Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale přesně odůvodněte. V případě studia číselných řad doslovně uveďte jaké kritérium používáte při studiu konvergence. Ve výpočtech můžete bez dalšího komentáře používat známé výsledky ohledně konvergence řad $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$, vlastnosti řad $\sum_{n=1}^{N} \sin(nx)$, $\sum_{n=1}^{N} \cos(nx)$, a dále Taylorovy rozvoje elementárních funkcí.

Jméno: ______________________________

Příklad	1	2	3	4	5	6	**Celkem bodů**
Bodů	7	6	6	5	6	6	36
Získáno							

[7] 1. Určete $a \in \mathbb{R}$ tak, aby limita

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)\sin(2x) - (\mathrm{e}^{ax}-1)^2}{x^3}$$

existovala a byla konečná. (To jest aby bylo $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, kde $L \in \mathbb{R}$.) Určete hodnotu limity pokud jsou splněny vámi určená omezení na konstantu a.

Řešení:

Využijeme známé Taylorovy rozvoje pro funkce $\ln(1+x)$, $\sin x$ a e^x v okolí $x = 0$, jest

$$\begin{aligned}
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right), \\
\sin x &= x + o\left(x^2\right), \\
\mathrm{e}^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + o\left(x^2\right).
\end{aligned}$$

Po dosazení dostaneme

$$\begin{aligned}
\ln(1+x)\sin(2x) - (\mathrm{e}^{ax}-1)^2 &= \left(x - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)\right)\left(2x + o\left(x^2\right)\right) - \left(ax + \frac{a^2x^2}{2!} + o\left(x^2\right)\right)\left(ax + \frac{a^2x^2}{2!} + o\left(x^2\right)\right) \\
&= \left(2 - a^2\right)x^2 - \left(1 + a^3\right)x^3 + o\left(x^3\right),
\end{aligned}$$

odkud plyne požadavek na hodnotu konstanty $a = \pm\sqrt{2}$ a následně hodnota limity $-(1+a^3) = -(1 \pm 2\sqrt{2})$.

[6] 2. Buď dána funkce $f : \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \dfrac{3y\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}}{y^2 + \mathrm{e}^{-\frac{2}{x^2}}}, & \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}, \\ 0, & \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}. \end{cases}$$

a) Spočtěte $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{0}} f(\boldsymbol{x})$ po paprscích $x = s$, $y = ks$, kde k je libovolné reálné číslo a $s \to 0+$. Lze na základě tohoto výsledku říci něco o limitě $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{0}} f(\boldsymbol{x})$ a o spojitosti funkce $f(\boldsymbol{x})$?

b) Spočtěte $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{0}} f(\boldsymbol{x})$ po libovolných křivkách ve tvaru $x = s$, $y = s^{\frac{m}{n}}$, kde m, n jsou libovolná přirozená čísla a $s \to 0+$. Lze na základě tohoto výsledku říci něco o limitě $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{0}} f(\boldsymbol{x})$ a o spojitosti funkce $f(\boldsymbol{x})$?

c) Spočtěte $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{0}} f(\boldsymbol{x})$ po křivce $x = s$, $y = \mathrm{e}^{-\frac{1}{s^2}}$ kde $s \to 0+$. Lze na základě tohoto výsledku říci něco o limitě $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{0}} f(\boldsymbol{x})$ a o spojitosti funkce $f(\boldsymbol{x})$?

Řešení:

Spočteme požadované limity. Jest

$$\lim_{s\to 0+} \frac{3ks\mathrm{e}^{-\frac{1}{s^2}}}{\mathrm{e}^{-\frac{2}{s^2}} + k^2 s^2} = \lim_{s\to 0+} \frac{3ks\mathrm{e}^{-\frac{1}{s^2}}}{\mathrm{e}^{-\frac{2}{s^2}}\left(1 + k^2 s^2 \mathrm{e}^{\frac{2}{s^2}}\right)} = 3 \lim_{s\to 0+} \frac{ks\mathrm{e}^{\frac{1}{s^2}}}{1 + \left(ks\mathrm{e}^{\frac{1}{s^2}}\right)^2} = 0.$$

