Matematická analýza II (NOFY152) – DÚ 3

Mocninné řady

1. Pro každé $z \in \mathbb{C}$ a $a, b \in \mathbb{R}$ vyšetřete, zda mocninná řada

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n + b^n}{n} z^n$$

konverguje (absolutně či neabsolutně).

Řešení: Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $|a| \geq |b|$. (Pokud by tomu tak nebylo, přeznačíme si a a b.) Pro $a, b = 0$ je navíc konvergence řady zřejmá pro všechna $z \in \mathbb{C}$. V dalším se tedy omezíme na případ $|a| \geq |b| > 0$. Označme si

$$c_n := \frac{a^n + b^n}{n}.$$

Platí

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{a^n + b^n}{n}\right|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{|a^n| \left|1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n\right|}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a| \sqrt[n]{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n}}{\sqrt[n]{n}} = |a|\,,$$

kde jsme využili aritmetiky limit a toho, že

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n} = 1, \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

(Dokažte si sami pomocí věty o limitě složené funkce, Heineho věty a l'Hôspitalova pravidla.) Odsud tedy dostáváme, že poloměr konvergence R dané mocninné řady je roven

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|c_n|}} = \frac{1}{|a|},$$

a řada tedy konverguje absolutně na množině $\left\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \frac{1}{|a|}\right\}$ a nekonverguje na $\left\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > \frac{1}{|a|}\right\}$.

Pro $z \in \mathbb{C}$ ležící na kružnici konvergence platí

$$|z| = \frac{1}{|a|} \iff z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}{|a|},$$

kde $\varphi \in [0, 2\pi)$. Na kružnici konvergence tedy vyšetřujeme konvegenci řady

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n + b^n}{n} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}}{|a|^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} (\operatorname{sign} a)^n \left(1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}. \tag{1}$$

Srovnávací kritérium spolu s divergencí harmonické řady nám dává, že řada (1) jistě nekonverguje absolutně, neboť pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $|a| > |b| > 0$ platí

$$\frac{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n}{n} \geq \frac{1 - \left|\frac{b}{a}\right|}{n}.$$

Pro případ, kdy $|a| = |b| \neq 0$, to plyne opět jednoduše z divergence harmonické řady (a aritmetiky řad).

Pro vyšetření neabsolutní konvergence řady (1) nejprve ukažme, že posloupnosti $\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}\right\}$ má omezené částečné součty pro $\varphi \in (0, 2\pi)$ a posloupnost $\left\{(-1)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}\right\}$ má omezené částečné součty pro $\varphi \in [0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$. Opravdu,

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi} &= \cos(n\varphi) + \mathrm{i}\sin(n\varphi), \\ (-1)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi} &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi+\varphi)n} = \cos(n(\pi + \varphi)) + \mathrm{i}\sin(n(\pi + \varphi)), \end{aligned}$$

a zbytek již plyne z Tvrzení 9.3.5. ve skriptech Roberta Černého a Milana Pokorného.

Konvergenci řady (1) nyní vyšetříme pro následující volby parametrů a, b.

(i) $|a| > |b| > 0$

Všimněme si, že v tomto případě řada

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} (\operatorname{sign} a)^n \left(\frac{b}{a}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}$$

konverguje absolutně (jednoduchý důsledek limitního podílového kritéria). Z aritmetiky řad tak plyne, že řada (1) konverguje právě tehdy, když konverguje řada

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} (\operatorname{sign} a)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}. \tag{2}$$

Protože posloupnost $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ monotonně konverguje k nule a posloupnost $\left\{(\operatorname{sign} a)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}\right\}$ má pro jisté hodnoty φ omezené částečné součty (viz výše), z Dirichletova kritéria dostáváme, že pro $a < 0$ řada (1) konverguje pro $\varphi \in [0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$ a diverguje pro $\varphi = \pi$ a pro $a > 0$ řada (1) konverguje pro $\varphi \in (0, 2\pi)$ a diverguje pro $\varphi = 0$. (Divergence jsme dostali z toho, že pro příslušná a a φ se (2) redukuje na harmonickou řadu.)

(ii) $a = b > 0$

Řada (1) se redukuje na

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}.$$

Aplikací Dirichletova kritéria podobně jako výše dostáváme konvergenci pro $\varphi \in (0, 2\pi)$ a divergenci pro $\varphi = 0$.

(iii) $a = b < 0$

Řada (1) se redukuje na

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n} (-1)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}.$$

Aplikací Dirichletova kritéria podobně jako výše dostáváme konvergenci pro $\varphi \in [0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$ a divergenci pro $\varphi = \pi$.

(iv) $a = -b \neq 0$

Řada (1) se redukuje na

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 + (-1)^n}{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}.$$

Z aritmetiky řad a aplikace Dirichletova kritéria podobně jako výše dostáváme konvergenci pro $\varphi \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$ a divergenci pro $\varphi = 0$ a $\varphi = \pi$.

