$\boxed{16.}$ FOURIEROVA TRANSFORMACE V $L^1(\mathbb{R}^d)$, V $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ a V $L^2(\mathbb{R}^d)$

Nejdříve si řekneme, co znamená obecně TRANSFORMACE či přesněji INTEGRÁLNÍ TRANSFORMACE. Poté si "odvodíme" FOURIEROVU transformaci pomocí FOURIERových řad.

Integrální <u>TRANSFORMACÍ</u> <u>funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$</u> <u>s jádrem $k : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$</u> nazveme funkci $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definovanou vztahem

$$g(w) := \int_E f(t)\, k(t,w)\, dt,$$

kde $E \subset \mathbb{R}$ je měřitelná množina.

Použijeme-li TRANSFORMACI na nějaký objekt (např. ODR, PDR či IDR) lze získat rovnici jednodušší (např. algebraickou či obyčejnou dif. rovnici v případě PDR či IDR), kterou snadno vyřešíme. AVŠAK, řešení je obraz řešení původního objektu. K úspěchu procesu hledání řešení pomocí transformace tedy potřebujeme umět <u>transformaci invertovat</u>.

[MOTIVACE SMĚREM K DEFINICI FOUR. TRANSFORMACE]

Uvažujme 2π-periodickou hladkou funkci $f : (0, 2\pi) \to \mathbb{C}$. Pak

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}, \\ c_k &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-ikx}\, dx, \\ &\text{a platí} \\ \|f\|^2_{L^2(0,2\pi)} &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

! Připomeňte si, proč vztahy (1) platí a jak jsme je získali.

Je-li f hladká, avšak ℓ-periodická, nemusím si vztahy analogické (1) pamatovat; snadno je odvodím záměnou proměnných. Vskutku:

je-li $\underbrace{f(x+\ell) = f(x) \text{ pro } \forall x \in \mathbb{R}}$, pak $F(x) := f\left(\frac{\ell}{2\pi}x\right)$ splňuje

$$F(x+2\pi) = f\left(\frac{\ell}{2\pi}(x+2\pi)\right) = f\left(\frac{\ell x}{2\pi}+\ell\right) = f\left(\frac{\ell x}{2\pi}\right) = F(x);$$

tedy F je 2π-periodická a splňuje vztahy (1), tj.

$$\left.\begin{aligned}
F(x) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} \\
c_k &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) e^{-ikx} dx \\
\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 &= \|F\|^2_{L^2(0,2\pi)} = \|F\|^2_{L^2(-\pi,\pi)}
\end{aligned}\right\} \quad (1')$$

Přechodem od F k f $\left(F(x) = f\left(\frac{\ell}{2\pi}x\right)\right)$ a substitucí $y = \frac{\ell x}{2\pi}$, následovanou přeznačením y zpět na x, dostáváme

$$\boxed{\left.\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{e^{i\frac{2\pi}{\ell}kx}}{\sqrt{2\pi}} \\
c_k &= \frac{\sqrt{2\pi}}{\ell} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} f(x) e^{-i\frac{2\pi}{\ell}kx} dx \\
\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 &= \frac{2\pi}{\ell} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} |f(x)|^2 dx
\end{aligned}\right\} \quad (2)}$$

Uvažujme nyní f, která <u>není</u> periodická, ale je definována na $\mathbb{R}$. Pak $f|_{(-\frac{\ell}{2},\frac{\ell}{2})}$, tj. f zúžená na interval $(-\frac{\ell}{2},\frac{\ell}{2})$ pro $\ell \gg 1$, může být rozšířena na $\mathbb{R}$, ℓ-periodicky a pro tuto ℓ-periodickou fci platí vztahy (2). Chceme prozkoumat chování (2) pro $\ell \to \infty$. K tomuto cíli označíme

$$\boxed{\xi_k := \frac{2\pi}{\ell}k} \quad \text{a} \quad \boxed{g(\xi_k) := \frac{\ell}{2\pi} c_k}$$

[jedná se o maličko odlišné označení dvou posloupností]

Pak z (2) dostáváme

$$(3)\quad \left[\begin{aligned} g(\xi_\ell) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\ell/2}^{\ell/2} f(x)\,e^{-ix\xi_\ell}\,dx,\\ f(x) &= \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} g(\xi_\ell)\,\frac{e^{ix\xi_\ell}}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{2\pi}{\ell} = \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} g(\xi_\ell)\,e^{ix\xi_\ell}(\xi_\ell-\xi_{\ell-1}),\\ \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} |g(\xi_\ell)|^2 \underbrace{(\xi_\ell-\xi_{\ell-1})}_{\frac{2\pi}{\ell}} &= \int_{-\ell/2}^{\ell/2} |f(x)|^2\,dx, \end{aligned}\right]$$

což dává formálně pro $\ell\to\infty$

$$(4)\quad \left[\begin{aligned} g(\xi) &\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,e^{-ix\xi}\,dx\\ f(x) &\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi)\,e^{ix\xi}\,d\xi\\ \int_{-\infty}^{+\infty} |g(\xi)|^2\,d\xi &= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\,dx \end{aligned}\right]$$

Tyto zdůvodněné formální úvahy nás přivádí k následující definici a značením:

Definice Buď $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}$. Definujme:

- Fourierovu transformaci f, značenou $\mathfrak{F}[f]$ či $\hat f$, vztahem

$$(F_T)\quad \boxed{\hat f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,e^{+ix\cdot\xi}\,dx} \qquad \xi\in\mathbb{R}^d$$

$$x\cdot\xi := \sum_{j=1}^{d} x_j\xi_j$$

- Inverzní Fourierovu transformaci, značenou $\mathfrak{F}^{-1}[f]$ či $\check f$, vztahem

$$(IF_T)\quad \check f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\,e^{-i\xi\cdot x}\,d\xi$$

Pokud nespecifikujeme, jaké vlastnosti má mít f, aby integrály ve výše uvedené definici byly konečné, je tato definice formální – nic nedefinuje, jen zavádí značení.

