1. Spočtěte $\int_S \vec{f}\cdot\ \mathrm{d}\vec{S}$, kde $\vec{f}=(z,x,y)$ a S je část plochy $x-y+z=1$ omezená podmínkami $x\geq 0,\ z\geq 0$ a $y\leq 0$. Plocha S je orientovaná tak, že s vektorem ve směru kladné osy y svírá ostrý úhel.

   Jde o výpočet plošného integrálu 2. druhu. Potřebujeme tedy najít parametrizaci plochy, intervaly parametrů a na závěr spočítat samotný integrál.

$$\varphi : \begin{array}{l} x = 1-t_1 \\ y=-t_1+t_1t_2 \\ z=t_1t_2 \end{array} \quad \begin{array}{l} t_1\in\langle 0,1\rangle \\ t_2\in\langle 0,1\rangle \end{array}$$

   Dále

$$\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial t_1}=(-1,-1+t_2,t_2)$$
$$\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial t_2}=(0,t_1,t_1)$$
$$\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial t_1}\times\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial t_2}=(-t_1,-t_1,-t_1)$$

   Ovšem tento vektor by měl mít s osou y ostrý úhel, tudíž se zbavíme všech $-$ a pokračujeme

$$I=\int_S \vec{f}\cdot\ \mathrm{d}\vec{S}=\int_0^1\int_0^1 (t_1t_2,1-t_1,-t_1+t_1t_2)\cdot(t_1,t_1,t_1)\ \mathrm{d}t_2\ \mathrm{d}t_1=$$
$$=\int_0^1\int_0^1 t_1^2t_2+t_1-t_1^2-t_1^2+t_1^2t_2\ \mathrm{d}t_2\ \mathrm{d}t_1=\int_0^1 t_1^2+t_1-2t_1^2\ \mathrm{d}t_1=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$$

2. Spočtěte křivkový integrál $\int_C \left(y^2-z^2\right)\ \mathrm{d}x+\left(z^2-x^2\right)\ \mathrm{d}y+\left(x^2-y^2\right)\ \mathrm{d}z$, kde uzavřená křivka C, která vznikne průnikem stěn krychle $[0,a]^3$ s rovinou $x+y+z=\frac{3}{2}a$, vymezuje hranici plochy S, která je orientovaná kladně vzhledem k vektoru $(1,1,1)$.

   Jde o obvod pravidelného šestiúhelníku se stranou o délce $\frac{\sqrt{2}}{2}a$. Využijeme Stokesovu větu při přechodu k ploše S

$$\vec{f}=\left(y^2-z^2,z^2-x^2,x^2-y^2\right)$$
$$\int_C \vec{f}\cdot\ \mathrm{d}\vec{s}=\int_S \nabla\times\vec{f}\cdot\ \mathrm{d}\vec{S}$$

   Označme

$$\vec{g}=\nabla\times\vec{f}=-2\left(y+z,z+x,x+y\right)$$

   Chceme použít Gaussovu větu, ovšem plocha S neohraničuje žádný objem tudíž doplníme plochami ze zbytku poloviny krychle (krychle je plochou rozseknutá na polovinu, nadále budeme pracovat s polovinou blíž k počátku). Pak platí

$$\int_{S_z}\vec{g}\ \mathrm{d}\vec{S}+\int_{S_y}\vec{g}\ \mathrm{d}\vec{S}+\int_{S_x}\vec{g}\ \mathrm{d}\vec{S}+\int_{s_z}\vec{g}\ \mathrm{d}\vec{S}+\int_{s_y}\vec{g}\ \mathrm{d}\vec{S}+\int_{s_x}\vec{g}\ \mathrm{d}\vec{S}+\int_{S}\vec{g}\ \mathrm{d}\vec{S}=\int_V \nabla\cdot\vec{g}\ \mathrm{d}V$$

   Kde index s velkým S označuje čtverec s useknutým rohem s naopak pravoúhlý trojúhelník a písmena x,y,z k čemu je daná plocha kolmá. Poslední integrál na levé straně chceme spočítat a levá strana obepíná objem V a rovná se pravé straně právě díky Gaussově větě. Dále platí

$$\nabla\cdot\vec{g}=-2\left(\frac{\partial(y+z)}{\partial x}+\frac{\partial(z+x)}{\partial y}+\frac{\partial(x+y)}{\partial z}\right)=0$$

   Stačí tedy spočítat šest plošných integrálů! Ovšem pro každý je vždy jedna složka konstantní a to a nebo 0, začněme a nesmíme zapomenout na normálový vektor k ploše o délce jedna (který míří "ven")

$$\int_{S_z}\vec{g}\ \mathrm{d}\vec{S}=\int_0^{\frac{a}{2}}\int_0^a -2(y,x,x+y)\cdot(0,0,-1)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x+\int_{\frac{a}{2}}^a\int_0^{\frac{3}{2}a-x} -2(y,x,x+y)\cdot(0,0,-1)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x=$$
$$=2\int_0^{\frac{a}{2}}\int_0^a x+y\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x+2\int_{\frac{a}{2}}^a\int_0^{\frac{3}{2}a-x} x+y\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x=\frac{1}{4}a^3+\frac{1}{2}a^3+\frac{7}{12}a^3+\frac{7}{24}a^3=\frac{13}{8}a^3$$

Z postupu jde vidět, že ještě další dva plošné integrály budou mít stejnou hodnotu. Podívejme se na integrály přes malé trojúhelníky

$$\int_{s_z} \vec{g}\ \mathrm{d}\vec{S} = \int_0^{\frac{a}{2}} \int_0^{\frac{a}{2}-x} -2(y+a, a+x, x+y)\cdot(0,0,1)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x = -2\int_0^{\frac{a}{2}} \int_0^{\frac{a}{2}-x} x+y\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x =$$
$$= -\frac{1}{12}a^3 - \frac{1}{24}a^3 = -\frac{1}{8}a^3$$

Z toho tedy vyplývá, že náš integrál se rovná

$$\int_S \vec{g}\cdot\ \mathrm{d}\vec{S} = -3\frac{13}{8}a^3 + 3\frac{1}{8}a^3 = -\frac{9}{2}a^3$$

Ilustrace: