Konstrukce Greenovy funkce (a řešení) pro Dirichletovu úlohu na poloprostoru

Začneme s konstrukcí Greenovy funkce na poloprostoru $\mathbb{R}^d_+$ definovaném

$$\mathbb{R}^d_+ := \{x=(x_1,\dots,x_d)\in\mathbb{R}^d;\ x_d>0\}.$$

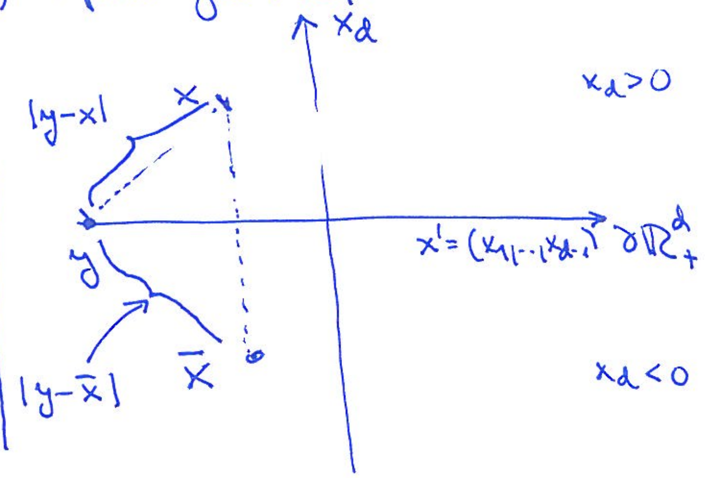
VAROVÁNÍ: Protože $\mathbb{R}^d_+$ není omezená oblast a tak pro ni předchozí úvahy (např. Tvrzení o třech potenciálech) nemusí platit. Přesto zkusíme sestrojit Greenovu funkci dle návodu a pak ověříme, že nalezený tvar splňuje $\boxed{-\Delta u = 0 \text{ v } \mathbb{R}^d_+,\ u=u_D \text{ na } \partial\mathbb{R}^+_d}$ atd.

Je-li $x\in\mathbb{R}^d_+$, pak $\bar{x} := (x_1,\dots,x_{d-1},-x_d)\in\mathbb{R}^d_-$ je reflexe x.

Hledáme: $\boxed{G(x,y)=\Phi(x-y)-\psi^x(y)}$ kde ψ^x splňuje $\boxed{\begin{array}{l}-\Delta\psi^x=0 \text{ v } \mathbb{R}^d_+\\ \psi^x(y)=\Phi(y-x) \text{ v } \partial\mathbb{R}^d_+\end{array}}$

Funkci $\boxed{\psi^x}$ lze definovat vztahem $\boxed{\psi^x(y):=\Phi(y-\bar{x})}$

Pak $-\Delta\psi^x=0$ v $\mathbb{R}^d_+$ neboť $\Phi(y-\bar{x})$ má singularitu mimo $\mathbb{R}^+_d$; a protože $|y-x|=|y-\bar{x}|$ pro všechna $y\in\partial\mathbb{R}^d_+$ (viz obrázek) tak $\Phi(y-x)=\Phi(y-\bar{x})$ pro $y\in\partial\mathbb{R}^d_+$.



Tedy:

$$G(x,y)=\Phi(x-y)-\Phi(x-\bar{y})$$

a dle (G_D), str. 32,

$$\boxed{u(x)=-\int_{\partial\mathbb{R}^d_+}\frac{\partial G}{\partial\nu}(x,y)\,u_D(y)\,\underbrace{dy}_{dy_1\dots dy_{d-1}}}$$

kandidát na řešení.

