Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale co nejpřesněji odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte ověřit splnění předpokladů.

Jméno a příjmení: ____________________

Příklad	1	2	3	4	**Celkem bodů**
Bodů	6	10	10	10	36
Získáno					

[6] 1. Budiž dána funkce

$$f(z) = \frac{\sin z}{(z-2)^2}.$$

V bodě $z_0 = 2$:

a) určete typ singularity,

b) najděte Laurentovu řadu funkce $f(z)$,

c) spočtěte reziduum.

Řešení:

Funkce $\sin z$ je holomorfní v $\mathbb{C}$, $f(z)$ má proto v $z_0 = 2$ pól násobnosti dva. Nyní spočteme Laurentovu řadu, rozvoj funkce $\sin z$ v okolí požadovaného bodu je

$$\begin{aligned}\sin z = \sin\left((z-2)+2\right) &= \sin(z-2)\cos 2 + \cos(z-2)\sin 2 \\ &= (\cos 2)\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{(z-2)^{2k+1}}{(2k+1)!} + (\sin 2)\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{(z-2)^{2k}}{(2k)!},\end{aligned}$$

kde jsme použili standardní součtové vzorce pro goniometrické funkce a známé Laurentovy řady pro goniometrické funkce. Jmenovatel $(z-2)^2$ je již ve vhodném tvaru, celkem proto

$$\frac{\sin z}{(z-2)^2} = (\cos 2)\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{(z-2)^{2k-1}}{(2k+1)!} + (\sin 2)\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{(z-2)^{2k-2}}{(2k)!}.$$

Z Laurentovy řady v okolí bodu $z_0 = 2$ okamžitě vyčteme zbývající charakteristiky, reziduum v bodě $z_0 = 2$ je rovno koeficientu u mocniny $(z-2)^{-1}$, tedy

$$\operatorname{res}_{z=2} \frac{\sin z}{(z-2)^2} = \cos 2.$$

Z rozvoje do Laurentovy řady opět vidíme, že singularita je zjevně pól násobnosti dva.

[10] 2. Připomeňte si Cauchyho vzorec

$$f(\mathbb{A}) =_{\mathrm{def}} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma (\zeta \mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta,$$

kde f je holomorfní funkce definovaná na $\mathbb{C}$ a $\mathbb{A}$ je daná matice. S použitím Cauchyho vzorce spočtěte $\sin \mathbb{A}$, kde $\mathbb{A}$ je matice definovaná jako

$$\mathbb{A} =_{\mathrm{def}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Řešení:

Nejprve si spočteme vlastní čísla matice $\mathbb{A}$. Jest

$$\det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}) = \det \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} - \lambda & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} - \lambda \end{bmatrix} = \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\left(\lambda - \frac{1}{2}\right) - \frac{3}{4} = \lambda^2 - 1,$$

a vlastní čísla matice $\mathbb{A}$ jsou tedy $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_2 = -1$. Pro výpočet podle Cauchyho vzorce potřebujeme spočíst inverzní matici k matici $\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A}$, přímočarý výpočet dává

$$(\lambda \mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1} = -\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} - \lambda & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} - \lambda \end{bmatrix}^{-1} = -\frac{1}{\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\left(\lambda - \frac{1}{2}\right) - \frac{3}{4}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} - \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda - \frac{1}{2}}{(\lambda-1)(\lambda+1)} & -\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(\lambda-1)(\lambda+1)} \\ -\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(\lambda-1)(\lambda+1)} & \frac{\lambda + \frac{1}{2}}{(\lambda-1)(\lambda+1)} \end{bmatrix}.$$