Naše úvahy, které nás přivedly k (4), naznačují, že lze očekávat platnost těchto vztahů

$$(5)\quad \boxed{\mathfrak{F}^{-1}(\mathfrak{F}[f]) = \mathfrak{F}[\mathfrak{F}^{-1}[f]] = f}$$ tzv. FOURIERŮV INVERZNÍ VZOREC

a

$$(6)\quad \boxed{\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|\mathfrak{F}[f]\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}}$$ PARSEVALOVA nebo PLANCHERELOVA IDENTITA

Naším cílem bude identifikovat třídy funkcí, pro které vztahy (F_T), (IF_T), (5) a (6) platí. Ukážeme si, že obecně $L^1(\mathbb{R}^d)$ dává smysl (F_T) i (IF_T), ale (5) a ani (6) pro $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ neplatí. Tedy $L^1(\mathbb{R}^d)$ obecně není vhodný prostor.

Na druhou stranu, vztahy (F_T), (IF_T), (5) a (6) byly odvozeny z Fourierových řad. Víme z minulého semestru, že vztah

$$f(x) = \sum c_k \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}$$

platí, pokud $f, f' \in L^2(-\pi,\pi)$, tedy pokud f je hladká (dostatečně). Hladkost sama však pro platnost vztahů týkající se Four. transformace nestačí. Musíme přidat dostatečný pokles v ∞. Tento požadavek nás přivede ke Schwartzově prostoru $\mathcal{S}$, viz také Příklad 3.

Uvažujme nejdříve Fourierovu transformaci pro $f \in L^1 := L^1(\mathbb{R}^d)$.
Pak $|F[f](s)| = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{ix\cdot s}\,dx \right| \le \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| \underbrace{|e^{ix\cdot s}|}_{=1} dx = C\|f\|_{L^1}$

Příklad 1

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{1+x^2}\right](s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} e^{ixs}\,dx$$

$\boxed{\text{Ověřte, že } \frac{1}{1+x^2} \in L^1(\mathbb{R})}$

$$\left\{ \begin{aligned} &\overset{s\ge 0}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2\pi i \operatorname{Res}_i \left(\frac{e^{+ixs}}{1+x^2}\right) = \sqrt{2\pi}\, i \frac{e^{-s}}{2i} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-s} \\ &\underset{s\le 0}{=} -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2\pi i \operatorname{Res}_{-i} \left(\frac{e^{-ixs}}{1+x^2}\right) = \sqrt{2\pi}\, i \frac{e^{+s}}{2i} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{+s} \end{aligned} \right\} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|s|}$$

Příklad 2

$$\mathcal{F}\left[\chi_{[-1,1]}\right](s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{ixs}\,dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin s}{s}$$

Vidíme, že • ačkoli $\chi_{[-1,1]} \in L^1(\mathbb{R}^d)$, tak $\mathcal{F}[\chi_{[-1,1]}](s) = c\frac{\sin s}{s} \notin L^1(\mathbb{R}^d)$

• ačkoli $\chi_{[-1,1]}$ má kompaktní nosič, tak $\frac{\sin s}{s}$ kompaktní nosič nemá

(7) • $\lim_{s\to\infty} \mathcal{F}[\chi_{[-1,1]}](s) = 0.$

Prostor L^1, jak ukazuje příklad 2, není vhodný prostor, na kterém by obecně platil Fourierův inverzní vzorec (5). Některé zajímavé vlastnosti však Fourierova transformace na prostoru $L^1(\mathbb{R}^d)$ má a stojí za to si je uvést. Ještě předtím však zavedeme ještě jeden pojem: <u>konvoluce</u> dvou funkcí.

$\boxed{\text{Def.}}$ Buď $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Definujme KONVOLUCI FUNKCÍ f A g předpisem

$$(f*g)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\,g(y)\,dy$$

Protože evidentně neplatí implikace „$f \in L^1, g \in L^1 \Rightarrow fg \in L^1$" (Najděte protipříklad!), je překvapivé, že pro definici konvoluce stačí pouze integrovatelnost f a g, jak mimojiné ukazuje následující věta.

<u>Věta 16.1</u> (vlastnosti konvoluce) Platí následující:

- Jsou-li $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, pak $f*g = g*f$ a $f*g \in L^1(\mathbb{R}^d)$
- Jsou-li $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ a $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$, pak $f*g \in L^p(\mathbb{R}^d)$.

Dk: Ověříme "pouze" druhé tvrzení. Platí, pro $p>1$,

$$\|f*g\|_{L^p}^p = \int_{\mathbb{R}^d} |(f*g)(x)|^p\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\,g(y)\,dy \right|^p dx$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|\,|g(y)|\,dy \right)^p dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{|f(x-y)|^{\frac{1}{p}}\,|g(y)|}_{G}\ \underbrace{|f(x-y)|^{\frac{1}{p'}}}_{F}\,dy \Big)^p dx$$

Höldrova nerovnost aplikovaná na $G \in L^p$, $F \in L^{p'}$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|\,|g(y)|^p\,dy \Big) \underbrace{\Big(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|\,dy \Big)^{p/p'}}_{\|f\|_{L^1}^{p-1}} dx$$

$\frac{p}{p'} = \frac{p(p-1)}{p} = p-1$

$$\leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}^{p-1} \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|\,|g(y)|^p\,dy\,dx$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}^{p-1} \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|\,dx}_{\|f\|_{L^1}} \Big) |g(y)|^p\,dy \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}\,\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

$\boxed{\text{Q}}$

Cvičení: Projděte si podrobně důkaz pro $p=1$.

$\boxed{\text{Věta 16.2}}$ Vlastnosti Fourierovy transformace na $L^1(\mathbb{R}^d)$

(i) $f \in L^1 \Rightarrow \hat{f} \in C(\mathbb{R}^d)$ a $\sup |\hat{f}(x)| =: \|\hat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$

(ii) $f, g \in L^1 \Rightarrow \widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g} (2\pi)^{d/2}$

(iii) $\lim_{|s| \to \infty} \hat{f}(s) = 0$ pro $f \in L^1$

(iv) $\widehat{\tau_y f}(s) = e^{iy \cdot s} \hat{f}(s)$ přičemž $(\tau_y f)(x) = f(x+y)$ $\forall x \in \mathbb{R}^d$ (shift = posun o y)

(v) $\widehat{f(\alpha x)}(s) = \frac{1}{|\alpha|^d} \hat{f}\left(\frac{s}{\alpha}\right)$

Dk $\boxed{\text{Ad (i)}}$ $|\hat{f}(s)| = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{ix \cdot s} dx \right| \underset{|e^{ix \cdot s}| = 1}{\leq} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int |f(x)| dx = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$

Přechodem k $\sup_s$ dostáváme druhou část tvrzení $\mathcal{F}: L^1 \to L^\infty$. Skutečnost, že $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}^d)) \subset C(\mathbb{R}^d)$ plyne z věty o spojitosti integrálu závislém na parametru.

