Termín pro odevzdání: čtvrtek 8. dubna 2021

Převedením na křivkový integrál v komplexní rovině a s využitím reziduové věty spočtěte následující integrál

$$I = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{x^3+1}\, dx, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

kde $v.p.$ značí integraci ve smyslu hlavní hodnoty chápanou zde jako

$$I = \lim_{\epsilon \to 0+} \left(\int_{-\infty}^{-1-\epsilon} \frac{\cos(tx)}{x^3+1}\, dx + \int_{-1+\epsilon}^{\infty} \frac{\cos(tx)}{x^3+1}\, dx \right),$$

kde tedy singularitu integrandu u $x = -1$ symetricky vyjmeme ϵ-okolím, a následně zkoumáme limitu $\epsilon \to 0+$.

Postup (tipy):

1. Použijte postup ze cvičení, založený na přepisu kosinu jako reálné části komplexní exponencialy.
2. Přejděte ke komplexní proměnné, najděte a charakterizujte singularity získané funkce.
3. Uvažujte integrační křivku, která obchází singularitu na reálné ose po "malé" půlkružnici a vhodně se uzavírá "velkým" obloukem (pozor na znaménko t).
4. Napište parametrizaci všech použitých křivek.
5. Dopočtěte integrál využitím reziduové věty, Jordanova lemmatu a lemmatu o obcházení pólu násobnosti 1. Všechny kroky pečlivě zdůvodněte.
6. HINT: Práci Vám může usnadnit úvaha o paritě integrálu vzhledem k proměnné t.
7. BONUS: Zkuste spočítat hlavní hodnotu integrálu pro $t = 0$ klasicky a porovnejte s výsledkem získaným postupem výše.

Řešení:
Přepíšeme nejprve integrál s využitím kosinu jako reálné části komplexní exponenciely následovně

$$I = \mathrm{Re}\; v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\mathrm{i}tx}}{x^3+1}\, dx\,.$$

Přejdeme ke komplexní proměnné a komplexní funkci

$$f(z) = \frac{e^{\mathrm{i}tz}}{z^3+1}\,.$$

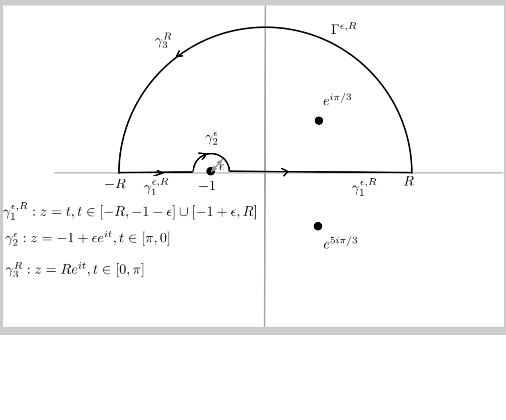
Singularity funkce $f(z)$ jsou kořeny jmenovatele, tedy řešení

$$z^3 = -1 = e^{\mathrm{i}\pi + 2k\pi\mathrm{i}} \quad k \in \mathbb{Z} \iff z = e^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3} + \frac{2k\pi\mathrm{i}}{3}} \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Dostáváme tedy tyto tři jednonásobné póly:

$$z_1 = e^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}} = \frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$$
$$z_2 = e^{\mathrm{i}\pi} = -1$$
$$z_3 = e^{\frac{5\mathrm{i}\pi}{3}} = \frac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\,.$$

Uvažujme nejprve případ $t \geq 0$. Zvolme integrační dráhu jako na obrázku. Reziduová věta nám dává:



$$\int_{\Gamma^{\epsilon,R}} f(z)dz = 2\pi \mathrm{i} \mathrm{Res}_{z_1} f(z)\,,$$

kde

$$\int_{\Gamma^{\epsilon,R}} f(z)dz = \underbrace{\int_{\gamma_1^{\epsilon,R}} f(z)dz}_{I_1^{\epsilon,R}} + \underbrace{\int_{\gamma_2^{\epsilon}} f(z)dz}_{I_2^{\epsilon}} + \underbrace{\int_{\gamma_3^{R}} f(z)dz}_{I_3^{R}}\,.$$

Evidentně platí

$$\lim_{R\to\infty,\epsilon\to 0+} I_1^{\epsilon,R} = \lim_{R\to\infty,\epsilon\to 0+} \left\{\int_{-R}^{-1-\epsilon} \frac{\exp(\mathrm{i}tx)}{x^3+1}\,dx + \int_{-1+\epsilon}^{R} \frac{\exp(\mathrm{i}tx)}{x^3+1}\,dx\right\} = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(\mathrm{i}tx)}{x^3+1}\,dx \qquad \text{(to chceme spočíst)}$$

Ve druhém integrálu obcházíme jednonásobný pól v $z = z_2 = -1$, orientovaný úhel je $-\pi$, tedy dle lemmatu o obcházení pólu násobnosti 1, dostáváme:

$$\lim_{\epsilon\to 0+} I_2^{\epsilon} = -\mathrm{i}\pi \mathrm{Res}_{z_2} f(z)$$

Na třetí integrál použijme Jordanovo lemma pro $e^{\mathrm{i}tz}g(z)$, pro $g(z) = \frac{1}{z^3+1}$, (kde tedy $t = \gamma$ ve znění Jordanova lemmatu) Spočtěme

$$M_R = \max_{z\in\gamma_3^R} |g(z)| \le \frac{1}{R^3-1} \sim \frac{1}{R^3} \qquad \text{pro } R \text{ dost velké,}$$

a tedy platí

$$\lim_{R\to 0+} M_R = 0 \qquad \text{(potřebujeme pro případ } t > 0\text{),}$$
$$\lim_{R\to 0+} R M_R = 0 \qquad \text{(potřebujeme pro případ } t = 0\text{).}$$

