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Řešení:

Nejprve vyzkoušíme, jak se zkoumaná limita chová v případě, že se k bodu $\boldsymbol{a}$ blížíme po přímkách. Volme kupříkladu

$$\begin{aligned} x &= 1 + ks, \\ y &= s, \end{aligned}$$

kde $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ je konstanta a s je parametr, který konverguje k nule zprava. Pokud limita ze zadání existuje, tak platí

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \frac{2(x-1)^{\frac{1}{3}} y}{(x-1)^2+y^2} = \lim_{s\to 0+} \frac{2(ks)^{\frac{1}{3}} s}{(1+k^2)s^2} = \lim_{s\to 0+} \frac{2k}{1+k^2} s^{-\frac{2}{3}} = \begin{cases} +\infty, & k > 0, \\ -\infty, & k < 0, \end{cases},$$

z čehož plyne, že hodnota limity závisí na volbě konstanty k. Limita ze zadání tudíž *neexistuje.* (Pokud by existovala limita

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \frac{2(x-1)^{\frac{1}{3}} y}{(x-1)^2+y^2},$$

tak by musela být určená jednoznačně. Pro limity po různých přímkách bychom tedy museli dostat *stejný* výsledek, což evidentně není pravda.)

V bodě $\boldsymbol{x}_0$ má zkoumaná funkce zjevně spojité parciální derivace, směrovou derivaci tudíž nemusíme počítat z definice, ale můžeme využít vztahu

$$\partial_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{x}_0) = \left(\nabla f(\boldsymbol{x})\right)\Big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} \bullet \boldsymbol{v} = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} \bullet \begin{bmatrix} \mathrm{v}_1 \\ \mathrm{v}_2 \end{bmatrix}.$$

Jest

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}} y\left[(x-1)^2+y^2\right] - 2(x-1)^{\frac{1}{3}} y[2(x-1)]}{((x-1)^2+y^2)^2} \\ \frac{2(x-1)^{\frac{1}{3}}\left[(x-1)^2+y^2\right] - 2(x-1)^{\frac{1}{3}} y[2y]}{((x-1)^2+y^2)^2}, \end{bmatrix}$$

což v našem konkrétním případě znamená, že

$$\partial_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{x}_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \bullet \frac{1}{\sqrt{4+\mathrm{e}^2}} \begin{bmatrix} \mathrm{e} \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{4}{\sqrt{4+\mathrm{e}^2}}.$$

Kde jsme ještě provedli normování vektoru $\boldsymbol{v}$, tak aby $\|\boldsymbol{v}\|_{2,\mathbb{R}^2} = 1$.

V bodě $\boldsymbol{x}_0$ má zkoumaná funkce zjevně spojité parciální derivace, totální diferenciál tudíž nemusíme počítat z definice, ale můžeme využít vztahu

$$\mathrm{d} f(\boldsymbol{x}_1) = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1},$$

což v našem případě znamená, že

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2\,(-1)^{\frac{1}{3}} \end{bmatrix}.$$

Výsledek lze také zapsat jako

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{h} = -2\mathrm{h}_2,$$

kde $\boldsymbol{h} = \begin{bmatrix} \mathrm{h}_1 \\ \mathrm{h}_2 \end{bmatrix}$ je libovolný vektor z $\mathbb{R}^2$.

[6] 3. Rozhodněte, zda je řada

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n} \left(3 + (-1)^n\right)$$

neabsolutně konvergentní.

Řešení:

Pozor, posloupnost $\frac{3+(-1)^2}{n}$ sice konverguje k nule, ale není monotónní! Nesmíme tedy podlehnout pokušení použít Dirichletovo kritérium s volbou $a_n = \sin n$ a $b_n = \frac{3+(-1)^2}{n}$.
Na úrovni částečných součtů však můžeme psát

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin n}{n} \left(3 + (-1)^n\right) = 3 \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin n}{n} + \sum_{n=1}^{N} (-1)^n \frac{\sin n}{n}.$$

První suma je ovšem N-tým částečným součtem konvergentní řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n}$. (Posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde $a_n = \sin n$, je omezená, posloupnost $b_n = \frac{1}{n}$ konverguje k nule a je monotónní. Podle Dirichletova kritéria je tedy $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n}$ konvergentní řada.) Zkoumejme druhý člen. Jest