$\boxed{\text{Ad (ii)}}$ Dle Věty 16.1 víme, že z $f, g \in L^1$ plyne $f * g \in L^1$ a také $f * g = g * f$. Víme tedy, že $\widehat{f * g} \in C(\mathbb{R}^d)$.

Počítejme

$$\widehat{f * g}(s) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} (f * g)(x) e^{ix \cdot s} dx \overset{\text{Fubini}}{=} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) g(y) e^{ix \cdot s} dx dy$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(z) g(y) e^{iy \cdot s} e^{iz \cdot s} dy dz =$$

$$= (2\pi)^{d/2} \left(\frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(z) e^{iz \cdot s} dz \right) \left(\frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} g(y) e^{iy \cdot s} dy \right) = (2\pi)^{d/2} \hat{f}(s) \hat{g}(s).$$

$\boxed{\text{Ad (iii)}}$ BÚNO lze předpokládat, že $f \geq 0$ (jinak $f = f^+ - f^-$),
BÚNO — " — , že $f = \chi_{[-l, l]}$ (neb pro $f \geq 0$ $\exists h_n \nearrow f$, h_n schodovité a $\underbrace{\operatorname{supp} h_n}$ kompaktní.

Avšak, dle Př. 2, $\frac{2}{\sqrt{2\pi}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$

$$\hat{f}(s) = \hat{\chi}_{[-l, l]}(s) = c \frac{\sin ls}{s} \to 0 \text{ pro } s \to \infty.$$

$\boxed{\text{Ad (iv) a (v)}}$ si dokažte sami pomocí věty o substituci.

$\blacksquare$

Obecně prostor $L^1(\mathbb{R}^d)$ není optimální pro platnost Fourierova inverzního vzorce, viz Příklad 2. Říkali jsme si, že hladké funkce s (dostatečnou) kontrolou chování v ∞ by mohly vést k cíli.

Mohli bychom uvažovat hladké funkce s kompaktním nosičem,

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) := \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d);\ \operatorname{supp}\varphi \text{ je kompaktní}\}$$
$$= \{\text{hladké funkce, které jsou vně nějakého intervalu nulové}\}$$

Připomenutí: $\operatorname{supp}\varphi = \overline{\{x\in\mathbb{R}^d;\ \varphi(x)\neq 0\}}$ uzávěr

Jak však ukazuje později druhý příklad (Př. 2 výše), obraz funkcí s kompaktním nosičem není obecně funkce s kompaktním nosičem. Tedy se opět dostávám mimo prostor na kterém jsem chtěl pracovat. K "správné" volbě prostoru nám může pomoci i následující příklad.

<u>Příklad 3</u> (Fourierova transformace $e^{-|x|^2/2}$)

<u>spočtěme</u> $\mathcal{F}^{-1}[e^{-|x|^2/2}]$. Dle definice ($x\in\mathbb{R}^d$)

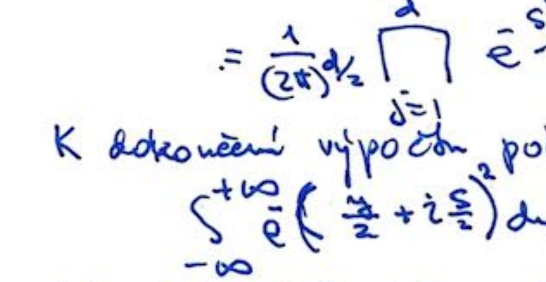
$$\mathcal{F}^{-1}[e^{-|x|^2/2}](s) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|x|^2}{2}} e^{-ix\cdot s}\,dx = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\sum_{j=1}^{d}(\frac{x_j^2}{2}+ix_js_j)}\,dx_1\dots dx_d$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\prod_{j=1}^{d}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\frac{x_j^2}{2}+ix_js_j-\frac{s_j^2}{2})}\,dx_j\; e^{-\frac{s_j^2}{2}}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\prod_{j=1}^{d} e^{-\frac{s_j^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\frac{x_j}{2}+i\frac{s_j}{2})^2}\,dx_j$$

K dokončení výpočtu potřebujeme spočíst

$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\frac{y}{2}+i\frac{s}{2})^2}\,dy$, což provedeme pomocí residuové (Cauchyho věty) integrací podél křivky naznačené na Obr. 1 pro funkci $e^{-(\frac{z}{2})^2}$, která je holomorfní v $\mathbb{C}$. Dostaneme



$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} e^{-(\frac{y}{2}+i\frac{s}{2})^2}\,dy = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} e^{-\frac{y^2}{2}} = \underline{\sqrt{\pi}\sqrt{2}}$$

neboť $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \underline{\sqrt{\pi}}$

Po <u>dosazení dostáváme</u>

$$\boxed{\mathcal{F}^{-1}[e^{-|x|^2/2}](s) = e^{-|s|^2/2}}$$

Předchozí příklad říká, že funkce $e^{-|x|^2/2}$ je invariantní vzhledem k Fourierově transformaci a také, že pro ni platí Fourierův inverzní vzorec. Funkce $e^{-|x|^2/2}$ nemá kompaktní nosič, ale klesá velmi rychle v ∞.

<u>Definice</u> Řekneme, že $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ je <u>rychle klesající</u> pro $x \to \infty$

$$\equiv \forall m \in \mathbb{N} \ \exists M_m > 0 \text{ tak, že } |f(x)| \leq M_m |x|^{-m}$$

Ekvivalentně lze říci, že f je <u>rychle klesající</u> pro $x \to \infty$ právě když $\lim\limits_{x \to \infty} p(x) f(x) = 0$ pro libovolný polynom.

<u>Definice</u> (Schwartzův prostor $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$).

$\mathcal{S} := \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^d);$ f a všechny její derivace jsou rychle klesající $\}$.

