4. Teorie základních PDR

V této kapitole se zaměříme na vlastnosti řešení úloh spojených s následujícími diferenciálními operátory

(1) $\frac{\partial}{\partial t} + a\frac{\partial}{\partial x}$ či obecněji $\frac{\partial}{\partial t} + \vec{b}\cdot\nabla$ — transportní operátor

(2) $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$ či obecněji $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - k^2\Delta$ — vlnový operátor

(3) $\frac{\partial}{\partial t} - \Delta$ či obecněji $\frac{\partial}{\partial t} - k\Delta$ — operátor vedení tepla či tepelný operátor

(4) $-\Delta$ — Laplaceův operátor

(5) $\frac{\partial}{\partial t} - ik\Delta$ — Schrödingerův operátor

Všechny tyto operátory jsou speciální typy operátorů

(*) $$L = \sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha D^\alpha$$ kde $a_\alpha \in \mathbb{C}$ (či $\mathbb{R}$) jsou koeficienty (zde konstantní)

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$, $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_d$, $D^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_d^{\alpha_d}}$.

Připomeňme, že operátory jsou zobrazení z prostoru funkcí do prostoru funkcí (či obecněji z prostoru funkcionálů do prostoru funkcionálů).

Operátory typu (*) jsou lineární diferenciální operátory nejvýše k-tého řádu

- lineární neboť
$$L(u_1+u_2) = \sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha D^\alpha(u_1+u_2) = \sum_{|\alpha|\le k}(a_\alpha D^\alpha u_1 + a_\alpha D^\alpha u_2)$$
$$= \sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha D^\alpha u_1 + \sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha D^\alpha u_2$$
$$= Lu_1 + Lu_2$$
a $L(\gamma u) = \gamma L u$ pro $\gamma \in \mathbb{R}$ (či $\mathbb{C}$)

- diferenciální neboť obsahuje parciální derivace (pokud $d\ge 2$) či obyčejné derivace ($d=1$)

Příklady:

(i) $a_m y^{(m)} + \dots + a_1 y' + a_0 y$ je obyčejný diferenciální operátor aplikovaný na $y : (a,b) \to \mathbb{R}$

m-tého řádu pokud $a_m \neq 0$.

$a_m y^{(m)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f$ je ODR m-tého řádu s danou pravou stranou f.

(ii) Příklady (2)-(5) výše jsou parciální diferenciální operátory 2. řádu

$\boxed{(W) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \varrho^2 \Delta u = f \quad \text{je vlnová rce}}$

$\boxed{(Q) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \varrho \Delta u = f \quad \text{je rce vedení tepla}}$

$\boxed{(S) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - i\varrho \Delta u = f \quad \text{je Schrödingerova rovnice}}$

$\boxed{(P) \quad -\Delta u = f \quad \text{je Poissonova rovnice}}$
(Laplaceova rovnice pokud $f = 0$)

(iii) $\frac{\partial}{\partial t} + \vec{b} \cdot \nabla$ je transportní operátor pro $\vec{b} \in \mathbb{R}^d$ dané

$\boxed{(T) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{b} \cdot \nabla u = g \quad \text{je rovnice transportu (s daným } g)}$

(iv) $\Delta^{(2)} u := \Delta(\Delta u)$ je biharmonický operátor aplikovaný na u

je to PD operátor 4. řádu.

Pro $d = 2$:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$$

$$\Delta^{(2)} u = \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4}$$

Lineární parciální dif. rovnice (či operátory) se dají klasifikovat a rozlišují se rovnice eliptické (příklady jsou $-\Delta u = f$, $\Delta^{(2)} u = f$), parabolické (příkladem jsou rovnice vedení tepla a Schrödingerova rovnice) a hyperbolické (příkladem je vlnová rovnice).

Rovnice (W), (Q), (S) a (T) jsou evoluční rovnice;
Rovnice (L) a rovnice $\Delta^{(2)} u = f$ jsou stacionární rovnice.

+ Výhodou stacionárních rovnic je, že nemáme časovou proměnnou, a tak je úloha jednodušší (redukce dimenze)
− Nevýhodou stacionárních úloh je, že nemáme časovou proměnnou a tak chybí informace jak jsme se do stacionárního stavu dostali.

Pokud nepředepíšu u stacionárních úloh okrajové podmínky a u evolučních úloh počáteční podmínky (a okrajové podmínky) pak nelze čekat, že budu schopen specifikovat řešení úlohy, které bude jediné.

Mohu si položit otázku, zda jsem schopen nalézt všechna řešení rovnice $Lu = f$, kde L je náš lineární diferenciální operátor. K této otázce, řešené v celém $\mathbb{R}^d$, se vrátíme za chvíli.

