Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale co nejpřesněji odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte ověřit splnění předpokladů.

Jméno a příjmení: ____________________

Příklad	1	2	3	4	**Celkem bodů**
Bodů	8	10	8	10	36
Získáno					

[8] 1. Budiž dána funkce

$$f(z) = \frac{1}{(\sin z)^3}.$$

V bodě $z_0 = 0$:

a) určete typ singularity,

b) najděte *hlavní část* Laurentovy řady funkce $f(z)$,

c) spočtěte reziduum.

Dále zjistěte v jakých dalších bodech $z \in \mathbb{C}$, pokud vůbec, má funkce $f(z)$ singularity.

[10] 2. Připomeňte si Cauchyho vzorec

$$f(\mathbb{A}) =_{\mathrm{def}} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma} \left(\zeta \mathbb{I} - \mathbb{A}\right)^{-1} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta,$$

kde f je holomorfní funkce definovaná na $\mathbb{C}$ a $\mathbb{A}$ je daná matice. S použitím Cauchyho vzorce spočtěte $\mathrm{e}^{\mathbb{A}}$, kde $\mathbb{A}$ je matice definovaná jako

$$\mathbb{A} =_{\mathrm{def}} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

[8] 3. Zkoumejte posloupnost $\{f_{\alpha,n}\}_{n=1}^{+\infty}$ jejíž jednotlivé členy jsou definovány jako

$$f_{\alpha,n}(x) =_{\text{def}} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} n^{\alpha} \mathrm{e}^{-\frac{nx^2}{4}},$$

kde $\alpha \in \mathbb{R}$ je parametr. (Parametr α je stejný pro všechny členy posloupnosti.)

a) Zjistěte, pro které hodnoty parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ ve smyslu konvergence distribucí platí

$$T_{f_{\alpha,n}} \to \delta,$$

kde δ je Diracova distribuce v nule a $T_{f_{\alpha,n}}$ jsou regulární distribuce přiřazené lokálně integrovateným funkcím $f_{\alpha,n}$.

b) Zjistěte, pro které hodnoty parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ ve smyslu konvergence distribucí platí

$$T_{f_{\alpha,n}} \to 0.$$

Přesně specifikujte v jaké smyslu je konvergence definována. Připomínáme, že pro $a > 0$ platí $\int_{x=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$.

[10] 4. Pro $x \in \mathbb{R}$ řešte na prostoru regulárních distribucí rovnici

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} - 6f = a\delta,$$

kde δ značí Diracovu distribuci v bodě nula a $a \in \mathbb{R}^+$ je parametr, a kde vyžadujeme $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. (Limitu v tomto případě chápeme jako limitu funkce generující danou regulární distribuci.)