2. Pro každé $z \in \mathbb{C}$ vyšetřete, zda mocninná řada

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} (z - 1)^n$$

konverguje (absolutně či neabsolutně).

Řešení: Označme si

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}.$$

Protože

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e},$$

dostáváme, že poloměr konvergence dané mocninné řady je $\frac{1}{\mathrm{e}}$. Řada tedy konverguje absolutně na množině $\left\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| < \frac{1}{\mathrm{e}}\right\}$ a nekonverguje na $\left\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| > \frac{1}{\mathrm{e}}\right\}$.

Pro $z \in \mathbb{C}$ ležící na kružnici konvergence platí

$$|z-1| = \frac{1}{\mathrm{e}} \iff z - 1 = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}{\mathrm{e}},$$

kde $\varphi \in [0, 2\pi)$. Na kružnici konvergence tedy vyšetřujeme konvegenci řady

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{\mathrm{e}^n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}.$$

Ukažme, že není splněná nutná podmínka konvergence. Protože podmínka $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$ je ekvivalentní $\lim_{n\to+\infty} |b_n| = 0$ pro každou posloupnost $\{b_n\}$, stačí hledat limitu

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{\mathrm{e}^n} &= \lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{n^2 \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-n} = \mathrm{e}^{\lim_{n\to+\infty}\left(n^2 \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-n\right)} = \mathrm{e}^{\lim_{n\to+\infty}\left(n^2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-n\right)} \\ &= \mathrm{e}^{\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}+o(1)\right)} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \neq 0.\end{aligned}$$

Závěr: Řada konverguje absolutně na množině $\left\{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| < \frac{1}{\mathrm{e}}\right\}$ a nekonverguje na $\left\{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| \geq \frac{1}{\mathrm{e}}\right\}$.

3. Pro každé $z \in \mathbb{C}$ vyšetřete, zda mocninná řada

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} z^n$$

konverguje (absolutně či neabsolutně). Zde

$$\begin{aligned}(2n)!! &= 2n \cdot (2n-2) \cdots 4 \cdot 2, \\ (2n+1)!! &= (2n+1) \cdot (2n-1) \cdots 3 \cdot 1.\end{aligned}$$

Nápověda: Využijte Stirlingův vzorec.

Řešení: Označme si

$$a_n := \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

Protože

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)!!\,(2n+3)!!}{(2n+1)!!\,(2n+2)!!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n+3}{2n+2} = 1,$$

dostáváme, že poloměr konvergence dané mocninné řady je 1. Řada tedy konverguje absolutně na množině $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ a nekonverguje na $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$.

Pro $z \in \mathbb{C}$ ležící na kružnici konvergence platí

$$|z| = 1 \iff z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi},$$

kde $\varphi \in [0, 2\pi)$. Na kružnici konvergence tedy vyšetřujeme konvegenci řady

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}. \tag{3}$$

Pro $\varphi = 0$ nám Raabeho kritérium dá divergenci řady (3). Skutečně,

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{2n+3}{2n+2} - 1\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2n+2} = \frac{1}{2} < 1.$$

Z toho zároveň plyne, že pro $\varphi \in (0, 2\pi)$ nemůže řada (3) konvergovat absolutně a zbývá vyřešit, zda nekonverguje neabsolutně. Protože posloupnost $\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}\}$ má pro $\varphi \in (0, 2\pi)$ omezené částečné součty, stačí ukázat, že posloupnost $\{a_n\}$ jde monotonně k nule a konvergenci řady (3) nám pak dá Dirichletovo kritérium.

Monotonie posloupnosti $\{a_n\}$ plyne z nerovnosti

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{2n+3}{2n+2} > 1.$$

Pro ověření, že $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, si nejprve uvědomme, že platí

$$(2n)!! = 2n \cdot (2n-2)\cdots 4\cdot 2 = 2^n\,(n)!,$$
$$(2n+1)!! = (2n+1)\cdot(2n-1)\cdots 3\cdot 1 = \frac{(2n+1)!}{(2n)!!} = \frac{(2n+1)!}{2^n\,(n)!}.$$

S využitím Stirlingova vzorce

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n} = 1,$$

potom dostáváme

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{2n}\,(n!)^2}{(2n+1)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{2n}\cdot 2\pi n\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}}{\sqrt{2\pi\,(2n+1)}\left(\frac{2n+1}{\mathrm{e}}\right)^{2n+1}}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n+1} = 0,$$

kde jsme ještě v poslední rovnosti využili toho, že

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n+1} = \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1} = \frac{1}{\mathrm{e}},$$

což plyne jednoduše z Heineho věty a l'Hôspitalova pravidla.