Protože $e^{-|x|^2/2} \in \mathcal{S}$, ale nemá kompaktní nosič ($\operatorname{supp} e^{-|x|^2/2} = \mathbb{R}^d$), tak $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subsetneq \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Nyní si ukážeme, že $\mathcal{S}$ má spoustu užitečných vlastností, které např. prostor L^1 nemá.

$\boxed{\text{Vlastnosti } \mathcal{S}}$

	VLASTNOST	MATEMATICKÝ ZÁPIS	L^1 ANO ČI NE?
①	$\mathcal{S}$ je vektorový prostor	$f,g \in \mathcal{S}, \alpha \in \mathbb{C} \Rightarrow \alpha f, f+g \in \mathcal{S}$	✓
②	$\mathcal{S}$ je algebra	$f,g \in \mathcal{S} \Rightarrow fg \in \mathcal{S}$	×
③	$\mathcal{S}$ je uzavřený na násobení polynomem	$f \in \mathcal{S}, p \in \mathcal{P} \Rightarrow pf \in \mathcal{S}$	×
④	$\mathcal{S}$ je uzavřený na derivování	$\forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ multiindex $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$ $f \in \mathcal{S} \Rightarrow D^\alpha f := \frac{\partial^{\lvert\alpha\rvert} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}} \in \mathcal{S}$	×
⑤	$\mathcal{S}$ je uzavřená na posunutí a násobení $e^{ix \cdot s}$	$f \in \mathcal{S} \Rightarrow \tau_y f \in \mathcal{S}, e^{ix \cdot s} f \in \mathcal{S}$	✓
⑥	$\mathcal{S}$ je podmnožina integrovatelných funkcí	$f \in \mathcal{S} \Rightarrow f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ pro $\forall p \in [1, \infty]$	částečně $L^1 \not\subset L^p$, $p>1$; $L^p \not\subset L^1$, $p>1$; POZOR, JSEM NA CELÉM PROST.

Vlastnosti ① – ⑥ si ověřte sami. Ukážeme, že:

$$\underline{\mathcal{S} \subset L^1(\mathbb{R}^d)}$$

Buď $f \in \mathcal{S}$, pak $\exists\, M_{d+1} > 0$ tak, že $|f(x)| \leq \dfrac{M_{d+1}}{|x|^{d+1}}$ a $\forall x \in \mathbb{R}^d \setminus B_R(0)$
$\exists\, R \gg 1$

Tedy
$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|\,dx \leq \int_{B_R(0)} |f(x)|\,dx + \int_{\mathbb{R}^d \setminus B_R(0)} |f(x)|\,dx$$
$$\leq \underbrace{\sup_{x \in \overline{B_R(0)}} |f(x)|\, |B_R(0)|}_{<+\infty} + M_{d+1} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d \setminus B_R(0)} \frac{dx}{|x|^{d+1}}}$$

subst: zobecněné sférické souř.

$$\tilde{C} \int_R^\infty \frac{r^{d-1}}{r^{d+1}}\,dr \leq \frac{\tilde{C}}{R} < +\infty,$$

což jsme chtěli ukázat.

Z poslední vlastnosti plyne, že vše o vlastnostech Fourierovy transformace na L^1 platí i pro Fourierovu transformaci na $\mathcal{S}$. Mimojiné máme

$$\boxed{f, g \in \mathcal{S} \implies \mathcal{F}(f * g) = (2\pi)^{d/2}\, \mathcal{F}(f)\, \mathcal{F}(g)}$$

Protože $\mathcal{F}^{-1}[F(x)] = \mathcal{F}[F(-x)]$, tak také platí

$$\mathcal{F}^{-1}(f)\, \mathcal{F}^{-1}(g) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\, \mathcal{F}^{-1}(f * g)$$

Substitucí $f = \mathcal{F}(f)$ a $g = \mathcal{F}(g)$ dostaneme (za předpokladu, že platí Fourierova inverzní vzorec)

$$f \cdot g = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\, \mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{F}[f] * \mathcal{F}[g]\right).$$

Aplikujeme-li na tuto rovnici Fourierovu transformaci, dostaneme

$$\boxed{\mathcal{F}[f \cdot g] = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\, \mathcal{F}[f] * \mathcal{F}[g]}$$

Tedy, za předpokladu že na $\mathcal{S}$ platí Fourierův inverzní vzorec (což ověřujeme), dostáváme

- Fourierova transformace konvoluce je součin Fourierových transf.
- Fourierova –"– součinu je konvoluce Four. transformací.

Následující tvrzení ilustruje jednu z klíčových vlastností Fourierovy transformace, opět ve dvou tvarech:

- Fourierova transformace derivace je "polynomiální" násobek Fourierovy transformace.
- Fourierova transf. "polynomiálního násobku fce" je derivace Fourierovy transf.

Věta 16.3 (α) $\forall f \in \mathcal{S}$ platí
- $\widehat{D^\alpha f}(s) = (-1)^{|\alpha|} (is)^\alpha \hat{f}(s)$
- $\widehat{(ix)^\alpha f(x)}(s) = D^\alpha \hat{f}(s)$

(β) $\mathcal{F}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}$ a $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}$

Dk. **Ad (α)** Provedeme pro $\alpha = (0, \dots, \underset{j\text{-té místo}}{1}, \dots)$

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\right](s) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) e^{ix \cdot s}\, dx$$

$x \cdot s = \underbrace{x_1 s_1 + \dots + x_d s_d}_{\hat{x} \cdot \hat{s}} + x_j s_j$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \Big(\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) e^{i x_j s_j} dx_j}_{\text{per partes - zde využíváme, že } f \in \mathcal{S}} \Big) e^{i \hat{x} \cdot \hat{s}}\, d\hat{x}$$

$$= -\frac{i s_j}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i x_j s_j} dx_j \Big) e^{i\hat{x}\cdot\hat{s}}\, d\hat{x} = -i s_j \mathcal{F}[f](s)$$

Dále

$$\mathcal{F}[i x_j f(x)](s) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{i x_j f(x) e^{ix \cdot s}}_{= \frac{\partial}{\partial s_j}\left(e^{ix\cdot s}\right)}\, dx$$

záměna integrálu a derivace $\longrightarrow$ $= \frac{\partial}{\partial s_j} \left(\frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{ix \cdot s}\, dx \right) = \frac{\partial}{\partial s_j} \mathcal{F}[f](s)$

Ad (β) Připomeň $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) = \{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d);\ \sup |x^\beta D^\alpha f(x)| < +\infty$ pro libovolné multiindexy α a $\beta \}$.