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} (-1)^n \frac{\sin n}{n} = \sum_{n=1}^{N} \cos\left(n\pi\right) \frac{\sin n}{n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin\left(n\left(\pi+1\right)\right) - \sin\left(n\left(\pi-1\right)\right)}{n} &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin\left(n\left(\pi+1\right)\right) - \sin\left(n\left(\pi-1\right)\right)}{n} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin\left(n\left(\pi+1\right)\right)}{n} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin\left(n\left(\pi-1\right)\right)}{n}.\end{aligned}$$

(V případě, že si nepamatujeme vzorce pro goniometrické funkce, pracujeme s komplexní exponenciálou. Je to dokonce kratší.) Obě řady na pravé straně jsou konvergentní. (Posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde $a_n = \sin\left(n\left(\pi+1\right)\right)$, je omezená, posloupnost $b_n = \frac{1}{n}$ konverguje k nule a je monotónní. Podle Dirichletova kritéria je tedy $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n(\pi+1))}{n}$ konvergentní řada. Stejný argument použijeme i pro druhou řadu.) Vidíme tedy, že původní řadu lze na úrovni částečných součtů — nic jsme nepřerovnali — napsat jako součet tří konvergentních řad, a proto je i původní řada konvergentní.

[5] 4. Uvažujte obyčejnou diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + 2y = \mathrm{e}^{-ax} \sin\left(bx\right).$$

Najděte hodnoty parametrů $a \in \mathbb{R}$ a $b \in \mathbb{R}$ tak, aby řešení diferenciální rovnice zůstalo *omezené* na $\mathbb{R}$. Vaši volbu parametrů *důkladně* odůvodněte!

Řešení:

Jedná se o lineární obyčejnou diferenciální rovnici s konstantními koeficienty a speciální pravou stranou. Řešení je tedy součtem partikulárního řešení a řešení homogenní rovnice (rovnice s nulovou pravou stranou). Najdeme si řešení homogenní rovnice. Charakteristický polynom je

$$\lambda^2 + 2 = 0,$$

odkud vidíme, že

$$\lambda_{1,2} = \pm \mathrm{i}\sqrt{2},$$

a řešení homogenní rovnice je tudíž lineární kombinací funkcí $\sin\left(x\sqrt{2}\right)$ a $\cos\left(x\sqrt{2}\right)$, aneb

$$y_{\mathrm{hom}} = C_1 \sin\left(x\sqrt{2}\right) + C_2 \cos\left(x\sqrt{2}\right).$$

Řešení homogenní rovnice je zjevně pro jakoukoliv volbu konstant C_1 a C_2 omezená funkce na $\mathbb{R}$. Zbývá tedy zjistit jak se chová partikulární řešení.

Pravá strana je ve speciálním tvaru, tudíž partikulární řešení budeme hledat ve speciálním tvaru. Připomeňme si, že kořeny charakteristické rovnice jsou

$$\lambda_{1,2} = \pm \mathrm{i}\sqrt{2} = u \pm \mathrm{i}v,$$

kde $u = 0$ a $v = \sqrt{2}$. Je-li pravá strana ve tvaru

$$\mathrm{e}^{-ax} \sin(bx), \qquad a \neq 0,$$

pak hledáme partikulární řešení ve tvaru

$$y_{\text{spec}} = A_1 \mathrm{e}^{-ax} \sin(bx) + A_2 \mathrm{e}^{-ax} \cos(bx),$$

a to proto, že komplexní číslo $a + \mathrm{i}b$ *není* kořenem charakteristického polynomu. (Alespoň jedna z konstant A_1 a A_2 bude nenulová.) Toto partikulární řešení tedy nebude nikdy *omezené* na $\mathbb{R}$. (Pokud je $a > 0$ dostaneme exponenciální růst pro záporná x a naopak.)

Nyní musíme prozkoumat možnost $a = 0$. Je-li pravá strana ve tvaru

$$\sin(bx),$$

pak musíme pečlivě diskutovat volbu parametru b. Je-li $b \neq \pm\sqrt{2}$, pak komplexní číslo $a + \mathrm{i}b$ *není* kořenem charakteristického polynomu, a partikulární řešení hledáme ve tvaru

$$y_{\text{spec}} = A_1 \sin(bx) + A_2 \cos(bx).$$

Toto řešení je zjevně omezené na $\mathbb{R}$. Byli jsme tedy úspěšní v tom smyslu, že hodnoty $a = 0$ a $b \in \mathbb{R} \setminus \left\{\pm\sqrt{2}\right\}$ vedou na omezené řešení dané diferenciální rovnice.

