Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale co nejpřesněji odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte ověřit splnění předpokladů.

Jméno a příjmení: ________________________________

Příklad	1	2	3	4	5	**Celkem bodů**
Bodů	7	7	7	7	8	36
Získáno						

[7] 1. Buď dán funkcionál Φ na množině $M = \left\{ y \in \mathcal{C}^1\left([0,1]\right) \mid y(0) = 0,\ y(1) = \sinh 1 \right\}$ předpisem

$$\Phi(y) = \int_0^1 \left(y^2 + yy' + (y')^2 \right) \, \mathrm{d}x.$$

a) Spočtěte první Gâteaux derivaci funkcionálu Φ v bodě y ve směru h. (Tedy $\delta\Phi[y](h)$ neboli $D\Phi(y)[h]$, záleží na značení, kterému dáváte přednost.) Popište přesně v jakém prostoru funkcí leží h.

b) Napište Euler–Lagrange rovnici pro funkcionál Φ.

c) Najděte extremálu funkcionálu Φ na množině M, extremálu označte y_{ext}.

d) Spočtěte druhou Gâteaux derivaci funkcionálu Φ v bodě y ve směru h. (Tedy $\delta^2\Phi[y](h,h)$ neboli $D^2\Phi(y)[h,h]$, záleží na značení, kterému dáváte přednost.)

e) Vyčíslete druhou Gâteaux derivaci funkcionálu Φ v bodě y_{ext} ve směru h pro y_{ext}, které je řešením Euler–Lagrange rovnice pro funkcionál Φ. Ukažte, že Gâteaux derivace je v tomto bodě v libovolném směru h nezáporná.

[7] 2. Buď dána posloupnost funkcí

$$f_n(x) = n\left[\cos\left(x + \frac{1}{n}\right) - \cos x\right] \mathrm{e}^x$$

Najděte bodovou limitu f této posloupnosti v intervalu $I = [0, +\infty)$. Rozhodněte, zda posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ konverguje stejnoměrně k f na intervalu K, M a J, kde

a) $K = (\varepsilon, L)$, kde $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ a $L \in \mathbb{R}^+$ a $L > \varepsilon$,

b) $M = (0, L)$, kde $L \in \mathbb{R}^+$,

c) $J = (0, +\infty)$.

[7] 3. Určete pro která $b \in \mathbb{R}$ je definována funkce

$$F(b) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \mathrm{e}^{-bx}}{x\mathrm{e}^x} \, \mathrm{d}x.$$

(Aneb zjistěte pro která $b \in \mathbb{R}$ uvedený integrál existuje a je konečný.) Pro tato b integrál spočtěte. *Postupy použité při řešení je nutné pečlivě zdůvodnit!*

[7] 4. Spočtěte plošný obsah množiny M, aneb spočtěte integrál

$$\int_M \mathrm{d}\lambda,$$

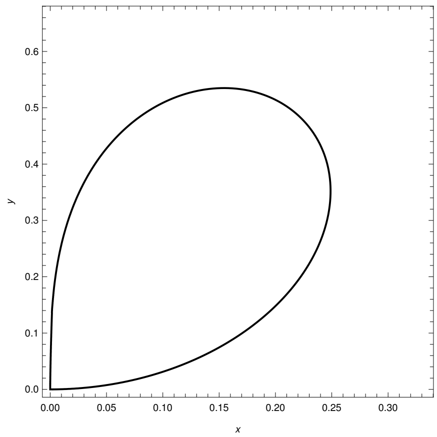
a dále spočtěte integrál

$$\int_M \frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{y^2}{3}}} \,\mathrm{d}\lambda,$$

kde $M \subset \mathbb{R}^2$ je množina definovaná vztahem

$$M =_{\text{def}} \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \geq 0,\ y \geq 0,\ \left(x^2 + \frac{y^2}{3}\right)^{\frac{5}{4}} \leq x^{\frac{1}{2}} y \right\}.$$

(Zápis $\int_M \frac{1}{\sqrt{x^2+\frac{y^2}{3}}} \,\mathrm{d}\lambda$ je jen jiné značení pro $\int_M \frac{1}{\sqrt{x^2+\frac{y^2}{3}}} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.) Množina je načrtnutá na Obrázku 1.



Obrázek 1: Množina $M = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \geq 0,\ y \geq 0,\ \left(x^2 + \frac{y^2}{3}\right)^{\frac{5}{4}} \leq x^{\frac{1}{2}} y \right\}$.

[8] 5. Uvažujte Hilbertův prostor $H =_{\mathrm{def}} L^2((0, 2\pi))$ vybavený standardním skalárním součinem

$$(u, v)_{L^2((0,2\pi))} =_{\mathrm{def}} \int_{x=0}^{2\pi} u(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Uvažujte podprostor V, $V \subset H$, který je generován jako lineární obal funkcí

$$g_1(x) =_{\mathrm{def}} \sin x,$$
$$g_2(x) =_{\mathrm{def}} \cos x + \sin(3x),$$

aneb

$$V =_{\mathrm{def}} \{ w \in H \,|\, \exists \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \colon w(x) = \alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x) \},$$

a dále uvažujte funkci $f_m \in H$ definovanou předpisem

$$f_m(x) =_{\mathrm{def}} \sin(mx),$$

kde $m \in \mathbb{N}_0$. (Množinu přirozených čísel $\mathbb{N}$ pro tyto účely tohoto příkladu chápeme včetně nuly, k symbolu $\mathbb{N}$ tedy přidáváme index nula, aby nedošlo k mýlce.)

a) Ukažte, že funkce g_1 a g_2 jsou na sebe v daném skalárním součinu kolmé. Spočtěte normy funkcí $\|g_1\|_H$ a $\|g_2\|_H$, kde $\|\cdot\|_H$ značí standardní normu v prostoru H. (Tedy normu indukovanou příslušným skalárním součinem.)

b) Zjistěte, pro která $m \in \mathbb{N}_0$ je $f_m \in V$.

c) Pro dané $k \in \mathbb{N}_0$ najděte nejlepší aproximaci funkce $f_k \in H$ v podprostoru V, aneb najděte funkci $h_k \in V$ takovou, že platí $\|f_k - h_k\|_H = \min_{l \in V} \|f_k - l\|_H$, kde $\|\cdot\|_H$ značí standardní normu v prostoru H. (Tedy normu indukovanou příslušným skalárním součinem.)