- Protože $D^\alpha \hat{f}(s) = \widehat{(ix)^\alpha f(x)}(s)$ a $(ix)^\alpha f(x) \in \mathcal{S}$ a Fourierova transformace funkcí z $\mathcal{S}$ je konečná, tak $D^\alpha \hat{f}(s) < \infty$ pro $\forall \alpha$ a navíc je spojitá dle věty o spojité závislosti integrálu na parametru. Tj. $\forall \alpha$ $D^\alpha \hat{f} \in C(\mathbb{R}^d)$.
- Chceme ukázat, že $\forall$ polynom p a $\forall \alpha$: $\sup_s |p(s) D^\alpha \hat{f}(s)| < \infty$ stačí $\sup_s |s^\beta \hat{f}(s)| < \infty$. Dle části $(\alpha)_1$ však tvrzení plyne ze skutečnosti, že $D^\beta f \in \mathcal{S}$. ▨

Shrňme si základní vlastnosti Fourierovy transformace do následující tabulky

Funkce f (x)	Fourierova transformace $\hat{f}$ (s)
$f(x)$	$\hat{f}(s)$
$\tau_y f(x) := f(x+y)$	$e^{-ix\cdot s}\hat{f}(s)$
$e^{ix\cdot y} f(x)$	$\hat{f}(s+y) = \tau_y \hat{f}(s)$
$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$	$-is_k \hat{f}(s)$
$i x_k f(x)$	$\frac{\partial}{\partial s_k}(\hat{f}(s))$
$p\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right) f(x)$	$p(-i s_k)\hat{f}(s)$
$p(x) f(x)$	$p\left(-i\frac{\partial}{\partial s}\right)\hat{f}(s)$
$(f*g)(x)$	$(2\pi)^{d/2}\hat{f}(s)\hat{g}(s)$
$f(x)g(x)$	$\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}(\hat{f}*\hat{g})(s)$

Šipky indikují jistou symetrii operací a Fourierovy transformace.

$\boxed{\text{Řešení Cauchyho úlohy pro obecnou nehomogenní rci vedení tepla}}$

Uvažujme lineární evoluční PDR $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f$ v celém prostoru $\mathbb{R}^d$. Cílem je nalézt řešení tzv. Cauchyho úlohy, tedy hledám řešení rovnice v celém prostoru $\mathbb{R}^d$ s zadanou počáteční podmínkou v čase $t=0$. Tedy

<u>Cauchyho úloha pro rovnici vedení tepla</u>

nalézt $u : (0,T)\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ splňující

$$(T) \qquad \left[\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u &= f \quad \text{v } (0,\infty)\times\mathbb{R}^d \\ u(0,\cdot) &= u_0 \quad \text{v } \mathbb{R}^d, \end{aligned}\right.$$

kde $f : (0,T)\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ a $u_0 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ jsou <u>data</u> úlohy, tedy <u>dané</u> libovolné.

Úloha (T) je lineární (Proč?) a lze ji získat z rovnice bilancující energii v termodynamice kontinua:

$$\frac{\partial e}{\partial t} + v\cdot\nabla e = \mathbb{T}\cdot\left(\frac{\nabla v + (\nabla v)^T}{2}\right) - \operatorname{div}\vec{q} + r$$

za předpokladu, že těleso je v klidu a tak rychlost $\vec{v} = 0$ a vnitřní energie e je úměrná teplotě u (tj. $e = c_v u$, kde $c_v > 0$ je měrné teplo při konstantním objemu) a tepelný tok $\vec{q}$ je nepřímo úměrný gradientu teploty (tj. $\vec{q} = -\kappa\nabla u$, kde $\kappa > 0$ je koeficient tepelné vodivosti). Pak

$$c_v\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa\Delta u = r,$$

kde r je daný objemový zdroj (radiace). [Symbol $\mathbb{T}$ uvedený výše představuje tenzor napětí.]

Předpokládejme, že pro $\forall\, \tau > 0$ je $f(\tau,\cdot) \in \mathcal{S}$ a také $u_0 \in \mathcal{S}$. Hledáme řešení splňující (T) tak, aby

$$u(t,\cdot) \in \mathcal{S} \quad \text{pro } t > 0.$$

Řešení budeme hledat tak, že na rovnici vedení tepla aplikujeme Four. transformaci, tj. násobím rovnici $e^{ix\cdot s}$, integruji přes $\mathbb{R}^d$ vzhledem $\underline{x}$ a poté vše vydělím $(2\pi)^{d/2}$. Čas t je nyní pro nás parametr. Dostáváme:

$$(\hat{T}) \left[\begin{array}{lll} \dfrac{\partial \hat{u}}{\partial t}(t,s) + |s|^2 \hat{u}(t,s) = \hat{f}(t,s) & & v\ (0,\infty)\times\mathbb{R}^d \\ \hat{u}(0,s) = \hat{u}_0(s) & & v\ \mathbb{R}^d \end{array} \right.$$

Zdánlivě jsme si příliš nepolepšili. Opak je však pravdou. V $(\hat{T})$ již nemáme Laplaceův operátor a na $(\hat{T})_1$ se lze dívat jako na ODR pro $\hat{u}$, kde proměnná je čas a $s \in \mathbb{R}^d$ je parametr. Rovnici $(\hat{T})$ řešíme integračním faktorem $e^{|s|^2 t}$, tj. $(\hat{T})_1$ vynásobíme a dostaneme

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\hat{u}(t,s)\, e^{|s|^2 t}\right) = \hat{f}(t,s)\, e^{|s|^2 t}$$

Integrací přes čas od 0 do t a s použitím $(\hat{T})_2$ dostáváme

$$\hat{u}(t,s)\, e^{|s|^2 t} - \hat{u}_0(s) = \int_0^t \hat{f}(\tau,s)\, e^{|s|^2 \tau}\, d\tau,$$

což po vynásobení $e^{-|s|^2 t}$ vede k vztahu

$$(*) \qquad \hat{u}(t,s) = \hat{u}_0(s)\, e^{-|s|^2 t} + \int_0^t \hat{f}(\tau,s)\, e^{-|s|^2 (t-\tau)}\, d\tau$$

V tomto okamžiku jsme našli řešení úlohy, ale to řešení máme popsané v obrazu Fourierovy transformace. Potřebujeme tedy aplikovat na $(*)$ inverzní Four. transf. Pokud platí Fourierův inverzní vzorec (což předpokládáme), tak na levé straně $(*)$ dostaneme u. Napravo máme součiny, které chceme dostat do tvaru součinu dvou Fourierových transformací a pak použijeme výsledek, že Four. transformace konvoluce je (až na $(2\pi)^{d/2}$ násobek) součin Four. transformací jednotlivých funkcí.