Zbývá diskutovat možnost $a = 0$ a $b = \pm\sqrt{2}$. V tomto případě je komplexní číslo $a + \mathrm{i}b$ *jednonásobným* kořenem charakteristického polynomu, a partikulární řešení tedy hledáme ve tvaru

$$y_{\text{spec}} = A_1 x \sin(bx) + A_2 x \cos(bx),$$

přičemž alespoň jedna z konstant A_1 a A_2 bude nenulová. Partikulární řešení tedy zjevně nebude omezené.

Závěrem našeho rozboru tedy je, že omezené řešení na $\mathbb{R}$ získáme pouze v případě, že $a = 0$ a $b \in \mathbb{R} \setminus \left\{\pm\sqrt{2}\right\}$. Konkrétní hodnoty konstant A_1 a A_2 *není* nutné dopočítat, na to se nás nikdo neptal. Pokud bychom ovšem chtěli nalézt řešení, není to samozřejmě problém,

$$y = C_1 \sin\left(x\sqrt{2}\right) + C_2 \cos\left(x\sqrt{2}\right) + \frac{1}{8}\left(-2x\sqrt{2}\cos\left(x\sqrt{2}\right) + \sin\left(2x\sqrt{2}\right)\cos\left(x\sqrt{2}\right) - \sin\left(x\sqrt{2}\right)\cos\left(2x\sqrt{2}\right)\right).$$

[6] 5. a) Napište rovnici tečné roviny ke *grafu* funkce $f : \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ v bodě

$$\boldsymbol{a} =_{\text{def}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix},$$

přičemž funkce f je dána předpisem

$$f(\boldsymbol{x}) =_{\text{def}} x + 3y^2,$$

aneb napište rovnici tečné roviny k ploše S popsané jako $S = \left\{\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{R}^3 \middle| z = f(x,y)\right\}$.

b) Uvažujte funkci $f(\boldsymbol{x}) =_{\text{def}} x + 3y^2$. (Stejná funkce jako v předchozím bodě.) Najděte maximum, pokud existuje, této funkce na množině $M = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \middle| x \leq 0, -1 \leq y \leq 1\right\}$. Případně odůvodněte, že maximum neexistuje.

Řešení:

Rovnici tečné roviny ke grafu funkce $f : \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ v bodě

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

lze s pomocí totálního diferenciálu zapsat jako

$$z = f(\boldsymbol{x})|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}_{\mathbb{R}^2}} + \mathrm{d}f(\boldsymbol{x})|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}_{\mathbb{R}^2}}\left[\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}_{\mathbb{R}^2}\right],$$

kde jsme označili

$$\boldsymbol{a}_{\mathbb{R}^2} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}.$$

(Připomeňte si, že z definice totálního diferenciálu víme, že $f(\boldsymbol{x})|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}_{\mathbb{R}^2}} + \mathrm{d}f(\boldsymbol{x})|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}_{\mathbb{R}^2}} [\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}_{\mathbb{R}^2}]$ je nejlepší lineární aproximace funkce $f(\boldsymbol{x})$ na okolí bodu $\boldsymbol{a}_{\mathbb{R}^2}$.) Případně lze použít gradient

$$z = f(\boldsymbol{x})|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}_{\mathbb{R}^2}} + \nabla f(\boldsymbol{x})|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}_{\mathbb{R}^2}} \bullet (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}_{\mathbb{R}^2}).$$

Rozepíšeme-li obě jmenované rovnice, dostaneme

$$z = f(\boldsymbol{x})|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}_{\mathbb{R}^2}} + \left.\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{x})\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}_{\mathbb{R}^2}} (x - a_1) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{x})\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}_{\mathbb{R}^2}} (y - a_2).$$

Spočteme parciální derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{x}) = 1,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{x}) = 6y,$$

a po dosazení dostaneme

$$z = 4 + (x - 1) + 6(y - 1),$$

což je hledaná rovnice tečné roviny.