Zatím víme, že pokud limita $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{0}} f(\boldsymbol{x})$ existuje, tak její hodnota může být jedině nula. Dále

$$\lim_{s\to 0+} \frac{3s^{\frac{m}{n}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{s^2}}}{\mathrm{e}^{-\frac{2}{s^2}} + s^{2\frac{m}{n}}} = \lim_{s\to 0+} \frac{3s^{\frac{m}{n}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{s^2}}}{\mathrm{e}^{-\frac{2}{s^2}}\left(1 + s^{2\frac{m}{n}}\mathrm{e}^{\frac{2}{s^2}}\right)} = 3 \lim_{s\to 0+} \frac{s^{\frac{m}{n}}\mathrm{e}^{\frac{1}{s^2}}}{1 + \left(s^{\frac{m}{n}}\mathrm{e}^{\frac{1}{s^2}}\right)^2} = 0.$$

(V obou výpočtech jsme užili skutečnosti, že pro libovolná přirozená čísla m a n platí $\lim_{s\to 0+} s^{\frac{m}{n}}\mathrm{e}^{\frac{1}{s^2}} = +\infty$.) Zatím víme, že pokud limita $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{0}} f(\boldsymbol{x})$ existuje, tak její hodnota může být jedině nula. Spočteme poslední požadovanou limitu

$$\lim_{s\to 0+} \frac{3\mathrm{e}^{-\frac{1}{s^2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{s^2}}}{\mathrm{e}^{-\frac{2}{s^2}} + \mathrm{e}^{-\frac{2}{s^2}}} = \lim_{s\to 0+} \frac{3\mathrm{e}^{-\frac{2}{s^2}}}{\mathrm{e}^{-\frac{2}{s^2}} + \mathrm{e}^{-\frac{2}{s^2}}} = \frac{3}{2}.$$

Zjistili jsme tedy, že pokud limita $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{0}} f(\boldsymbol{x})$ existuje, pak její hodnota může být jedině $\frac{3}{2}$. To ve spojení s předchozími výsledky vede k tomu, že limita $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{0}} f(\boldsymbol{x})$ neexistuje.

[6] 3. Zjistěte, zda konverguje řada

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1 + \cos(n\pi)}{\sqrt{n}}.$$

(Vyšetřete absolutní i neabsolutní konvergenci.)

Řešení:

Uvědomíme si, že $\cos n\pi = (-1)^n$, což znamená, že

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1 + \cos(n\pi)}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1 + (-1)^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

První řada na pravé straně je neabsolutně konvergentní, zatímco druhá řada je řada s kladnými členy, která je divergentní. Původní řada je tudíž *divergentní*.

[5] 4. Najděte obecné řešení obyčejné diferenciální rovnice

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 = 2y^2,$$

a dále najděte všechna maximální řešení, která prochází bodem $x = 0$ a $y = 1$.

Řešení:

Povšimneme si, že $y = 0$ je řešení rovnice a pokusíme se najít další řešení. Nejprve obě strany rovnice odmocníme, což vede na rovnici

$$\left|\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right| = \sqrt{2}\,|y|\,.$$

Absolutní hodnotu odstraníme rozborem všech možných případů. Uvažujme nejprve situaci $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} > 0$ a $y > 0$, rovnice přejde na rovnici $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y\sqrt{2}$, a v tomto případě je tedy řešením funkce

$$y = C\mathrm{e}^{x\sqrt{2}},$$

kde C je kladná konstanta. (Potřebujeme $y > 0$, proto volíme $C > 0$.) V případě $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} > 0$ a $y < 0$ je řešením rovnice funkce

$$y = C\mathrm{e}^{-x\sqrt{2}},$$

kde C je záporná konstanta. (Tentokrát jsme řešili rovnici $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -y\sqrt{2}$.) Obdobným způsobem provedeme diskusi pro zbývající možnosti $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} < 0$, $y > 0$ a $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} < 0$, $y < 0$. Celkem zjistíme, že řešením rovnice je jakákoliv funkce ve tvaru

$$y = A\mathrm{e}^{x\sqrt{2}}$$

nebo ve tvaru

$$y = A\mathrm{e}^{-x\sqrt{2}},$$

kde $A \in \mathbb{R}$ je konstanta. (Tento zápis zahrnuje i triviální řešení $y = 0$.)

Hledáme-li řešení procházející bodem $x = 0$ a $y = 1$, dostaneme z výše uvedené rozvahy *právě dvě maximální řešení*

$$y_1 = \mathrm{e}^{x\sqrt{2}}, \qquad x \in (-\infty, \infty),$$

$$y_2 = \mathrm{e}^{-x\sqrt{2}}, \qquad x \in (-\infty, \infty).$$

[6] 5. Uvažujte funkci $f(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ zadanou předpisem

$$f(\boldsymbol{x}) = \left(x^2 + ay^2\right) \mathrm{e}^{-\left(x^2+y^2\right)}.$$

- Pro volbu $a = 1$ najděte body podezřelé z extrému a najděte lokální minima/maxima funkce f.
- Pro volbu $a = 0$ najděte body podezřelé z extrému a najděte lokální minima/maxima funkce f.
- Pro volbu $a = -1$ najděte body podezřelé z extrému a najděte lokální minima/maxima funkce f.