$\boxed{\text{Počítejme } \frac{\partial G}{\partial\nu}}$ Protože $\frac{\partial}{\partial y_i}\Phi(x-y)=\frac{1}{d\alpha(d)}\frac{x_i-y_i}{|x-y|^d}$, $\quad(d\geq 2)$

a $\nu=(0,\dots,0,-1)$, tak

$$\frac{\partial G}{\partial\nu}(x,y)=\nabla G(x,y)\cdot\nu=\frac{-1}{d\alpha(d)}\left(\frac{x_d-y_d}{|x-y|^d}-\frac{\overbrace{\bar{x}_d}^{=(-x_d)}-y_d}{|\bar{x}-y|^d}\right)\underset{|x-y|=|\bar{x}-y|}{=}\frac{-2x_d}{d\alpha(d)\,|x-y|^d}$$

Tak

$$\boxed{u(x)=\frac{2x_d}{d\alpha(d)}\int_{\partial\mathbb{R}^+_d}\frac{u_D(y)}{|x-y|^d}\,dy\qquad(x\in\mathbb{R}^d_+)}\quad(\mathrm{PP})$$

Předchozí vztah se nazývá Poissonův vzorec pro poloprostor a

$$K(x,y) := \frac{2x_d}{d\,\alpha(d)} \frac{1}{|y-x|^d}$$

je Poissonovo jádro.

! Nyní ověříme, že u dané vztahem (PP) skutečně řeší Dirichletovu úlohu v klasickém smyslu.

$\boxed{\text{Věta 14}}$ (Poissonův vzorec pro poloprostor)

Buď $u_D \in C(\mathbb{R}^{d-1}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^{d-1})$. Nechť u je dáno vztahem (PP).

Pak

- $u \in C^\infty(\mathbb{R}^d_+) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d_+)$
- $-\Delta u = 0$ v $\mathbb{R}^d_+$
- $\lim\limits_{x \to x^0} u(x) = u_D(x^0) \qquad (\forall\, x^0 \in \partial \mathbb{R}^d_+)$

Důkaz [1] Víme, že pro $x \in \mathbb{R}^d_+$ je zobrazení $y \mapsto G(x,y)$, kde $G(x,y) = \Phi(x-y) - \Phi(\bar{x}-y)$, harmonické v $\mathbb{R}^d_+$ mimo $y = x$.

Ze symetrie G plyne, že zobrazení

$x \longmapsto G(x,y)$ je harmonické mimo

(také víme, že $x \mapsto G(x,y) \in C^\infty(\mathbb{R}^d_+ \setminus \{y\})$ a

také $x \mapsto \frac{\partial G}{\partial x_i}(x,y) = \frac{\partial G}{\partial y_i}(x,y)$ je harmonická v $\mathbb{R}^d_+ \setminus \{y\}$)

Je-li tedy $x \in \mathbb{R}^d_+$ a $y \in \partial \mathbb{R}^d_+$ pak

$$x \longmapsto -\frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y) = K(x,y)$$

je harmonická v $\mathbb{R}^d_+$ a tedy $C^\infty(\mathbb{R}^d_+)$

[2] Přímý výpočet (viz krátká níže):

$$\int_{\partial \mathbb{R}^d_+} K(x,y)\,dy = 1$$

Vskutku, je-li $\boxed{d=2}$ $(x_2 > 0)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(x,y)\,dy = \frac{2x_2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{(x_1-y)^2 + x_2^2} = \frac{1}{\pi x_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{1 + \left(\frac{y-x}{x_2}\right)^2} = \frac{1}{\pi} \left[\operatorname{arctg} \frac{y-x}{x_2}\right]_{-\infty}^{+\infty} = 1.$$

Je-li $\boxed{d=3}$, $x_3 > 0$

$$\int_{\partial \mathbb{R}^3_+} K(x,y)\,dy = \frac{2x_3}{3 \cdot 4\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{dy_1\,dy_2}{\left(x_3^2 + (y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2\right)^{3/2}}$$

$y_1 = x_1 + \rho\cos\varphi$

$y_2 = x_2 + \rho\sin\varphi$

$$= \frac{x_3}{2\pi} \cdot 2\pi \int_0^{+\infty} \frac{\rho\,d\rho}{(x_3^2 + \rho^2)^{3/2}} = x_3 \left[\frac{1}{(x_3^2+\rho^2)^{1/2}}\right]_0^\infty = 1.$$

Je-li $\boxed{d>3}$! sami.