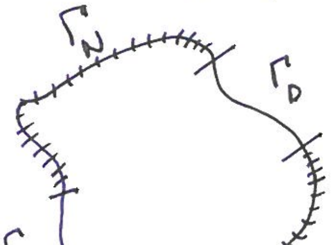
Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Okrajová úloha pro Poissonovu rovnici má tvar:
(BVP = boundary value problem)

Dirichlet ---→ , Neumann ---→

$$\boxed{\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad v\ \Omega \\ u &= u_D \quad na\ \Gamma_D \\ \frac{\partial u}{\partial n} := \nabla u \cdot \vec{n} &= g \quad na\ \Gamma_N \end{aligned}}$$

kde $\Gamma_D \cup \Gamma_N = \partial\Omega$
$\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$

$\Gamma_D, \Gamma_N \subset \partial\Omega$



Existují ještě (např.) Newtonovy okrajové podmínky

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial n} = u - u_N \quad na\ části\ hranice}$$

Funkce $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $u_D : \Gamma_D \to \mathbb{R}$, $g : \Gamma_N \to \mathbb{R}$, u_N: části $\partial\Omega \to \mathbb{R}$ jsou dané funkce

Hledáme $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tak, že (Ú) je splněna v nějakém smyslu.

Je-li $\Gamma_N = \partial\Omega$, pak f a g musí splňovat $\boxed{\int_\Omega f\,dx + \int_{\partial\Omega} g\,dS = 0}$ PROČ?

U evolučních rovnic (Q), (W), (S), (T) řešíme buď Cauchyho (nebo počáteční) úlohu, kdy $\boxed{\Omega = \mathbb{R}^d}$ a předepisujeme počáteční podmínky

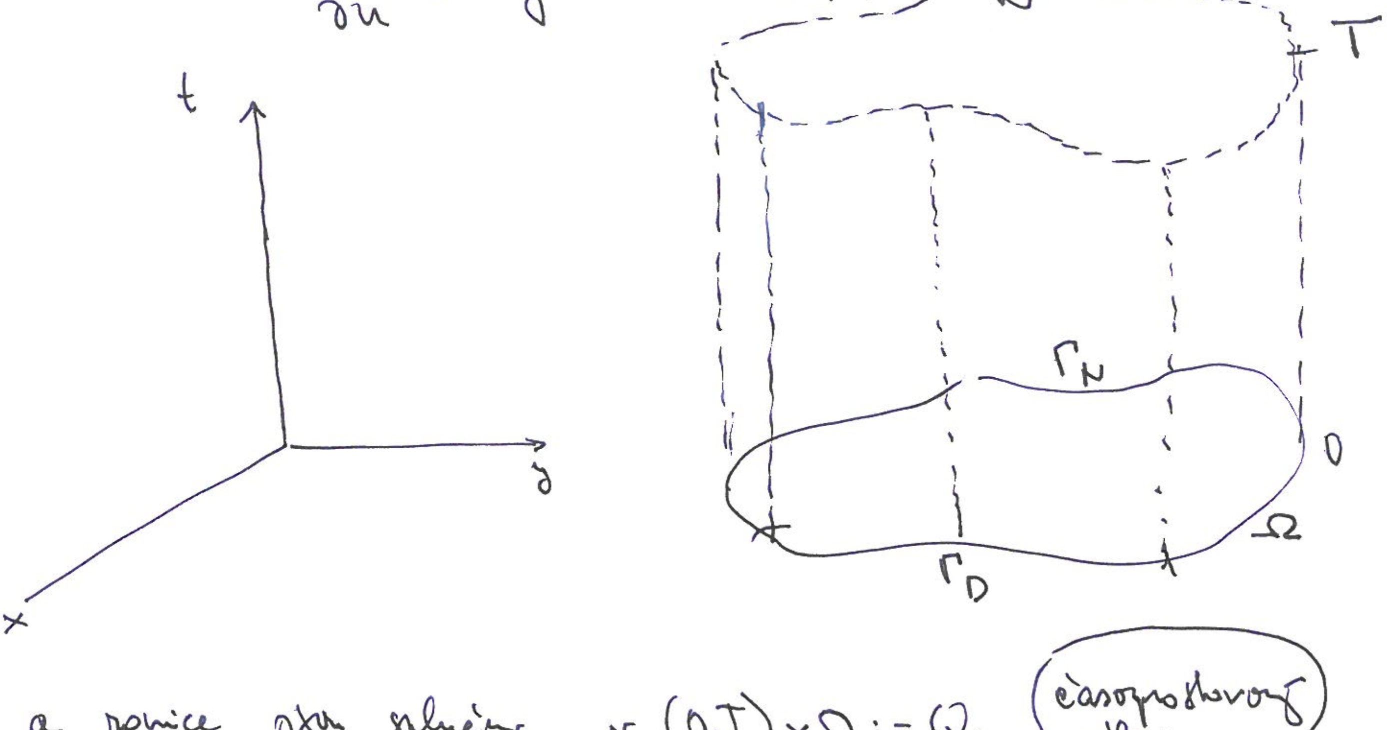
$$(P_0) \qquad \boxed{u(0,\cdot) = u_0 \quad v\ \mathbb{R}^d}$$

U vlnové rovnice (W) navíc předepisujeme

$$(P_1) \qquad \boxed{\frac{\partial u}{\partial t}(0,\cdot) = u_1 \quad v\ \mathbb{R}^d}.$$

nebo řešíme počáteční a okrajovou úlohu (IBVP = initial boundary value problem); kdy známe (P_0) uvažované v Ω (a (P_1) uvaž. v Ω navíc u vlnové rovnice) u musí splňovat

$$u = u_D \quad \text{na } (0,T)\times\Gamma_D,$$
$$\frac{\partial u}{\partial n} = g \quad \text{na } (0,T)\times\Gamma_N;$$



a rovnice jsou splněny v $\underline{(0,T)\times\Omega := Q_T}$ (časoprostorový válec).