Snadno si z Přílohy 3 ověříme, že

$$e^{-|s|^2 t} = \mathcal{F}\left[\frac{1}{(2t)^{d/2}}\, e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\right]$$

Definujme

$$\boxed{G(t,x) = G_t(x) := \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}}\, e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}$$

čas t má roli parametru, proto dvojí značení.

Pak (*) přepíšeme do tvaru

$$(*)_{mod}\quad \hat{u}(t,s) = (2\pi)^{d/2}\hat{u}_0(s)\,\widehat{G_t(x)}(s) + \int_0^t (2\pi)^{d/2}\hat{f}_\tau(s)\,\widehat{G_{t-\tau}}(s)\,d\tau$$

Z věty 1.2 (ii), pak $(*)_{mod}$ přepíšeme do tvaru

$$\hat{u}(t,s) = \widehat{u_0 * G_t}(s) + \int_0^t \widehat{f(\tau,\cdot) * G_{t-\tau}(\cdot)}(s)\,d\tau$$

Aplikací Inverzní Fourierovy transformace nakonec dostaneme

(Ř) $$\boxed{u(t,x) = (u_0 * G_t)(x) + \int_0^t \big(f(\tau,\cdot) * G_{t-\tau}\big)(x)\,d\tau}$$

což je hledané řešení pro libovolné u_0 a f.

Dosadíme-li explicitně vzorec pro G_t, dostaneme

$$\boxed{u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} u_0(y)\frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{d/2}}\,dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} f(\tau,y)\frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-\tau)}}}{(4\pi(t-\tau))^{d/2}}\,dy\,d\tau}$$

Gaussián G_t se také nazývá Fundamentální řeš. rovnice vedení tepla. Má několik význačných vlastností (viz následující Lemma) a řeší $\left[\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \text{ s } u(0,\cdot) = \delta_0\right]$ jak vidíme později.

Diracova distribuce v poč.

Lemma (Důležité vlastnosti Gaussiánu G_t)

(1) $\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[G_t]] = G_t$

(2) $G_t \geq 0$

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty} G_t(x)\,dx = 1$ (rozdělení 1)

(4) $\lim_{t\to 0+} G_t(x) = 0$ if $x \neq 0$ (konvergence je stejnoměrná na $|x| \geq \varepsilon$ pro $\forall \varepsilon > 0$)

(5) $\lim_{t\to 0+} G_t * u_0 = u_0$ (NABÝVÁNÍ POČ. PODMÍNKY ŘEŠENÍM (Ř*))

Dk (1)–(4) si povedte sami pomocí Př. 3, škálování!

Ad (5) Platí $\quad z = \frac{y-x}{2\sqrt{t}} \Leftrightarrow y_i = x_i + 2\sqrt{t}\,z_i$

$$(G_t * u_0)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y)\,dy = \frac{1}{(\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|z|^2} u_0(x+2\sqrt{t}z)\,dz$$

záměnou $\lim_{t\to 0}$ a $\int_{\mathbb{R}^d}$, pomocí Lebesgueovy věty, dokážeme tvrzení. ◻

Věta 16.4 (Schwartzova – Laurent Schwartz – Francouzský mat. 20. století)

$\mathcal{F} : \mathcal{S} \xrightarrow{\text{na}} \mathcal{S}$ a $\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S} \xrightarrow{\text{na}} \mathcal{S}$ a platí $\|\mathcal{F}[f]\|_{L^2} = \|f\|_{L^2} = \|\mathcal{F}^{-1}[f]\|_{L^2}$.

(Dk) Nyní dokážeme tak, že ověříme platnost Fourierova inverzního vzorečku.

Důkaz nelze provést přímo:

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}[f])(s) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-is\cdot y} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int f(x) e^{iy\cdot x}\, dx\, dy$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{iy\cdot(x-s)}\, dx\, dy = f(s) \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} dy = +\infty.$$

veličina u y neurčitá jen pro $x=s$

Využijeme však vlastnosti G_t.

Buď $f \in \mathcal{S}$ libovolné. Definujme $H_t(x) := (G_t * f)(x)$.

Pak

$$\hat{H}_t(s) = (2\pi)^{d/2} \hat{G}_t(s) \hat{f}(s)$$

a

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{H}_t(s)](x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot s} \hat{H}_t(s)\, ds$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot s} \hat{G}_t(s) \hat{f}(s)\, ds$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot s} \hat{G}_t(s) \int_{\mathbb{R}^d} f(y) e^{iy\cdot s}\, dy\, ds$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} \hat{G}_t(s)\, e^{-is\cdot(x-y)}\, ds}_{\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[G_t]](x-y) \underset{\text{Lemma (1)}}{=} G_t(x-y)}\, dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) G_t(x-y)\, dy = (f * G_t)(x)$$

z věty o konvoluci $\|f * G_t\|_{L^1} \le \|f\|_{L^1} \|G_t\|_{L^1}$.