[3] Ze vztahu (PP) plyne

$$|u(x)| = \left|\int_{\partial\mathbb{R}^d_+} K(x,y)\, u_D(y)\, dy\right| \underset{\substack{\uparrow \\ K(x,y)\geq 0 \text{ pro } x\in\mathbb{R}^d_+,\, y\in\partial\mathbb{R}^d_+}}{\leq} \int_{\partial\mathbb{R}^d_+} K(x,y)\, |u_D(y)|\, dy$$

$$\leq \sup_{y\in\partial\mathbb{R}^d} |u_D(y)| \underbrace{\int_{\partial\mathbb{R}^d} K(x,y)\, dy}_{=1} = \|u_D\|_{L^\infty(\partial\mathbb{R}^+_d)}$$

Přechodem k $\sup_{x\in\mathbb{R}^d_+}$:
$$\boxed{\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d_+)} \leq \|u_D\|_{L^\infty(\partial\mathbb{R}^+_d)}}$$

Nyní již víme, že $u\in C^\infty(\mathbb{R}^d_+)\cap L^\infty(\mathbb{R}^d_+)$ a $-\Delta u = 0$ v $\mathbb{R}^d_+$. Zbývá dokázat nabývání okrajové podmínky.

[4] Buď $x^0\in\partial\mathbb{R}^d_+$ a $\varepsilon>0$ pevné (leč libovolné). Protože u_D je spojitá v x^0, existuje $\delta>0$ tak, že

(*) $$|u_D(y) - u_D(x^0)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pro} \quad |y-x^0|<\delta.$$

Vezměme nyní $x\in\mathbb{R}^d_+$ takové, že $\underbrace{|x-x^0|<\frac{\delta}{2}}_{\text{(pro } x_d \text{ blízké 0)}}$. Ukážeme, že
$$|u(x) - u_D(x^0)| < \varepsilon$$

Vskutku:
$$|u(x)-u_D(x^0)| \overset{(PP)}{=} \left|\int_{\partial\mathbb{R}^d_+} K(x,y)\, u_D(y) - \underbrace{\int_{\partial\mathbb{R}^d_+} K(x,y)\, u_D(x^0)\, dy}_{=u_D(x^0) \text{ dle [2]}}\right|$$

$$\leq \int_{\partial\mathbb{R}^d_+} \underbrace{K(x,y)\, |u_D(y)-u_D(x^0)|}\, dy$$

$$= \int_{\partial\mathbb{R}^d_+\setminus B_\delta(x^0)} \dots\, dy + \underbrace{\int_{B_\delta(x^0)(\cap\partial\mathbb{R}^d_+)} \dots\, dy}_{<\frac{\varepsilon}{2} \text{ dle (*) a [2]}} < \varepsilon.$$

Zde jsme využili pozorování:

Je-li $|x-x^0|<\frac{\delta}{2}$ (což předpokládáme) a $|y-x^0|\geq\delta$, pak
$$|y-x^0| \leq |y-x|+|x-x^0| \leq |y-x|+\frac{\delta}{2} \leq |y-x| + \frac{|y-x^0|}{2} \Rightarrow \underbrace{|y-x^0|\leq 2|y-x|}$$
a tak
$$\int_{\partial\mathbb{R}^d_+\setminus B_\delta(x^0)} K(x,y)\, |u_D(y)-u_D(x^0)|\, dy \leq 2\|u_D\|_{L^\infty(\partial\mathbb{R}^d_+)} \int_{\partial\mathbb{R}^d_+\setminus B_\delta(x^0)} K(x,y)\, dy$$

$$\underset{(PP)}{\leq} \frac{2^{d+2}\|u_D\|_{L^\infty(\partial\mathbb{R}^d_+)}\, x_d}{d\,\alpha(d)} \underbrace{\int_{\partial\mathbb{R}^d_+\setminus B_\delta(x^0)} \frac{dy}{|y-x|^d}}_{<+\infty} \longrightarrow 0 \quad \text{pro} \quad x_d\to 0.$$ ∎