U evolučních úloh:

data: • $u_0, u_1 : \Omega \to \mathbb{R}$ (u_1 je jen u vlnové rovnice)

• $f \quad : (0,T)\times\Omega \to \mathbb{R}$

• $g \quad : (0,T)\times\Gamma_N \to \mathbb{R}$

• $u_D \quad : (0,T)\times\Gamma_D \to \mathbb{R}$

hledáme • $u : (0,T)\times\Omega \to \mathbb{R}$ řešení.

Uvažujme úlohu

$$(E)\qquad \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha D^\alpha u = f \quad \text{v } \mathbb{R}^d \qquad (a_\alpha \in \mathbb{C})$$

Řekneme, že u_F je fundamentální řešení rovnice (E) pokud platí

$$\sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha D^\alpha u_F = \delta \quad \text{v } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$$

__Platí:__ Fundamentální řešení rovnice (E) vždy existuje (Ehrenpreis (1954), Lagrange (1955))

$\boxed{\text{Pozn.}}$ Pokud mám jedno fundamentální řešení, pak všechna fund. řeš. jsou tvaru $u_F + u_h$, kde u_h řeší $\sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha D^\alpha u_h = 0$ v $\mathbb{R}^d$.

__Fundamentálnost__ fundamentálního řešení (F.Ř.) plyne z následující věty.

$\boxed{\text{Věta 4.1}}$ (Řešení $Lu = f$, kde $Lu := \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha D^\alpha u$)

Buď u_F F.Ř. rce (E), tj. $Lu_F = \delta$.
Pak $u = u_F * f$ řeší (E).

Dk Výpočtem:

$$Lu = L(u_F * f) = Lu_F * f = \delta * f = f$$

(ukážu pro $f \in \mathcal{D}$)
(dokonce i v $\mathcal{D}'(\Omega)$)

diferenciální operátory mohu aplikovat na člen v konvoluci, který se mi hodí

u_F je nějaké F.Ř.

∎

Př. 1 Víme, že $H' = \delta$ v $\mathbb{R}$, kde $H(x) = \begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$.
Tedy F.Ř. rovnice $x' = f$ je Heavisideova funkce. Tu postupně integrujeme a dostáváme, že

$$u_F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{m-1}}{(m-1)!} & \text{pro } x>0, \\ 0 & \text{pro } x<0, \end{cases}$$

je F.Ř. rovnice $x^{(m)} = f$ a její řešení má tvar

$$x(t) = (u_F * f)(t).$$

(Př. 2) Buď $d=3$. Hledejme F.Ř. spojené s $-\Delta u = f$.

Řešení: Hledáme u_F tak, že
$$-\Delta u = \delta \quad \text{v } \mathbb{R}^3$$
Aplikuji Fourierovu transformaci.
$$\widehat{-\Delta u} = \hat{\delta}$$
Víme $\hat{\delta} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}$ a $\widehat{-\Delta u}(\xi) = |\xi|^2 \hat{u}(\xi)$

Tedy
$$|\xi|^2 \hat{u}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}$$
Zkusme nalézt u tak, že
$$\hat{u}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{|\xi|^2}$$
Dle Př. 5, str. 3/26,
$$\underbrace{u(x) = \frac{1}{4\pi|x|}}$$
což je jedno možné fundamentální řešení.

Tomuto F.Ř. se říká Newtonův potenciál. ☒

Fourierova transformace je jedna z mnoha metod jak nalézt F.Ř. V případě rovnice $-\Delta u = \delta$ jsme však mohli postupovat takto:

· Hledejme řešení $-\Delta u = 0$ v $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, které bude radiálně symetrické, tzn.:
$$u(\underset{x_1, \dots, x_d}{x}) = v(r) \quad \text{kde} \quad r = |x|$$
Pak
$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = v'(r)\frac{x_i}{|x|} \quad \text{a} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \underset{\text{nesčítám}}{=} v''(r)\frac{x_i x_i}{|x|^2} + v'(r)\left(\frac{1}{|x|} - \frac{x_i x_i}{|x|^3}\right)$$
Tedy
$$\Delta u = v''(r) + v'(r)\frac{d-1}{|x|} = v''(r) + \frac{d-1}{r} v'(r)$$
Označ $z(r) := v'(r)$. Pak $z'(r) + \frac{d-1}{r} z(r) = 0 \iff \left(z(r)\exp\left(\ln r^{d-1}\right)\right)' = 0$

Tedy
$$z(r)\, r^{d-1} = c_0 \Rightarrow v'(r) = \frac{c_0}{r^{d-1}} \Rightarrow v(r) = \begin{cases} c_0 \ln r & \boxed{d=2} \\ \frac{c_0}{r^{d-2}} & \boxed{d>2} \end{cases}$$
což jsou výsledky s singularitami v počátku, kandidáti

na F.Ř. v dimenzi d. Pro ilustraci dokážeme, že tzv.

logaritmický potenciál $\boxed{u_F(x) = \frac{\ln|x|^2}{4\pi} \text{ je F.Ř. Poissonovy rovnice ve dvou dimenzích}}$

[Nechť $d=2$] Každý fyzik ví, že Δu v polárních souřadnicích má tvar
$$\frac{\partial^2 u(r,\theta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u(r,\theta)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u(r,\theta)}{\partial \theta^2}.$$

Chceme ukázat, že $\Delta u_F = \delta$ v $\mathcal{D}'$ tzn. $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$
$$\left(\int_{\mathbb{R}^2} (\Delta u_F)\,\varphi\,dx = \right) \int_{\mathbb{R}^2} u_F\,\Delta\varphi\,dx \overset{?}{=} \varphi(0)$$

tato rovnost je formální

tento integrál má smysl ve smyslu hlavní hodnoty neboť $\ln|x| \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{B_\varepsilon(0)})$

Přechodem k polárním souřadnicím máme
$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus \overline{B_\varepsilon(0)}} u_F\,\Delta\varphi\,dx = \frac{1}{4\pi}\int_\varepsilon^\infty \int_0^{2\pi} \ln r^2 \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}\right)(r,\theta)\, r\,d\theta\,dr =: I_\varepsilon$$

- Zaprvé pozorujeme, že
$$\int_0^{2\pi} \frac{r\ln r}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}(r,\theta)\,d\theta = \frac{\ln r}{r}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}(r,\theta)\right]_0^{2\pi} = 0$$
neboť φ a její derivace jsou *hladké*

- Zadruhé, per partes ním dostaneme (φ má kompaktní nosič v $\mathbb{R}^2$)
$$\int_\varepsilon^\infty \ln r^2 \frac{\partial\varphi}{\partial r}\,dr = -\int_\varepsilon^\infty \frac{2}{r}\varphi(r,\theta)\,dr - \ln\varepsilon^2\,\varphi(\varepsilon,\theta)$$
$$\ln r^2 \downarrow \frac{2}{r}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial r} \downarrow \varphi$$
a
$$\int_\varepsilon^\infty r\ln r^2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\,dr = -\int_\varepsilon^\infty \frac{\partial}{\partial r}(r\ln r^2)\frac{\partial\varphi}{\partial r}\,dr - \varepsilon\ln\varepsilon^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}(\varepsilon,\theta)$$
$$= \int \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\ln r^2)\,\varphi\,dr + (\ln\varepsilon^2 + 2)\,\varphi(\varepsilon,\theta) - \varepsilon\ln\varepsilon^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}(\varepsilon,\theta)$$

Integrací přes θ, a sečtením všech dostaneme
$$I_\varepsilon = \frac{1}{4\pi}\left[\int_0^{2\pi}\int_\varepsilon^\infty \left[-\frac{2}{r} + \frac{2}{r}\right]\varphi\,dr\,d\theta\right] + \frac{2}{4\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\varepsilon,\theta)\,d\theta$$
$$-\frac{1}{4\pi}\underbrace{\varepsilon\ln\varepsilon^2}_{\to 0 \text{ pro } \varepsilon\to 0+}\int_0^{2\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial r}(\varepsilon,\theta)\,d\theta \to \varphi(0) = \underline{\varphi(0)},$$

neboť $\lim_{\varepsilon\to 0}\varphi(\varepsilon,\theta) = \varphi(0,\theta)$ a $\varphi \in C([0,2\pi])$.

∎

Ukázali jsme, že F.Ř. rovnice $-\Delta u = f$ v $\mathbb{R}^d$, jsou:

$$\left[\begin{array}{ll} d=2 & \dfrac{\ln(x_1^2+x_2^2)}{4\pi} = \dfrac{\ln|x|}{2\pi} \\[2ex] d=3 & \dfrac{1}{4\pi|x|} \\[2ex] d>2 & \dfrac{1}{d(d-2)\alpha(d)|x|^{d-2}} \end{array}\right]$$

$\alpha(d)$ objem jednotkové koule

V další části budeme zkoumat několik speciálních, ale důležitých parciálních diferenciálních rovnic. Pro některé úlohy se nám podaří nalézt explicitní vzorec pro řešení. Role vzorců je nezastupitelná – lze z něj zjistit spoustu vlastností a prověřit spoustu hypotéz o kvalitativních vlastnostech řešení obecnějších rovnic.