Vaše zjištění pečlivě odůvodněte.

Řešení:

Body podezřelé z extrému jsou body, ve který je nulový gradient. Chceme tedy řešit rovnice

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Pro klasifikaci bodů podezřelých z extrému bude užitečná matice druhých derivací,

$$\nabla^2 f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{bmatrix}.$$

V našem případě je

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 2x\mathrm{e}^{-\left(x^2+y^2\right)} - 2x\left(x^2+ay^2\right)\mathrm{e}^{-\left(x^2+y^2\right)} \\ 2ay\mathrm{e}^{-\left(x^2+y^2\right)} - 2y\left(x^2+ay^2\right)\mathrm{e}^{-\left(x^2+y^2\right)} \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x\left(1-\left(x^2+ay^2\right)\right) \\ y\left(a-\left(x^2+ay^2\right)\right) \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-\left(x^2+y^2\right)}.$$

(Počítáme stále s obecným $a \in \mathbb{R}$.) Spočteme matici druhých derivací

$$\nabla^2 f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 2\left(1-\left(x^2+ay^2\right)\right) - 4x^2\left(2-\left(x^2+ay^2\right)\right) & 4xy\left(-1-a+\left(x^2+a^2y^2\right)\right) \\ 4xy\left(-1-a+\left(x^2+a^2y^2\right)\right) & 2\left(a-\left(x^2+ay^2\right)\right) - 4y^2\left(2a-\left(x^2+ay^2\right)\right) \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-\left(x^2+y^2\right)}$$

Prozkoumejme nyní případ $a = 1$. Pak jest $\nabla f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ právě když

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = 2 \begin{bmatrix} x\left(1-\left(x^2+y^2\right)\right) \\ y\left(1-\left(x^2+y^2\right)\right) \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-\left(x^2+y^2\right)},$$

z čehož plyne, že body podezřelé z extrému jsou

$$\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_1 \in \mathbb{R}^2 : \|\boldsymbol{x}_1\|_{2,\mathbb{R}^2} = 1.$$

(Připomínáme, že definujeme $\|\boldsymbol{x}\|_{2,\mathbb{R}^2} =_{\mathrm{def}} \left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}$.) V bodě $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{0}$ je

$$\left.\nabla^2 f(\boldsymbol{x})\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

z čehož plyne, že bod $\boldsymbol{x}_0$ je lokálním minimem. Pro body $\boldsymbol{x}_1$ dostaneme

$$\left.\nabla^2 f(\boldsymbol{x})\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1} = -\frac{4}{\mathrm{e}} \begin{bmatrix} x^2 & xy \\ xy & y^2 \end{bmatrix},$$

což je zjevně negativně semidefinitní matice. (Zatím tedy nevíme nic.) Podívejme se nyní, jak se chová funkce $f(\boldsymbol{x})$ pokud se pohybujeme na množině $\boldsymbol{x}_1 \in \mathbb{R}^2 : \|\boldsymbol{x}_1\|_{2,\mathbb{R}^2} = 1$. Je zjevné, že funkce je na této množině konstantní, z čehož s již zjištěnými skutečnostmi plyne, že $\boldsymbol{x}_1$ jsou body, ve kterých funkce nabývá (neostré) lokálními maximum. (Situaci $a = 1$ lze případně přímočaře prozkoumat přechodem k polárním souřadnicím.)

Prozkoumejme nyní případ $a = 0$. Pak jest $\nabla f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ právě když

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = 2 \begin{bmatrix} x\left(1-x^2\right) \\ -x^2 y \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-\left(x^2+y^2\right)},$$

z čehož plyne, že body podezřelé z extrému jsou

$$\boldsymbol{x}_s = \begin{bmatrix} 0 \\ s \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_{-1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

kde $s \in \mathbb{R}$ je libovolné reálné číslo. V bodech $\boldsymbol{x}_s$ je

$$\nabla^2 f(\boldsymbol{x})\big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} = \begin{bmatrix} 2\mathrm{e}^{-s^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