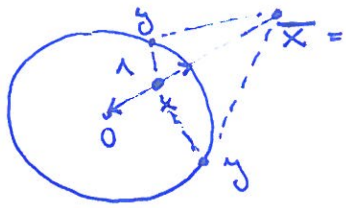
Konstrukce Greenovy funkce a řešení pro Dirichletovu úlohu na kouli

Uvažujme nejdříve $B_1(0)$. Pro konstrukci opravy ψ^x, kde $x \in B_1(0)$, využijeme inverzi vzhledem k 1-ové sféře, tj.

$$x \longmapsto \bar{x} = \frac{x}{|x|^2}$$

Pro $y \in \partial B_1(0)$ ukážeme, že

$$|x-y| = |x|\,|\bar{x}-y|$$



Skutečně:

$$|x|^2|\bar x - y|^2 = |x|^2\big(\bar x\cdot\bar x - 2y\cdot\bar x + \underbrace{y\cdot y}_{1}\big)$$

$\bar x = \frac{x}{|x|^2}$

$$= \big(\underbrace{1}_{y\cdot y} - 2y\cdot x + |x|^2\big) = |y-x|^2$$

Tedy ψ^x definujeme $\boxed{\psi^x = \Phi(|x|(\bar x - y))}$

Dle předchozího $\Phi(|x|(\bar x - y)) = \Phi(x-y)$ na $\partial B_1(0)$ a $-\Delta\Phi(|x|(\bar x - y)) = 0$ v $B_1(0)$

a

$$G(x,y) = \Phi(x-y) - \Phi(|x|(\bar x - y))$$

a dle (GD), str 32,

$$u(x) = -\int_{\partial B_1(0)} \frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y)\, u_D(y)\,dy$$

Počítejme tedy $\frac{\partial G}{\partial\nu}$:

$$\frac{\partial G}{\partial\nu}(x,y) = \underbrace{\nu}_{(y_1,\dots,y_d)} \cdot D_y G(x,y) = y\cdot\left(\frac{1}{d\alpha(d)}\left[\frac{x-y}{|x-y|^d} + \frac{(y|x|^2 - x)}{\underbrace{(|x|\,|y-\bar x|)^d}_{|x-y|^d}}\right]\right)$$

$$= \frac{1}{d\alpha(d)\,|x-y|^d}\left(\sum_{i=1}^d y_i\underbrace{\big((x_i-y_i)+y_i|x|^2 - x_i\big)}_{-\sum_{i=1}^d y_i y_i(1-|x|^2) \,=\, -(1-|x|^2)}\right)$$

$$= -\frac{1}{d\alpha(d)}\,\frac{1-|x|^2}{|x-y|^d}$$

Tedy

$$\boxed{u(x) = \frac{1-|x|^2}{d\alpha(d)}\int_{\partial B_1(0)}\frac{u_D(y)}{|x-y|^d}\,dy} \qquad (PK)_1$$

Je-li nyní u řešení $\boxed{-\Delta u = 0 \text{ v } B_R(0) \text{ s } u = u_D \text{ na } \partial B_R(0)}$

pak $\tilde{u}(x) = u(Rx)$ řeší $\boxed{-\Delta \tilde{u} = 0 \text{ v } B_1(0) \text{ s } \tilde{u} = \tilde{u}_D \text{ na } \partial B_1(0)}$

kde $\tilde{u}_D(x) = u_D(Rx)$. OVĚŘTE !! Tedy $\tilde{u}$ je dáno vzorcem $(PK)_1$