4.2 Transportní rovnice

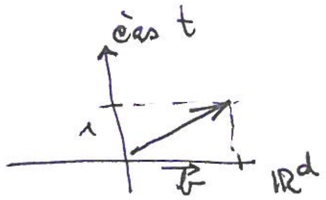
Uvažujme nejdříve rovnici

$$\text{(T1)} \quad \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{b}\cdot\nabla u = 0\right] \quad \text{v } (0,T)\times\mathbb{R}^d \qquad T\in(0,\infty]$$

kde $\vec{b}\in\mathbb{R}^d$ je konstantní vektorové pole.

Povšimněme si, že tuto rci transportu lze psát ve tvaru:

$$\underbrace{\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_d}\right)}_{\substack{D_{t,x}u \\ \text{časoprostorový gradient } u}} \cdot \underbrace{(1, b_1, \dots, b_d)}_{\substack{(1,\vec{b}) \\ \text{směr}}}}_{\text{časoprostorová směrová derivace}} = 0$$



Připomenutí $\partial_{\vec{b}} f(a) := \lim_{t\to 0} \dfrac{f(a+tb)-f(a)}{t}$ $\qquad a,b\in\mathbb{R}^d$

Derivace f ve směru b v bodě a

Pokud existují parciální derivace f v bodě a (což jsou směrové derivace f v a ve směrech $\vec{e}_i = (0,\dots,1,\dots,0)$ i-té místo)

pak $\boxed{\partial_{\vec{b}} f(a) = \nabla f(a)\cdot b}$

Shrnutí Rovnice (1) popisuje změnu veličiny u ve směru $(1, \vec{b})$.

Nyní bude následovat $\boxed{\text{OBECNĚJŠÍ ÚVAHA}}$, kterou využijeme k řešení Cauchyho úlohy

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + b \cdot \nabla u &= 0 \quad v\ (0,T) \times \mathbb{R}^d \\ u(0,\cdot) &= u_0 \quad v\ \mathbb{R}^d \end{aligned}} \tag{T1c}$$

<u>ÚVAHA</u> Uvažujme $u(y_1, \dots, y_m)$ splňující rovnici 1. řádu

$$a_1(\dots)\frac{\partial u}{\partial y_1}(\dots) + \dots + a_m(\dots)\frac{\partial u}{\partial y_m}(\dots) = 0 \tag{T2}$$

a uvažujme parametrizaci (křivku, trajektorii)

$$s \in \mathbb{R} \longmapsto (y_1(s), \dots, y_m(s))$$

a definujme

$$z(s) := u(y_1(s), \dots, y_m(s)).$$

Pak

$$z'(s) = \frac{\partial u}{\partial y_1} y_1' + \dots + \frac{\partial u_m}{\partial y_m} y_m' = y_1' \frac{\partial u}{\partial y_1} + \dots + y_m' \frac{\partial u}{\partial y_m}$$

Porovnáme-li výsledek s (T2) může nás napadnout tato myšlenka:

Pokud $y_1(s), \dots, y_m(s)$ řeší (systém ODR)

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{y}_1(s) &= a_1(y_1(s), \dots, y_m(s)) \\ &\ \vdots \\ \dot{y}_m(s) &= a_m(y_1(s), \dots, y_m(s)) \end{aligned}} \tag{T3}$$

Pak $z'(s) := \frac{d}{ds} z(s) = 0$, což znamená,

! že $z(s)$, a tedy $u(y_1(s), \dots, y_m(s))$, se podél parametrizace nemění, tj. <u>u je na křivce</u> „$s \mapsto$ <u>$(y_1(s), \dots, y_m(s))$</u>" <u>konstantní</u>.

Systému ODR (T3) se říká <u>charakteristický systém rovnic 1. řádu</u> (T2). Křivce „$s \longmapsto (y_1(s), \dots, y_m(s))$", což je řešení charakteristického systému (T3), se říká <u>charakteristika</u>.

Buď $(\bar y_1,\dots,\bar y_m)\in\mathbb{R}^m$ libovolný, pevný bod. Pokud nám charakteristika procházející tímto bodem protne přímku (křivku), na které máme zadaná (počáteční) data, pak víme, že $u(\bar y_1,\dots,\bar y_m)$ se shoduje s hodnotou dat v průsečíku charakteristiky s křivkou, kde máme zadané (počáteční) podmínky. *)

KONEC ÚVAHY

Použijme tuto úvahu na $(T1_c)$. Charakteristický systém má tvar $\boxed{\begin{aligned}\dot t(s)&=1\\ \dot x(s)&=\vec b\end{aligned}}$ Obecné řešení je pak $\boxed{\begin{aligned}t(s)&=s+\bar t\\ x(s)&=\vec b s+\bar x\end{aligned}}$ $(\bar t,\bar x)\in\mathbb{R}^{d+1}$ lib.