Tedy pro $t \ge 0$ dostáváme

$$\lim_{R\to\infty} I_3^R = 0\,.$$

Tedy jsme dostali

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(\mathrm{i}tx)}{x^3+1}\,dx = \mathrm{i}\pi \mathrm{Res}_{z_2} f(z) + 2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}_{z_1} f(z)\,.$$

Spočtěme obě rezidua:

$$\mathrm{Res}_{z_2} f(z) = \lim_{z\to z_2} \frac{e^{\mathrm{i}tz}}{(z^3+1)'} = \frac{e^{\mathrm{i}tz_2}}{3z_2^2} = \frac{e^{-\mathrm{i}t}}{3} = \frac{\cos t - \mathrm{i}\sin t}{3}\,,$$

$$\mathrm{Res}_{z_1} f(z) = \lim_{z\to z_1} \frac{e^{\mathrm{i}tz}}{(z^3+1)'} = \frac{e^{\mathrm{i}tz_1}}{3z_1^2} = \frac{e^{\mathrm{i}t\left(\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)}}{3e^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}}} = \frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{\mathrm{i}t}{2}}}{3} \underbrace{e^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}}}_{\frac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}}$$

$$= -\frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}t}}{3}\left(\cos\frac{t}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{t}{2}\right)\left(\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= -\frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}t}}{6}\left\{\left(\cos\frac{t}{2} - \sqrt{3}\sin\frac{t}{2}\right) + \mathrm{i}\left(\sin\frac{t}{2} + \sqrt{3}\cos\frac{t}{2}\right)\right\}\,.$$

Odtud tedy

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(\mathrm{i}tx)}{x^3+1}\,dx = \pi\frac{\sin t + \mathrm{i}\cos t}{3} + \frac{\pi e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}t}}{3}\left\{\left(\sin\frac{t}{2} + \sqrt{3}\cos\frac{t}{2}\right) - \mathrm{i}\left(\cos\frac{t}{2} - \sqrt{3}\sin\frac{t}{2}\right)\right\}$$

a tedy

$$I = \mathrm{Re}\; v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(\mathrm{i}tx)}{x^3+1}\,dx = \frac{\pi\sin t}{3} + \frac{\pi e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}t}}{3}\left(\sin\frac{t}{2} + \sqrt{3}\cos\frac{t}{2}\right) \qquad \text{pro } t \ge 0\,.$$

Konečně zbývá dořešit případ $t < 0$. Nejrychlejší je všimnout si, že původní integrand a tedy i hledaný integrál je funkce sudá vzhledem k parametru t. Tedy stačí výsledek sudě prodloužit, čímž dostáváme:

$$\boxed{I = \frac{\pi\sin|t|}{3} + \frac{\pi e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}|t|}}{3}\left(\sin\frac{|t|}{2} + \sqrt{3}\cos\frac{|t|}{2}\right) \qquad \text{pro } t \in \mathbb{R}}\,.$$

BONUS: Počítejme klasicky integrál

$$I = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^3+1}\, dx.$$

Proveďme realný rozklad na parciální zlomky:

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{1}{3}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{3}\frac{x-2}{x^2-x+1}$$

a se slzou v oku při vzpomínce na 1.semestr dále upravme (rozpisem 2.členu) jako

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{3}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{6}\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2-x+1}$$

Ukažme, že ve smyslu uvažované hlavní hodnoty jsou integrály prvních dvou výrazů nulové:

$$\begin{aligned} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x+1} &= \lim_{R\to\infty} \lim_{\epsilon\to 0+} \left\{ \int_{-R}^{-1-\epsilon} \frac{1}{x+1}, dx + \int_{-1+\epsilon}^{R} \frac{1}{x+1}, dx \right\} \\ &= \lim_{R\to\infty} \lim_{\epsilon\to 0+} \left\{ \ln|x| |_{-R}^{-1-\epsilon} + \ln|x| |_{-1+\epsilon}^{R} \right\} \\ &= \lim_{R\to\infty} \lim_{\epsilon\to 0+} \ln\left| \frac{-1-\epsilon}{-1+\epsilon} \right| = 0\,. \end{aligned}$$

Podobně

$$\begin{aligned} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x-1}{x^2-x+1}\, dx &= \lim_{R\to\infty} \lim_{\epsilon\to 0+} \left\{ \int_{-R}^{-1-\epsilon} \frac{2x-1}{x^2-x+1}\, dx + \int_{-1+\epsilon}^{R} \frac{2x-1}{x^2-x+1}\, dx \right\} \\ &= \lim_{R\to\infty} \lim_{\epsilon\to 0+} \left\{ \ln|x^2-x+1| |_{-R}^{-1-\epsilon} + \ln|x^2-x+1| |_{-1+\epsilon}^{R} \right\} \\ &= \lim_{R\to\infty} \lim_{\epsilon\to 0+} \ln\left| \frac{R^2-R+1}{R^2+R+1}\, \frac{(-1-\epsilon)^2-(-1-\epsilon)+1}{(-1+\epsilon)^2-(-1+\epsilon)+1} \right| = 0 \end{aligned}$$

Poslední integrál nám dá úpravou na čtverec:

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2-x+1}\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\, dx = \frac{2}{3}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2} dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}\,,$$

v souladu s naší obecnou formulí pro $t = 0$.