Po změně proměnných $\xi = Rx$

$$(PK) \quad \begin{cases} \boxed{u(\xi)} = \tilde{u}\left(\frac{\xi}{R}\right) = \\ = \frac{1 - |\xi|^2/R^2}{d\,\alpha(d)} \int_{\partial B_1(0)} \frac{\overbrace{\tilde{u}_D(y)}^{= u_D(Ry)}}{\left|\frac{\xi}{R} - y\right|^d}\, dy \\ \underset{z = Ry}{\overset{\text{substituce}}{=}} \frac{R^2 - |\xi|^2}{d\,\alpha(d)} \frac{1}{R^2} \int_{\partial B_R(0)} \frac{u_D(z)}{|\xi - z|^d} R^d \frac{dA}{R^{d-1}} \\ = \boxed{\frac{R^2 - |\xi|^2}{d\,\alpha(d)\, R} \int_{\partial B_R(0)} \frac{u_D(z)}{|\xi - z|^d}\, dz} \end{cases}$$

což je Poissonův vzorec pro kouli $B_R(0)$ s jádrem

$$K(\xi, z) = \frac{R^2 - |\xi|^2}{d\,\alpha(d)\, R} \frac{1}{|\xi - z|^d}$$

Platí:

Věta 15 Buď $u_D \in C(\partial B_R(0))$ a u dáno vzorcem (PK).

Pak
- $u \in C^\infty(B_R(0))$
- $-\Delta u = 0$ v $B_R(0)$
- $\lim\limits_{\substack{x \to x^0 \\ x \in B_R(x^0)}} u(x) = u_D(x^0) \quad \forall\, x^0 \in \partial B_R(x^0)$

DŮ SAMI.

Kapitolu zakončíme větou, která spojí teorii PDR s variačním počtem

$\boxed{\text{Věta 16}}$ Dirichletův princip = o vztahu PDR a variačního počtu

(1) Buď $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar\Omega)$ řešení $-\Delta u = f$ v Ω a $u = u_D$ na $\partial\Omega$ (*)

Pak u splňuje (**)

$$I[u] = \min_{w \in A} I[w]$$

kde $A = \{z \in C^2(\Omega) \cap C(\bar\Omega);\ z = u_D \text{ na } \partial\Omega\}$

a $I[w] := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla w|^2\,dx - \int_\Omega f w\,dx$

(2) Naopak, je-li $u \in A$ a splňuje (**), pak u řeší (*).

Tedy úlohy (*) a (**) jsou ekvivalentní.

Dk. $\boxed{\text{Ad (2)}}$ Dle předpokladu, $u \in A$ splňuje nutně $\delta I[u](h) = 0$
$\forall h \in A_0 = \{z \in C^2(\Omega) \cap C(\bar\Omega);\ z = 0 \text{ na } \partial\Omega\}$

tzn.

$$0 = \frac{d}{dt} I[u + th]\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(u + th)|^2 - f(x)(u(x) + th(x))\,dx\Big|_{t=0}$$

$$= \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla h - f h)\,dx \underset{\substack{\text{per partes}\\ h|_{\partial\Omega} = 0}}{=} \int_\Omega \underbrace{\Delta}_{\in C(\Omega)}$$

Protože h libovolné, tak $-\Delta u = 0$ v Ω a protože $u \in A$ tak $u = u_D$ na $\partial\Omega$.

$\boxed{\text{Ad (1)}}$ Buď $w \in A$ libovolné a u řeší (*). Pak $u - w = 0$ na $\partial\Omega$.

Protože $-\Delta u = f$ v Ω tak

$$0 = \int_\Omega (-\Delta u - f)(u - w)\,dx = \int_\Omega |\nabla u|^2 - \nabla u \cdot \nabla w - f \cdot u + f \cdot w\,dx$$

Tedy

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega f u\,dx = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla w - \int_\Omega f \cdot w \le \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 + \frac{1}{2}\int |\nabla w|^2 + \int_\Omega f \cdot w$$

což implikuje

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega f u\,dx \le \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla w|^2 - \int_\Omega f \cdot w\,dx.$$

Tedy

$$I[u] \le I[w] \quad \forall w \in A.$$