a funkce $z(s):=u(s+\bar t,\vec b s+\bar x)$ splňuje $\dot z=0$. Protože chceme, aby $u(0,x)=u_0(x)$, kde u_0 je daná funkce, dosadíme do $z(s)$ $s=-\bar t$, pak

$$u(0,\bar x-b\bar t)=u_0(\bar x-b\bar t)$$

Pak ale $z(s)=u_0(\bar x-b\bar t)$ pro $\forall s\in\mathbb{R}$

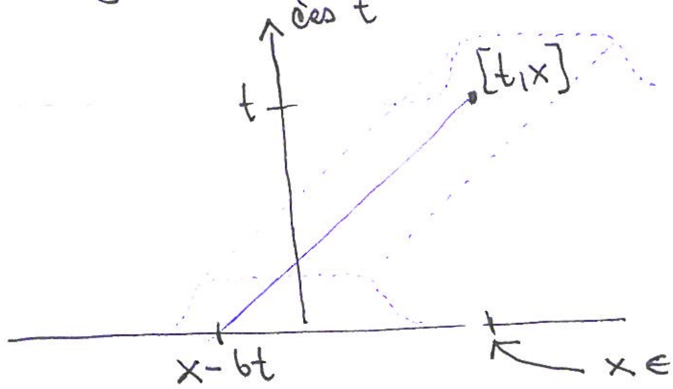
speciálně pro $s=0$ máme

$$(z(0)=)\ \boxed{u(\bar t,\bar x)=u_0(\bar x-b\bar t)}$$

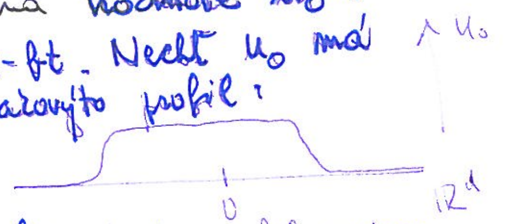
neboli

$$\boxed{u(t,x)=u_0(x-bt)}$$

což je hledané řešení Cauchyho úlohy $(T1_c)$.



Hodnota u v bodě $[t,x]$ je rovna hodnotě u_0 v bodě $x-bt$. Nechť u_0 má např. takovýto profil:



Pak se tento profil v čase posunuje podél charakteristiky a vytváří cestující vlnu (travelling wave)

---

*) Z této úvahy vidíme, že zadávání počátečních podmínek či dat na charakteristikách nás vede do nesmyslné situace, Tak největší problém teorii PDR 1. řádu je zajistit, abych zadával (počáteční) podmínky na rozumných necharakteristických křivkách.

Hledejme nyní řešení nehomogenní transportní rovnice

$$(T1_c)_f \qquad \boxed{\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{b}\cdot\nabla u &= f \quad \text{v } (0,\infty)\times\mathbb{R}^d \\ u(0,\cdot) &= u_0 \quad \text{v } \mathbb{R}^d \end{aligned}}$$

DATA: f, u_0

Buď $z(s)$ opět dána vztahem $z(s) = u(s+\bar{t}, \vec{b}s+\bar{x})$. Pak dostáváme (derivováním a pomocí rce $(T1_c)_f$):

$$\dot{z}(s) = f(s+\bar{t}, bs+\bar{x}).$$

Integrací od $-\bar{t}$ do 0 dostáváme:

$$z(0) - z(-\bar{t}) = \int_{-\bar{t}}^{0} f(s+\bar{t}, bs+\bar{x})\,ds \qquad s' = s+\bar{t}, \; ds' = ds$$

neboli (v termínech u):

$$u(\bar{t},\bar{x}) - u(0, \bar{x}-b\bar{t}) = \int_0^{\bar{t}} f(s', b(s'-\bar{t})+\bar{x})\,ds'$$

Využijeme-li poč. podmínku, pak

$$u(\bar{t},\bar{x}) = u_0(\bar{x}-b\bar{t}) + \int_0^{\bar{t}} f(s, b(s-\bar{t})+\bar{x})\,ds$$

neboli

$$\boxed{u(t,x) = u_0(x-bt) + \int_0^{t} f(s, b(s-t)+x)\,ds}$$

což je hledané řešení.

4.3. Vlnová rovnice

Budeme řešit Cauchyho úlohu, postupně v dimenzích 1, 2, 3.
Tzn., že hledáme $u: (0,\infty)\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ splňující

$$\left[\begin{array}{ll} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - k^2 \Delta u = f & \text{v } (0,\infty)\times\mathbb{R}^d \\ u(0,\cdot) = u_0 & \text{v } \mathbb{R}^d \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,\cdot) = u_1 & \text{v } \mathbb{R}^d \end{array}\right]$$

kde
$f: (0,\infty)\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$
$u_0 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$
$u_1 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$
jsou dané funkce (DATA ÚLOHY)

K hledání řešení můžeme použít Fourierovu transformaci, ale i jiné metody.

4.3.1 Případ $d=1$. D'Alembertův vzoreček.

Hledejme nejdříve obecné řešení pro $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$.