Tedy $\lim\limits_{t\to 0} f * G_t = f$

Naopak však máme $\lim\limits_{t\to 0} \mathcal{F}^{-1}(\hat{H}_t(s))(x)$, což vede k

$$\lim_{t\to 0+} \mathcal{F}^{-1}(\hat{H}_t(s))(x) = \lim_{t\to 0+} \mathcal{F}^{-1}\left((2\pi)^{d/2} \hat{G}_t(s) \hat{f}(s)\right)(x)$$

$$= \mathcal{F}^{-1}\Big(\underbrace{\lim_{t\to 0+} (2\pi)^{d/2} \hat{G}_t(s)}_{=1 \text{ (viz výše)}} \hat{f}(s)\Big)(x) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}(s))(x) = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]](x).$$

Zbývá dokázat platnost Parsevalovy rovnosti. Buď $f, g \in \mathcal{S}$, pak dle definice

$$\underline{(\hat f, \hat g)_{L^2(\mathbb{R}^d)}} = \int_{\mathbb{R}^d} \hat f(s)\overline{\hat g(s)}\,ds = \int_{\mathbb{R}^d} \hat f(s)\, \overline{\frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} g(x) e^{ix\cdot s}\,dx}\, ds$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \hat f(s) \int_{\mathbb{R}^d} \overline{g(x)}\, e^{-ix\cdot s}\,dx\,ds$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \hat f(s)\overline{g(x)}\, e^{-ix\cdot s}\,dx\,ds$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{\left(\frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \hat f(s) e^{-ix\cdot s}\,ds \right)}_{\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]](x)} \overline{g(x)}\,dx$$

$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]](x)$, což se dle dokázaného Fourierovy inverzního vzorce rovná $f(x)$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

$$= \underline{(f, g)_{L^2(\mathbb{R}^d)}}$$

Tedy $\quad \|\hat f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \qquad (\clubsuit)$

Nechť $g \in \mathcal{S}$ a $\underset{\in \mathcal{S}}{\check g =: h}$, pak $\hat h = g$ a dle $(\clubsuit)$

$$\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|\check g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Ověřme, pro úplnost, že $\lim_{t\to 0} \mathcal{F}^{-1}\left(\hat G_t(s)\hat f(s)\right) = \mathcal{F}^{-1}\left(\lim \hat G_t(s)\hat f(s)\right)$.

Máme vždy
$$\mathcal{F}^{-1}\left(\hat G_t(s)\hat f(s)\right)(y) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|y|^2 t} \hat f(y) e^{iy\cdot s}\,dy =: I$$

a $|I| \le \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} |\hat f(y)|\,dy < \infty$ neboť $f \in \mathcal{S} \Rightarrow \hat f \in \mathcal{S}$ dle Věty 1.3 (b).
a $\mathcal{S} \subset L^1(\mathbb{R}^d)$

Tedy dle Lebesgueovy věty můžeme zaměnit $\lim_{t\to 0+}$ a $\mathcal{F}^{-1}$.

Důkaz věty 16.4 je úplný. $\blacksquare$

FOURIEROVA TRANSFORMACE NA $L^2(\mathbb{R}^d)$

Poslední část první kapitoly věnujeme rozšíření Fourierovy transformace z $\mathcal{S}$ na L^2. Klíčem bude Parsevalova rovnost dokázaná ve větě 1.5, která platí pro funkce z $\mathcal{S}$ a hustota fcí z $\mathcal{S}$ v $L^2(\mathbb{R}^d)$.

ÚMLUVA : v následující části

$\hat{f}$ značí Fourierovu transf. pro $f \in \mathcal{S}$

zatímco $\mathcal{F}[f]$ — " — — " — pro $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

Tu teď budeme konstruovat. Pozor,

$\mathcal{F}[f]$ pro $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ <u>**NENÍ**</u> dána integrálem $\frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{ix\cdot s} dx$.

$\boxed{\text{Konstrukce}}$ [Užitečný matematický postup.]

① Protože $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ jsou husté v $L^2(\mathbb{R}^d)$ a

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^2(\mathbb{R}^d), \text{ tak}$$

<u>$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ jsou husté v $L^2(\mathbb{R}^d)$</u>

Pro $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ tak $\exists \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}$ tak, že

$$f_n \to f \text{ v } L^2(\mathbb{R}^d) \text{ tzn. } \|f_n - f\|_{L^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Je-li $\{f_n\}$ konvergentní, je cauchyovská. Tedy $(\forall \varepsilon > 0)$ od jistého n_0 $\|f_n - f_m\|_{L^2} < \varepsilon$ pro všechna $n, m \geq n_0$

② Aplikujeme-li Parsevalovu rovnost z věty 1.5 na $f_n - f_m \in \mathcal{S}$ dostáváme

$$\|f_n - f_m\|_{L^2} = \|\hat{f}_n - \hat{f}_m\|_{L^2} = \|\check{f}_n - \check{f}_m\|_{L^2}$$

Z cauchyovskosti $\{f_n\}$ a z této identity plyne, že $\{\hat{f}_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{\check{f}_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou cauchyovské. Mají tedy limitu (neboť L^2 je úplný) a tyto limity jsou hledané Fourierovy transformace:

$$\underline{\underline{\mathcal{F}[f] \overset{\text{def.}}{=} \lim\{\hat{f}_n\}}} \quad \text{a} \quad \underline{\underline{\mathcal{F}^{-1}[f] \overset{\text{def}}{=} \lim\{\check{f}_n\}}}$$

Věta 16.6 (Vlastnosti Fourierovy transf. na $L^2(\mathbb{R}^d)$)

(1) Je-li $f \in L^2$, pak $\mathcal{F}[f]$ nezávisí na volbě $\{f_n\}_{n=1}^\infty$

(2) $\mathcal{F}$ a $\mathcal{F}^{-1}$ jsou inverzní, tzn. $\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]] = f$ pro $\forall f \in L^2$

(3) Je-li $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$, pak $\mathcal{F}[f] = \hat{f}$ s.v. v $\mathbb{R}^d$

(4) Je-li $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ a $\hat{f}_n(s) := \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{B_n(0)} f(x)\, e^{ix\cdot s}\, dx$,

$$\text{pak } \mathcal{F}[f](s) = \lim_{n\to\infty} \hat{f}_n(s) \quad \text{v } L^2(\mathbb{R}^d)$$

[toto je návod, jak počítat Four. transf. pro $f \in L^2$].

(5) $\mathcal{F}: L^2 \xrightarrow{\text{na}} L^2$ je isometrie: $\|\mathcal{F}[f]\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$.

Dk) **Ad (1)** Uvažujme dvě různé posloupnosti $\{f_n^1\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{S}$ a $\{f_n^2\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{S}$ konvergující k f v $L^2(\mathbb{R}^d)$. Pak však $f_n^1 - f_n^2 \to 0$ v $L^2(\mathbb{R}^d)$. Dále víme, že prvky $h \in \mathcal{S}$ splňují:

$$\|h\|_{L^2} = \|\hat{h}\|_{L^2} = \|\check{h}\|_{L^2} \quad \text{a} \quad (\hat{h})^\vee = h.$$

(dle Schwartzovy věty).