z čehož nelze přímočaře nic zjistit. Podíváme-li se ale na funkční předpis $f(\boldsymbol{x}) = x^2\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$, je okamžitě vidět, že v bodech $\boldsymbol{x}_0$, bude (neostré) lokální minimum. (Skutečně, pro jakékoliv $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$ je $f(\boldsymbol{x}) \geq 0$ a $f(\boldsymbol{x}_s) = 0$.) Pro body $\boldsymbol{x}_{\pm 1}$ dostaneme

$$\nabla^2 f(\boldsymbol{x})\big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_{\pm 1}} = -\frac{4}{\mathrm{e}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

což je zjevně negativně definitiní matice, a v daných bode tedy funkce nabývá lokálního maxima. Letmým pohledem na funkční předpis $f(\boldsymbol{x}) = x^2\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$ okamžitě vidíme, že maximum bude dokonce globální.

Prozkoumejme nyní případ $a = -1$. Pak jest $\nabla f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ právě když

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = 2 \begin{bmatrix} x\left(1 - \left(x^2 - y^2\right)\right) \\ y\left(-1 - \left(x^2 - y^2\right)\right) \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-\left(x^2+y^2\right)},$$

z čehož plyne, že body podezřelé z extrému jsou

$$\boldsymbol{x}_\alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_\gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_\delta = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_\epsilon = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Jest

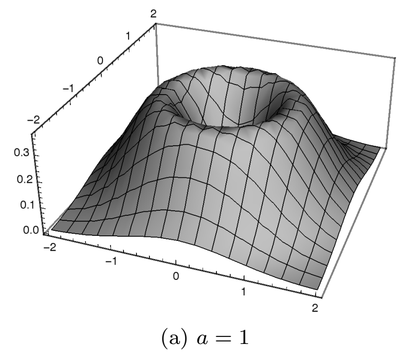
$$\nabla^2 f(\boldsymbol{x})\big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_\alpha} = \frac{4}{\mathrm{e}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \nabla^2 f(\boldsymbol{x})\big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_\beta} = \frac{4}{\mathrm{e}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\nabla^2 f(\boldsymbol{x})\big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_\gamma} = -\frac{4}{\mathrm{e}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \nabla^2 f(\boldsymbol{x})\big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_\delta} = -\frac{4}{\mathrm{e}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \nabla^2 f(\boldsymbol{x})\big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_\epsilon} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

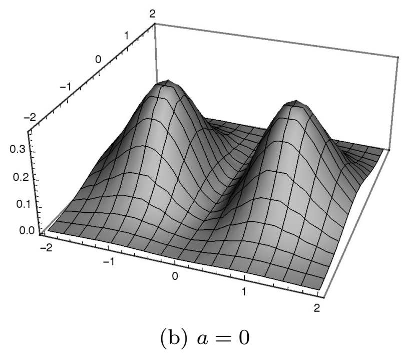
z čehož plyne, že

$$\text{lokální minimum: } \boldsymbol{x}_\alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$
$$\text{lokální maximum: } \boldsymbol{x}_\gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_\delta = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$
$$\text{sedlový bod: } \boldsymbol{x}_\epsilon = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

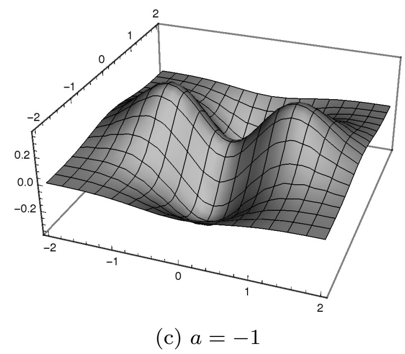
Podíváme-li se ale na funkční předpis $f(\boldsymbol{x}) = (x^2 - y^2)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$, je okamžitě vidět, že lokální maxima/minima budou globální minima/maxima. (Funkce je spojitá a diferencovatelná a platí, že $\lim_{s\to+\infty} f(s, ks) = 0$ nezávisle na směru k.)



(a) $a = 1$



(b) $a = 0$



(c) $a = -1$

Obrázek 1: Průběh funkce $f(\boldsymbol{x}) = \left(x^2 + ay^2\right)\mathrm{e}^{-\left(x^2+y^2\right)}$.