Maximum funkce $f(\boldsymbol{x})$ najdeme jednoduchou úvahou. Zkuste si funkci f a množinu M představit. (Pozor, množina M není omezená, a tedy není kompaktní. Maximum funkce $f(\boldsymbol{x})$ na uvažované množině tedy nemusí existovat.) Je-li y_{fix} libovolné ale pevné číslo z intervalu $[-1, 1]$, pak $f(\boldsymbol{x}) = x + 3y_{\text{fix}}^2$ zjevně nabývá maxima vůči proměnné x pro $x = 0$. (Pohybujeme se na množině M.) Maximum má pak hodnotu $3y_{\text{fix}}^2$. Nyní se podíváme, jakou maximální hodnotu může nabývat funkce $3y_{\text{fix}}^2$ pro $y_{\text{fix}} \in [-1, 1]$. Maxima se zjevně nabývá pro $y_{\text{fix}} = \pm 1$. Celou diskusi proto můžeme uzavřít kontatováním, že funkce f nabývá na množině M maxima o hodnotě 3, přičemž maximum se nabývá v bodech $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 & \pm 1 \end{bmatrix}^\top$.

[6] 6. Uvažujte funkce $y_1(x_1, x_2, x_3)$ a $y_2(x_1, x_2, x_3)$, které jsou jakožto funkce proměnných x_1, x_2 a x_3, zadány implicitně soustavou rovnic

$$2\mathrm{e}^{y_1} + y_2 x_1 - 4x_2 + 2 = 0,$$
$$y_2 \cos y_1 - 6y_1 + 2x_1 - x_3 = 0.$$

Vypočtěte $\frac{\partial y_1}{\partial x_1}$ a $\frac{\partial y_2}{\partial x_1}$ v bodě $x_1^0 = 0$, $x_2^0 = 1$, $x_3^0 = 1$. (Pro úplnost zdůrazňuji, že řešením úlohy jsou dvě čísla – číslené hodnoty derivací $\frac{\partial y_1}{\partial x_1}$ a $\frac{\partial y_2}{\partial x_1}$ v příslušném bodě.)

Řešení:

K zodpovězení otázky použijeme větu o implicitních funkcích. Označme si

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

a dále

$$\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{y}_0 = \begin{bmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{bmatrix}$$

a konečně

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \begin{bmatrix} F_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \\ F_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\mathrm{e}^{y_1} + y_2 x_1 - 4x_2 + 2 \\ y_2 \cos y_1 - 6y_1 + 2x_1 - x_3 \end{bmatrix}.$$

Nejprve najdeme bod $\boldsymbol{y}_0$, který společně s $\boldsymbol{x}_0$ řeší rovnici

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) = \boldsymbol{0},$$

aneb chceme, aby platilo

$$\begin{bmatrix} 2\mathrm{e}^{y_1^0} + y_2^0 x_1^0 - 4x_2^0 + 2 \\ y_2^0 \cos y_1^0 - 6y_1^0 + 2x_1^0 - x_3^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

což po dosazení za $\boldsymbol{x}_0$ vede na soustavu rovnic

$$\begin{bmatrix} 2\mathrm{e}^{y_1^0} - 2 \\ y_2^0 \cos y_1^0 - 6y_1^0 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

což dává

$$\boldsymbol{y}_0 = \begin{bmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Připomeneme si formální výpočet dle věty o implicitních funkcích. Je-li $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{0}$, pak

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{x}} + \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{y}} \frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0},$$

odkud

$$\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}} = -\left[\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{y}}\right]^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{x}},$$

přičemž jsme použili značení

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \frac{\partial F_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \end{bmatrix}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{y}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{bmatrix}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_3} \end{bmatrix}.$$

V našem konkrétním případě dostaneme

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} y_2 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{y}} = \begin{bmatrix} 2\mathrm{e}^{y_1} & x_1 \\ -y_2 \sin y_1 - 6 & \cos y_1 \end{bmatrix}.$$

Zajímají nás hodnoty v bodě $\boldsymbol{x}_0$. (Připomeňme si, že $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{y}_0$.) Po dosazení dostaneme

$$\left.\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \left.\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{y}}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \left.\left[\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{y}}\right]^{-1}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}.$$

Připomeňme si, že inverzi matice 2×2 lze spočíst pouhým pohledem, je-li $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ invertibilní matice, pak je $\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbb{A}} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$. (Příslušná říkanka zní "zaměň prvky na diagonále, u prvků mimo diagonálu změň znaménko, a pak všechno vyděl determinantem".) Požadované derivace najdeme dosazením do vztahu

$$\left.\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} = -\left.\left[\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{y}}\right]^{-1}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} \left.\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0}$$

což dává

$$\left.\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 10 & -24 & -2 \end{bmatrix}$$

a proto

$$\left.\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} = -\frac{1}{2},$$
$$\left.\frac{\partial y_2}{\partial x_1}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} = -5.$$