Tedy

$$\|f_n^1 - f_n^2\|_{L^2} = \|\hat{f}_n^1 - \hat{f}_n^2\|_{L^2} = \|\check{f}_n^1 - \check{f}_n^2\|_{L^2}.$$

Protože první člen konverguje k nule, tak vidíme, že $\hat{f}_n^1$ a $\hat{f}_n^2$ (a $\check{f}_n^1$ a $\check{f}_n^2$) dávají stejnou limitu a to $\mathcal{F}[f]$ (resp. $\mathcal{F}^{-1}[f]$).

Ad (2) Buď $\{f_n\} \subset \mathcal{S}$ taková, že $f_n \to f$ v $L^2(\mathbb{R}^d)$. Pak

$$f_n = [\hat{f}_n]^\vee \quad \text{a} \quad \hat{f}_n \to \mathcal{F}[f] \text{ v } L^2(\mathbb{R}^d)$$

Víme, že $g_n := \hat{f}_n \to \mathcal{F}[f] =: g$ v L^2 a $\{g_n\} \subset \mathcal{S}$

Tedy $\check{g}_n \to \mathcal{F}^{-1}[g]$. Avšak tzn. $f_n \to \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]]$ v L^2.

Protože $f_n \to f$ v L^2 tak musí platit $\underline{f = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]]}$.

Ad (3) Je-li $f \in L^1 \cap L^2$, pak $\exists \{f_n\} \subset \mathcal{S}$ tak, že $f_n \to f$ v L^1, $f_n \to f$ v L^2

a $\boxed{\hat{f}_n(s) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f^n(x)\, e^{ix\cdot s}\, dx}$ $(\bullet)$

Protože $f^n \to f$ v L^1, tak $\frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f^n(x) e^{ix\cdot s} dx \to \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{ix\cdot s} dx$.

[Skutečně $\frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \left| \int_{\mathbb{R}^d} (f^n(x) - f(x)) e^{ix\cdot s} dx \right| \le \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} |f^n(x) - f(x)| dx$

$= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \|f^n - f\|_{L^1}$

Protože $f^n \to f$ v L^2, tak $\hat{f}_n \to \mathcal{F}[f]$ v L^2
a dle Rieszovy věty existuje vybraná podposloupnost $\hat{f}^{m_k}$
tak, že $\hat{f}^{m_k} \to \mathcal{F}[f]$ s.v. v $\mathbb{R}^d$.
Tvrzení plyne z limitního přechodu v (0) aplikovaného na f^{m_k}.

$\boxed{\text{Ad (5)}}$ Isometrie Fourierovy transformace plyne z rozšíření platnosti Parsevalovy / Plancherelovy rovnosti z $\mathcal{S}$ na L^2, viz bod (2).

$\boxed{\text{Ad (4)}}$ Buď $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ a označme $f_n := f \chi_{B(0,n)}$.
Pak zjevně $f_n \in L^2(\mathbb{R}^d)$ a $f_n \to f$ v $L^2(\mathbb{R}^d)$,
což znamená, že $\int_{\mathbb{R}^d \setminus B_n(0)} |f|^2 = \int_{\mathbb{R}^d} |f - f_n|^2 \to 0$ pro $n \to \infty$.

Dále

$$\underbrace{\mathcal{F}[f_n] = \hat{f}_n}_{\text{dle (3)}} \text{ s.v.} \quad \text{a} \quad \mathcal{F}[f_n] \to \mathcal{F}[f] \text{ v } L^2(\mathbb{R}^d)$$

díky rozšířené verzi Parsevalovy rovnosti pro funkce z $L^2(\mathbb{R}^d)$

■

$\boxed{\text{DODATEK}}$ Vlastnosti $\hat{f}$ na $L^1(\mathbb{R}^d)$

Platí následující tvrzení, která nebudeme dokazovat.

Tvrzení 1 Buď $f \in L^1(\mathbb{R})$ a $x_0 \in \mathbb{R}$ takové, že

(i) $\exists \lim_{x \to x_0 \pm} f(x) = f(x_0 \pm)$

(ii) $\exists\, \delta > 0\ \exists\, M$ $\quad |f(x) - f(x_0+)| \le M |x - x_0| \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$
$|f(x) - f(x_0-)| \le M |x - x_0| \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x$

Potom $\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]](x_0) = \frac{1}{2}[f(x_0+) + f(x_0-)]$

Tvrzení 2 Je-li $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ a $\mathcal{F}[f] \in L^1(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]] = \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[f]] =$

Důsledek Je-li $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ a $\mathcal{F}[f] = 0$ s.v. $\Rightarrow f = 0$ s.v.
a $\mathcal{F} : L^1 \to$ "prostor funkcí s $\mathcal{F}[f] \in L^1$" je prosté zobraz

$\boxed{\text{Důkaz Tvrzení 2}}$ provedeme pomocí Lemmatu

Lemma Nechť $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ splňuje $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\varphi(x)\,dx = 0$ pro $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

Pak $f = 0$ s.v. v $\mathbb{R}^d$.

Nechť $f, \mathcal{F}[f] \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Protože $\mathcal{F}[f] \in L^1(\mathbb{R}^d)$ tak $\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]] \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ a $\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]](x)\varphi(x)\,dx < \infty$ pro $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

Navíc:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]](x)\,\varphi(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}[f(x)](y)\, \underbrace{e^{-iy\cdot x}\varphi(x)}\,dy\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}[f(x)](y)\, \mathcal{F}^{-1}[\varphi(x)](y)\,dy$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{ix\cdot y}\, \mathcal{F}^{-1}[\varphi(x)](y)\,dy\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[\varphi]](x)\,dx$$

Avšak $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ a tedy $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ a pro tak φ platí inverzní Fourierův vzoreček, tj.

$$\mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[\varphi]](x) = \varphi(x).$$

Tedy $\int_{\mathbb{R}^d} \left[\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]](x) - f(x)\right]\varphi(x)\,dx = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$,

což dle Lemmy dává tvrzení. $\blacksquare$