[6] 6. Uvažujte funkce $y_1(x_1, x_2)$ a $y_2(x_1, x_2)$, které jsou jakožto funkce proměnných x_1 a x_2, zadány implicitně soustavou rovnic

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{y_1 y_2}-1} - \ln(y_1 x_1 + y_2 x_2 + \mathrm{e}) = 0,$$
$$\mathrm{e}^{-\frac{1}{y_1 y_2^2}+1} - \ln(y_1 x_2 + y_2 x_1 + \mathrm{e}) = 0.$$

Vypočtěte $\frac{\partial y_1}{\partial x_1}(x_1, x_2)$ a $\frac{\partial y_2}{\partial x_2}(x_1, y_1)$ v bodě $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. (Pro úplnost zdůrazňujeme, že řešením úlohy jsou dvě čísla – číslené hodnoty derivací v příslušném bodě.)

Řešení:

K zodpovězení otázky použijeme větu o implicitních funkcích. Označme si

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

a dále

$$\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{y}_0 = \begin{bmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{bmatrix}$$

a konečně

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \begin{bmatrix} F_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \\ F_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\frac{1}{y_1 y_2}-1} - \ln(y_1 x_1 + y_2 x_2 + \mathrm{e}) \\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{y_1 y_2^2}+1} - \ln(y_1 x_2 + y_2 x_1 + \mathrm{e}) \end{bmatrix}.$$

Nejprve najdeme bod $\boldsymbol{y}_0$, který společně s $\boldsymbol{x}_0$ řeší rovnici

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) = \boldsymbol{0},$$

aneb chceme, aby platilo

$$\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\frac{1}{y_1^0 y_2^0}-1} - \ln\left(y_1^0 x_1^0 + y_2^0 x_2^0 + \mathrm{e}\right) \\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{y_1^0 (y_2^0)^2}+1} - \ln\left(y_1^0 x_2^0 + y_2^0 x_1^0 + \mathrm{e}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

což po dosazení za $\boldsymbol{x}_0$ vede na soustavu rovnic

$$\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\frac{1}{y_1^0 y_2^0}-1} - 1 \\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{y_1^0 (y_2^0)^2}+1} - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

která má jedinné řešení

$$\boldsymbol{y}_0 = \begin{bmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(Symbol x_1^0 značí první složku vektoru $\boldsymbol{x}_0$, horní index 0 není exponent! Symbol $\left(x_1^0\right)^2$ značí druhou mocninu x_1^0 a podobně.) Připomeneme si formální výpočet dle věty o implicitních funkcích. Je-li $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{0}$, pak

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{x}} + \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{y}} \frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0},$$

odkud

$$\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}} = -\left[\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{y}}\right]^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{x}},$$

přičemž jsme použili značení

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{y}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{bmatrix}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}.$$

V našem konkrétním případě dostaneme

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -\frac{y_1}{y_1 x_1 + y_2 x_2 + \mathrm{e}} & -\frac{y_2}{y_1 x_1 + y_2 x_2 + \mathrm{e}} \\ -\frac{y_2}{y_1 x_2 + y_2 x_1 + \mathrm{e}} & -\frac{y_1}{y_1 x_2 + y_2 x_1 + \mathrm{e}} \end{bmatrix}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{y}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{y_1^2 y_2} \mathrm{e}^{\frac{1}{y_1 y_2}-1} - \frac{x_1}{y_1 x_1 + y_2 x_2 + \mathrm{e}} & -\frac{1}{y_1 y_2^2} \mathrm{e}^{\frac{1}{y_1 y_2}-1} - \frac{x_2}{y_1 x_1 + y_2 x_2 + \mathrm{e}} \\ \frac{1}{y_1^2 y_2^2} \mathrm{e}^{-\frac{1}{y_1 y_2^2}-1} - \frac{x_2}{y_1 x_2 + y_2 x_1 + \mathrm{e}} & \frac{2}{y_1 y_2^3} \mathrm{e}^{-\frac{1}{y_1 y_2^2}-1} - \frac{x_1}{y_1 x_2 + y_2 x_1 + \mathrm{e}} \end{bmatrix}.$$

Zajímají nás hodnoty v bodě $\boldsymbol{x}_0$. (Připomeňme si, že $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{y}_0$.) Po dosazení dostaneme

$$\left.\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} = -\frac{1}{\mathrm{e}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \left.\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{y}}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \left.\left[\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{y}}\right]^{-1}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} = -\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Požadované derivace najdeme dosazením do vztahu

$$\left.\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} = -\left.\left[\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{y}}\right]^{-1}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} \left.\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0}$$

což dává

$$\left.\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} = -\frac{1}{\mathrm{e}}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{\mathrm{e}}\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

a proto

$$\left.\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} = -\frac{3}{\mathrm{e}},$$
$$\left.\frac{\partial y_2}{\partial x_2}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} = \frac{2}{\mathrm{e}}.$$