Dosazením do Cauchyho vzorce dostaneme

$$\begin{aligned}
\sin \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma (\lambda \mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1} f(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \begin{bmatrix} \frac{\lambda - \frac{1}{2}}{(\lambda-1)(\lambda+1)} & -\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(\lambda-1)(\lambda+1)} \\ -\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(\lambda-1)(\lambda+1)} & \frac{\lambda + \frac{1}{2}}{(\lambda-1)(\lambda+1)} \end{bmatrix} \sin(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{\lambda - \frac{1}{2}}{(\lambda-1)(\lambda+1)} \sin\lambda\,\mathrm{d}\lambda & -\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(\lambda-1)(\lambda+1)} \sin\lambda\,\mathrm{d}\lambda \\ -\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(\lambda-1)(\lambda+1)} \sin\lambda\,\mathrm{d}\lambda & \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{\lambda + \frac{1}{2}}{(\lambda-1)(\lambda+1)} \sin\lambda\,\mathrm{d}\lambda \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

kde γ je nějaká křivka v komplexní rovině volená tak, aby body $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_2 = -1$ ležely uvnitř této křivky; můžeme například volit kružnici se středem v počátku a o poloměru 2; $\boldsymbol{\gamma} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, $\varphi \in (0, 2\pi)$. Jednotlivé integrály spočteme pomocí reziduové věty. Integrand je vždy holomorfní funkce kromě bodů $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_2 = -1$ a v každém z těchto bodů má pól násobnosti jedna. Rezidua spočteme podle tvrzení:

> Buďte $f(z)$, $g(z)$ holomorfní funkce na okolí bodu z_0 a nechť má funkce $g(z)$ v bodu z_0 kořen násobnosti jedna, pak
>
> $$\operatorname{res}_{z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \left.\frac{f(z)}{g'(z)}\right|_{z=z_0}.$$

Přímočarý výpočet vede na

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}_{\lambda=1} \frac{\lambda - \frac{1}{2}}{(\lambda-1)(\lambda+1)} \sin\lambda &= \left.\left(\frac{\lambda - \frac{1}{2}}{\lambda+1} \sin\lambda\right)\right|_{\lambda=1} = \frac{1}{4}\sin 1, \\
\operatorname{res}_{\lambda=-1} \frac{\lambda - \frac{1}{2}}{(\lambda-1)(\lambda+1)} \sin\lambda &= \left.\left(\frac{\lambda - \frac{1}{2}}{\lambda-1} \sin\lambda\right)\right|_{\lambda=-1} = -\frac{3}{4}\sin 1, \\
\operatorname{res}_{\lambda=1} \frac{\lambda + \frac{1}{2}}{(\lambda-1)(\lambda+1)} \sin\lambda &= \left.\left(\frac{\lambda + \frac{1}{2}}{\lambda+1} \sin\lambda\right)\right|_{\lambda=1} = \frac{3}{4}\sin 1, \\
\operatorname{res}_{\lambda=-1} \frac{\lambda + \frac{1}{2}}{(\lambda-1)(\lambda+1)} \sin\lambda &= \left.\left(\frac{\lambda + \frac{1}{2}}{\lambda-1} \sin\lambda\right)\right|_{\lambda=-1} = -\frac{1}{4}\sin 1, \\
\operatorname{res}_{\lambda=1} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(\lambda-1)(\lambda+1)} \sin\lambda &= \left.\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\lambda+1} \sin\lambda\right)\right|_{\lambda=1} = \frac{\sqrt{3}}{4}\sin 1, \\
\operatorname{res}_{\lambda=-1} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(\lambda-1)(\lambda+1)} \sin\lambda &= \left.\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\lambda-1} \sin\lambda\right)\right|_{\lambda=-1} = \frac{\sqrt{3}}{4}\sin 1.
\end{aligned}$$