Povšimněme si, že

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - k\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t} + k\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - k\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + k\frac{\partial}{\partial x}\right)u$$

což je složení dvou transportních operátorů 1. řádu *)

To nás může přivést na myšlenku zavést nové proměnné

$$\boxed{\begin{array}{l} \xi = x - kt \\ \eta = x + kt \end{array}} \to \begin{array}{l} x = \frac{\xi+\eta}{2} \\ t = \frac{\eta-\xi}{2k} \end{array}$$

a uvažovat $\tilde{u}(\xi,\eta) = u\left(\frac{\eta-\xi}{2k}, \frac{\eta+\xi}{2}\right)$ $\left(= u(t,x)\right)$

Počítejme $\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial\xi\partial\eta}$.

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial\xi\partial\eta} = \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{2k}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -\frac{1}{4k^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{4k}\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x} - \frac{1}{4k}\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x} - \frac{1}{4}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$= -\frac{1}{4k^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - k^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = 0$$

*) Je také možné (a není to obtížné) využít výsledků o transportní rovnici a nalézt obecné řešení vlnové rovnice.

Z $\dfrac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta} = 0$ však plyne $\dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta}(\xi, \eta) = \tilde{G}(\eta)$

a odsud $\tilde{u}(\xi, \eta) = G(\eta) + H(\xi)$

pro nějaké G a H.

Tedy obecné řešení vlnové rovnice v $d=1$ má tvar:

(1) $$\boxed{u(t,x) = G(x+kt) + H(x-kt)}$$

Řešíme-li Cauchyho úlohu $\boxed{\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - k^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \,,\; u(0,\cdot) = u_0 \,,\; \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,\cdot) = u_1}$

pak z (1) plyne

($\heartsuit$)
$$u(0,x) = u_0(x) = G(x) + H(x)$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = u_1(x) = kG'(x) - kH'(x)$$
$$\to \quad k u_0'(x) = kG'(x) + kH'(x)$$

Máme vyřešit dvou rovnice pro H a G.

Tedy
$$\begin{cases} G'(x) = \dfrac{u_0'(x)}{2} + \dfrac{1}{2k} u_1(x) \\ H'(x) = \dfrac{u_0'(x)}{2} - \dfrac{1}{2k} u_1(x) \end{cases}$$

což implikuje
$$\left.\begin{array}{l} G(x) = \dfrac{u_0(x)}{2} + \dfrac{1}{2k} \displaystyle\int_0^x u_1(s)\,ds \\ H(x) = \dfrac{u_0(x)}{2} - \dfrac{1}{2k} \displaystyle\int_0^x u_1(s)\,ds \end{array}\right\}$$
tyto funkce splňují vztahy ($\heartsuit$) v rámečku

Tedy z (1)

(d'A) $$\boxed{u(t,x) = \frac{1}{2}\left\{ u_0(x+kt) + u_0(x-kt) + \frac{1}{k}\int_{x-kt}^{x+kt} u_1(s)\,ds \right\}}$$

což je hledané řešení, tzv. D'Alembertův vzoreček.

$\boxed{\text{Věta}}$ 4.2 Buď $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$, $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$ a u je dané vztahem (d'A).
Pak • $u \in C^2([0,\infty) \times \mathbb{R})$, • u splňuje $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - k^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ a

• $\lim\limits_{t \to 0+} u(t,x) = u_0(x)$, $\lim\limits_{t \to 0+} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) = u_1(x)$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$.

Dk SAMI.

Uvažujme nyní úlohu (počáteční a okrajovou) na polopřímce.

Hledáme $u: \underset{t}{(0,\infty)} \times \underset{x}{(0,\infty)} \to \mathbb{R}$ tak, že

$$(U^+)\quad \left[\begin{array}{lll} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \xi^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{v } (0,\infty)\times\Omega & \Omega = (0,\infty) \\ u(0,\cdot) = u_0,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,\cdot) = u_1 & \text{v } \Omega & \\ u(t,0) = 0 & \forall\, t\in(0,\infty) & [u=0 \text{ na } (0,\infty)\times\{0\}] \end{array}\right.$$

u_0, u_1, ξ DATA splňující $u_0(0) = u_1(0) = 0$

Řešení nalezneme tak, že úlohu rozšíříme z $(0,\infty)$ do $\mathbb{R}$, a to liše.

$$\tilde{u}(t,x) := \begin{cases} u(t,x) & \text{v } (0,\infty)\times\mathbb{R}^+ \\ -u(t,-x) & \text{v } (0,\infty)\times\mathbb{R}^- \end{cases}$$

$$\tilde{u}_0(x) := \begin{cases} u_0(x) & \text{v } \mathbb{R}^+ \\ -u_0(-x) & \text{v } \mathbb{R}^- \end{cases}$$

$$\tilde{u}_1(x) := \begin{cases} u_1(x) & \text{v } \mathbb{R}^+ \\ -u_1(-x) & \text{v } \mathbb{R}^- \end{cases}$$