Závěr: Řada konverguje absolutně na množině $\{z\in\mathbb{C} \mid |z|<1\}$, konverguje neabsolutně na $\{z\in\mathbb{C} \mid |z|=1\}\setminus\{1\}$ a nekonverguje na $\{z\in\mathbb{C} \mid |z|>1\}\cup\{1\}$.

4. S pomocí teorie mocninných řad vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2\left(\frac{3x}{2+x^2}\right)^n, \quad x\in\mathbb{R}.$$

Řešení: Položme $y := \frac{3x}{2+x^2}$. Řada

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 y^n \tag{4}$$

má poloměr konvergence $R=1$, stačí použít (podobně jako v 5. úkolu z 1. sady DÚ na řady), že

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n^2} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{2\ln n}{n}} = e^{\lim_{n\to+\infty}\frac{2\ln n}{n}} = e^0 = 1. \tag{5}$$

Dále pro $y=\pm1$ není splněna nutná podmínka pro konvergenci, neboť členy řady (4) nekonvergují k nule. Zbývá tedy rozhodnout, pro která $x\in\mathbb{R}$ platí

$$\left|\frac{3x}{2+x^2}\right| < 1, \quad\iff\quad -1 < \frac{3x}{2+x^2} < 1.$$

Tyto nerovnosti jsou ekvivalentní nerovnostem:

$$x^2+3x+2>0,\ x^2-3x+2>0.$$

Vyřešení těchto nerovností je již snadné, vyjde $x\in(-\infty,-2)\cup(-1,1)\cup(2,+\infty)$.

Závěr: Řada konverguje absolutně pro $x\in(-\infty,-2)\cup(-1,1)\cup(2,+\infty)$.

5. Sečtěte číselnou řadu
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n!}.$$

Řešení: Uvažujme mocninnou řadu
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n-1)!} x^{n-1}. \tag{6}$$
Z limitního podílového kritéria plyne, že (6) konverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Skutečně,
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n+1}{n!}}{\frac{n}{(n-1)!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n^2} = 0,$$
a poloměr konvergence příslušné mocninné řady je tedy $+\infty$.

Protože každá mocninná řada na svém kruhu konvergence definuje nekonečněkrát spojitě diferencovatelnou funkci a navíc platí, že můžeme zaměňovat pořadí sumy a derivace, postupně dostáváme
$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n-1)!} x^{n-1} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x^n}{(n-1)!} \right)' \\
&= \left(x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \right)' \\
&= \left(x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \right)' \\
&= (xe^x)' = e^x(x+1).
\end{aligned}$$
To znamená, že
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n-1)!} x^{n-1} \bigg|_{x=1} = 2e.$$

6. Sečtěte číselnou řadu
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\,(n+1)}.$$

Řešení: Uvažujme mocninnou řadu
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)} x^{n+1}. \tag{7}$$
Podobně jako v (5), platí
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n(n+1)}} = e^{\lim_{n\to+\infty} \frac{-\ln(n)-\ln(n+1)}{n}} = e^0 = 1.$$
Z limitního podílového kritéria tedy plyne, že řada (7) konverguje pro $|x| < 1$. Z Dirichletova kritéria plyne, že konverguje i pro $x = 1$, zjevně $\frac{1}{n(n+1)} \searrow 0$ pro $n \to +\infty$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$ má omezené částečné součty. Pro

$|x| < 1$ platí

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)} x^{n+1}\right)'' = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n\right)'$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n x^{n-1}$$
$$= -\sum_{n=1}^{+\infty} (-x)^{n-1}$$
$$= -\sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n$$
$$= -\frac{1}{1+x}.$$

Funkci $\frac{1}{1+x}$ nyní dvakrát zintegrujeme a dostaneme

$$\int \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x) + c,\ x \in (-1,1)$$
$$\int \ln(1+x)\, dx = x\ln(1+x) - \int \frac{x\, dx}{1+x}$$
$$= x\ln(1+x) + \int \frac{dx}{1+x} - \int dx$$
$$= x\ln(1+x) + \ln(1+x) - x + d,\ x \in (-1,1).$$

Tudíž

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)} x^{n+1} = -(x+1)\ln(1+x) + x - cx - d,\ x \in (-1,1). \tag{8}$$

Dosadíme za $x = 0$ a vidíme, že $d = 0$. K určení konstanty c zderivujeme obě strany (8) a porovnáme v bodě $x = 0$, dostaneme $0 = -1 + 1 - c = -c$. Tedy i $c = 0$. Podle Abelovy věty nakonec dostáváme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)} = \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)} x^{n+1} = -\lim_{x\to 1^-} \big((x+1)\ln(1+x) - x\big) = 1 - 2\ln 2 = 1 - \ln 4.$$