Celkem proto

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma \frac{\lambda-\frac{1}{2}}{(\lambda-1)(\lambda+1)}\sin\lambda\,\mathrm{d}\lambda = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left(2\pi\mathrm{i}\operatorname{res}_{\lambda=1}\frac{\lambda-\frac{1}{2}}{(\lambda-1)(\lambda+1)}\sin\lambda + 2\pi\mathrm{i}\operatorname{res}_{\lambda=-1}\frac{\lambda-\frac{1}{2}}{(\lambda-1)(\lambda+1)}\sin\lambda\right)$$
$$= \frac{1}{4}\sin 1 - \frac{3}{4}\sin 1 = -\frac{1}{2}\sin 1,$$

a obdobně lze postupovat pro další integrály. Jest tedy

$$\sin\mathbb{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\sin 1.$$

Při výpočtu je také možné využít triku, který plyne z Cauchyho vzorce. Je $f = g$ na spektru matice $\mathbb{A}$, aneb je-li $\forall\lambda_i \in \sigma(\mathbb{A}) : f(\lambda_i) = g(\lambda_i)$, pak je také $f(\mathbb{A}) = g(\mathbb{A})$. Volme si vhodně funkci g, která splňuje předchozí požadavek

$$g(x) = \frac{1}{2}(x-1)\sin 1 + \frac{1}{2}(x+1)\sin 1 = x\sin 1.$$

(Funkce je polynomiální v x, nemáme tedy potíže s jejím vyčíslením ani pro matice. Polynomy od matic umíme snadno spočíst.) Pak zjevně platí $g(x)|_{x=\pm1} = \sin x|_{x=\pm1}$ a můžeme tedy psát—*pro naši konkrétní matici*—

$$\sin\mathbb{A} = (\sin 1)\,\mathbb{A}$$

což po dosazení kupodivu vede ke stejnému výsledku jako výše, to jest

$$\sin\mathbb{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\sin 1.$$

[10] 3. Uvažujte posloupnost distribucí $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ definovanou jako

$$f_n(x) = \frac{1}{\pi}\frac{n}{\mathrm{e}^{nx} + \mathrm{e}^{-nx}}.$$

(Přesněji uvažujeme posloupnost regulárních distribucí definovaných příslušnými funkcemi.) Najděte limitu

$$f = \lim_{n\to+\infty} f_n$$

této posloupnosti, aneb spočtěte

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\pi}\frac{n}{\mathrm{e}^{nx} + \mathrm{e}^{-nx}},$$

přičemž limitou se myslí *limita posloupnosti ve smyslu distribucí.* Přesně specifikujte v jaké smyslu je konvergence definována.

Řešení:

Chceme ukázat, že pro každou testovací funkci φ platí

$$\langle T_{f_n}, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})} \to \langle T, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})},$$

kde konvergence je nyní standardní kovergence posloupnosti reálných čísel $\langle T_{f_n}, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})}$. Každý člen posloupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ je stadardním způsobem ztotožněn s distribucí T_{f_n}, dualita $\langle T_{f_n}, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})}$ je tedy

$$\langle T_{f_n}, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})} = \int_{x=-\infty}^{+\infty} f_n(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi}\frac{n}{\mathrm{e}^{nx} + \mathrm{e}^{-nx}}\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Zbývá spočíst limitu. Nejprve si promyslíme jak se chová posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ ve smyslu *bodové limity.* (Nakreslete si obrázek.) Vidíme, že

$$\lim_{n\to+\infty} f_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\pi}\frac{n}{\mathrm{e}^{nx} + \mathrm{e}^{-nx}} = \begin{cases} +\infty, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0. \end{cases}$$

Dále si můžeme povšimnout, že každá funkce f_n je pro všechna reálná čísla kladná. Navíc vidíme, že platí

$$\int_{x=-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi}\frac{n}{\mathrm{e}^{nx} + \mathrm{e}^{-nx}}\,\mathrm{d}x = 2\int_{x=0}^{+\infty} \frac{1}{\pi}\frac{n}{\mathrm{e}^{nx} + \mathrm{e}^{-nx}}\,\mathrm{d}x \leq \frac{2}{\pi}\int_{x=0}^{+\infty} n\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{\pi}\left[\mathrm{e}^{-nx}\right]_{x=0}^{+\infty} = \frac{2}{\pi},$$

což nás vede k hypotéze, že limitou posloupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ ve smyslu distribucí bude Diracova distribuce s nosičem v bodě nula. (Posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ se "koncentruje" v nule a integrál z každého členu posloupnosti je konečný, přičemž integrál lze odhadnout shora nezávisle na n.) Pokusme se tuto hypotézu ověřit. Předpokládejme, že funkce φ má nosič v intervalu $[a, b]$, pak platí

$$\int_{x=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi}\frac{n}{\mathrm{e}^{nx} + \mathrm{e}^{-nx}}\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x=a}^{b} \frac{1}{\pi}\frac{n}{\mathrm{e}^{nx} + \mathrm{e}^{-nx}}\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} y = nx \\ \mathrm{d}y = n\mathrm{d}x \end{vmatrix} = \frac{1}{\pi}\int_{y=na}^{nb} \frac{1}{\mathrm{e}^{y} + \mathrm{e}^{-y}}\varphi\left(\frac{y}{n}\right)\,\mathrm{d}y.$$

Provedeme limitní přechod $n \to +\infty$ a výsledkem je

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{x=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi}\frac{n}{\mathrm{e}^{nx} + \mathrm{e}^{-nx}}\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(0)\,\frac{1}{\pi}\int_{y=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^{y} + \mathrm{e}^{-y}}\,\mathrm{d}y,$$

z čehož plyne, že

$$\lim_{n\to+\infty} \langle T_{f_n}, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})} = c\varphi(0) = c\left\langle T_{\delta(x-0)}, \varphi\right\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})}$$

kde c je konstanta určená vztahem

$$c =_{\mathrm{def}} \frac{1}{\pi}\int_{y=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^{y} + \mathrm{e}^{-y}}\,\mathrm{d}y.$$

Spočteme hodnotu konstanty c, jest

$$\frac{1}{\pi}\int_{y=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^{y} + \mathrm{e}^{-y}}\,\mathrm{d}y = \begin{vmatrix} z = \mathrm{e}^{y} \\ \mathrm{d}z = \mathrm{e}^{y}\mathrm{d}y = z\mathrm{d}y \end{vmatrix} = \frac{1}{\pi}\int_{z=0}^{\infty} \frac{1}{z + \frac{1}{z}}\frac{\mathrm{d}z}{z} = \frac{1}{\pi}\int_{z=0}^{\infty} \frac{1}{z^2 + 1}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{\pi}\left[\arctan z\right]_{z=0}^{+\infty} = \frac{1}{2}.$$

Pro každou testovací funkci φ tedy platí, že

$$\lim_{n\to+\infty} \langle T_{f_n}, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})} = \left\langle T_{\frac{1}{2}\delta(x-0)}, \varphi\right\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})},$$

odkud

$$\lim_{n\to+\infty} T_{f_n} = T_{\frac{1}{2}\delta(x-0)},$$

aneb ve smyslu distribucí

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\pi}\frac{n}{\mathrm{e}^{nx}+\mathrm{e}^{-nx}} = \frac{1}{2}\delta(x-0).$$

[10] 4. Pro $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ řešte s použitím Fourierovy transformace rovnici

$$\frac{\mathrm{d}^4 f}{\mathrm{d}x^4} + k^4 f = \delta,$$

kde δ je Diracova distribuce v nule a $k \in \mathbb{R}^+$ je konstanta. (Pozor, specifikace prostoru, ve kterém hledáte řešení, zde není jen pro okrasu, je to zásadní informace.)

Řešení:

Úlohu vyřešíme kupříkladu s použitím Fourierovy transformace. Použijeme Fourierovu transfroamci definovanou vztahem

$$\mathcal{F}[f](\boldsymbol{\xi}) =_{\text{def}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x}) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} \mathbf{x} \bullet \boldsymbol{\xi}} \, \mathrm{d}\mathbf{x},$$

kde d je dimenze prostoru, na kterém pracujeme. S použitím tabulky Fourierových transformací zjistíme, že Fourierova transformace rovnice je

$$\left((2\pi)^4 \xi^4 + k^4 \right) \mathcal{F}[f] = 1,$$

kde jsme také využili známého vztahu pro Fourierovu transformaci Dirac distribuce. Zbývá najít inverzní Fourierovu transformaci

