Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale co nejpřesněji odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte ověřit splnění předpokladů.

Jméno a příjmení: ______________________________

Příklad	1	2	3	4	**Celkem bodů**
Bodů	6	10	10	10	36
Získáno					

[6] 1. Budiž dána funkce

$$f(z) = \frac{\sin z}{(z-2)^2}.$$

V bodě $z_0 = 2$:

a) určete typ singularity,

b) najděte Laurentovu řadu funkce $f(z)$,

c) spočtěte reziduum.

[10] 2. Připomeňte si Cauchyho vzorec

$$f(\mathbb{A}) =_{\mathrm{def}} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma} (\zeta \mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1} f(\zeta) \, \mathrm{d}\zeta,$$

kde f je holomorfní funkce definovaná na $\mathbb{C}$ a $\mathbb{A}$ je daná matice. S použitím Cauchyho vzorce spočtěte $\sin \mathbb{A}$, kde $\mathbb{A}$ je matice definovaná jako

$$\mathbb{A} =_{\mathrm{def}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

[10] 3. Uvažujte posloupnost distribucí $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ definovanou jako

$$f_n(x) = \frac{1}{\pi} \frac{n}{\mathrm{e}^{nx} + \mathrm{e}^{-nx}}.$$

(Přesněji uvažujeme posloupnost regulárních distribucí definovaných příslušnými funkcemi.) Najděte limitu

$$f = \lim_{n \to +\infty} f_n$$

této posloupnosti, aneb spočtěte

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\pi} \frac{n}{\mathrm{e}^{nx} + \mathrm{e}^{-nx}},$$

přičemž limitou se myslí *limita posloupnosti ve smyslu distribucí*. Přesně specifikujte v jaké smyslu je konvergence definována.

[10] 4. Pro $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ řešte s použitím Fourierovy transformace rovnici

$$\frac{\mathrm{d}^4 f}{\mathrm{d}x^4} + k^4 f = \delta,$$

kde δ je Diracova distribuce v nule a $k \in \mathbb{R}^+$ je konstanta. (Pozor, specifikace prostoru, ve kterém hledáte řešení, zde není jen pro okrasu, je to zásadní informace.)