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{1}{(2\pi)^4 \xi^4 + k^4} \right](x),$$

což je snadné. Inverzní Fourierovu transformaci spočteme podle vzorce

$$\mathcal{F}^{-1}[f](\boldsymbol{x}) =_{\text{def}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x}) \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \mathbf{x} \bullet \boldsymbol{\xi}} \, \mathrm{d}\boldsymbol{\xi},$$

kde d je dimenze prostoru, na kterém pracujeme. Chceme tedy spočíst integrál

$$I = \int_{x=-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} x \xi}}{(2\pi)^4 \xi^4 + k^4} \, \mathrm{d}\xi,$$

k čemuž použijeme nástrojů komplexní analýzy. Funkce

$$g(z) =_{\text{def}} \frac{\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} x z}}{(2\pi)^4 z^4 + k^4}$$

má jednonásobné póly v bodech

$$z_l = \frac{k}{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\frac{\pi}{2} l}, \qquad l = 0, \dots, 3.$$

Pro $x > 0$ zvolíme jako integrační křivku polokružnici v horní komplexní polorovině. (Funkce $\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} x z}$ je pro parametrizaci kruhového oblouku $z = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, $\phi \in (0, \pi)$ klesající funkce pokud $x > 0$.) Standardní aplikace residiuové věty a Jordanova lemmatu pak vede na výpočet

$$\begin{aligned}
\int_{x=-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} x \xi}}{(2\pi)^4 \xi^4 + k^4} \, \mathrm{d}\xi &= 2\pi \mathrm{i} \left(\operatorname{res}_{z = \frac{k}{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}} \frac{\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} x z}}{(2\pi)^4 z^4 + k^4} + \operatorname{res}_{z = \frac{k}{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3}{4}\pi}} \frac{\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} x z}}{(2\pi)^4 z^4 + k^4} \right) \\
&= 2\pi \mathrm{i} \left(\left. \frac{\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} x z}}{4 (2\pi)^4 z^3} \right|_{z = \frac{k}{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}} + \left. \frac{\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} x z}}{4 (2\pi)^4 z^3} \right|_{z = \frac{k}{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3}{4}\pi}} \right) \\
= \frac{\mathrm{i}}{4k^3} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i} x k \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) - \mathrm{i}\frac{3}{4}\pi} + \mathrm{e}^{\mathrm{i} x k \left(\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) + \mathrm{i} \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) \right) - \mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \right) &= \frac{\mathrm{i}}{4k^3} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i} x k \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i} \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \mathrm{i}\frac{3}{4}\pi} + \mathrm{e}^{\mathrm{i} x k \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i} \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \right) \\
= \frac{\mathrm{i}}{4k^3} \mathrm{e}^{-\frac{kx}{\sqrt{2}}} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{kx}{\sqrt{2}} - \frac{3}{4}\pi \right)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\frac{kx}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4} \right)} \right) &= -\frac{1}{2k^3} \mathrm{e}^{-\frac{kx}{\sqrt{2}}} \frac{-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{kx}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4} \right)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\frac{kx}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4} \right)}}{2\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{kx}{\sqrt{2}}}}{2k^3} \sin\left(\frac{kx}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4} \right).
\end{aligned}$$

Pro $x > 0$ jsme tedy získali řešení

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{kx}{\sqrt{2}}}}{2k^3} \sin\left(\frac{kx}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4} \right).$$

Hledaná funkce musí být sudá, což plyne z invariance rovnice vůči záměně $x \leftrightarrow -x$, a proto okamžitě dostáváme

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{k|x|}{\sqrt{2}}}}{2k^3} \sin\left(\frac{k|x|}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4} \right)$$

pro $x \in \mathbb{R}$. Řešení lze případně také napsat v ekvivalentním tvaru

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{k|x|}{\sqrt{2}}}}{2k^3} \cos\left(\frac{k|x|}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4} \right).$$