Pak (U^+) vede

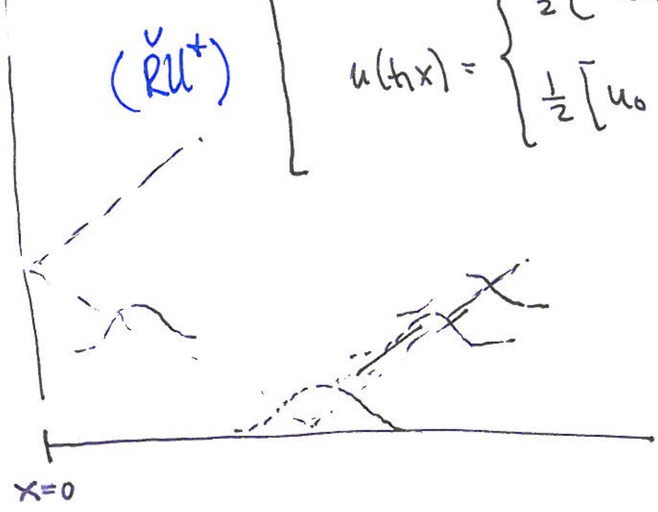
$$(U)\quad \left[\begin{array}{ll} \dfrac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} - \xi^2 \dfrac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} = 0 & \text{v } (0,\infty)\times\mathbb{R} \\ \tilde{u}(0,\cdot) = \tilde{u}_0,\ \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(0,\cdot) = \tilde{u}_1 & \text{v } \mathbb{R} \end{array}\right]$$

Dle d'Alembertova vzorce:

$$\tilde{u}(t,x) = \frac{1}{2}\left[\tilde{u}_0(x+\xi t) + \tilde{u}_0(x-\xi t) + \frac{1}{\xi}\int_{x-\xi t}^{x+\xi t} \tilde{u}_1(y)\,dy\right]$$

neboli

$$(\check{R}U^+)\quad u(t,x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[u_0(x+\xi t) + u_0(x-\xi t) + \frac{1}{\xi}\int_{x-\xi t}^{x+\xi t} u_1(y)\,dy\right] & x \geq \xi t > 0 \\ \frac{1}{2}\left[u_0(x+\xi t) - u_0(\xi t - x) + \frac{1}{\xi}\int_{\xi t - x}^{x+\xi t} u_1(y)\,dy\right] & \xi t \geq x \geq 0 \end{cases}$$



tato část popisuje odraz vlny v $x=0$.

[Toto řešení nebude $C^2((0,\infty)\times(0,\infty))$ (klasické řešení) pokud $u_0''(0) \neq 0$]

4.3.2 Sférické průměry; $d=2,3$.

Zavedeme následující označení:

$$U(x;t,r) := \fint_{\partial B_r(x)} u(t,y)\,dS_y := \frac{1}{|\partial B_r(x)|}\int_{\partial B_r(x)} u(t,y)\,dS_y$$

$$U_0(x;r) := \fint_{\partial B_r(x)} u_0(y)\,dS_y \qquad U_1(x,r) := \fint_{\partial B_r(x)} u_1(y)\,dS_y$$

Na veličinu U se budeme dívat jako funkci proměnných $r\in[0,\infty)$ a $t\in(0,\infty)$ parametrizovanou $x\in\mathbb{R}^d$.

Ukážeme, že pokud u chápeme jako řešení vlnové rovnice ve dvou a třech dimenzích, tak U řeší modifikovanou vlnovou rovnici v $d=1$. Platí:

__Lemma__ Nechť $u\in C^m([0,\infty)\times\mathbb{R}^d)$ je řešení $\boxed{\Box u=0,\ u(0,\cdot)=u_0,\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,\cdot)=u_1}$ v $\mathbb{R}^d$, $d\geq 2$. Buď $x\in\mathbb{R}^d$ libovolné, pevné.
Pak $U\in C^m([0,\infty)\times\mathbb{R}^+)$ splňuje

(Euler-Poisson-Darbouxovu rci)
$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}-\frac{d-1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}=0 \quad \text{v } \overset{t}{(0,\infty)}\times\overset{r}{(0,\infty)}$$

$$U=U_0,\quad \frac{\partial U}{\partial t}=U_1 \quad \text{v } \{0\}\times(0,\infty)$$

Dk: Nejdříve pomocný výpočet. Označme $\Psi(r) := \fint_{\partial B_r(x)} \psi(y)\,dS_y$.
Substitucí $z=\frac{y-x}{r}$ dostáváme $\Psi(r)=\fint_{\partial B_1(0)}\psi(x+rz)\,dS_z$.
Odsud plyne

$$\Psi'(r)=\fint_{\partial B_1(0)}\nabla\psi(x+rz)\cdot z\,dS_z = \fint_{\partial B_r(x)}\nabla\psi(y)\cdot\underbrace{\frac{y-x}{r}}_{\vec{n}}\,dS_y$$

$\vec{n}$ vnější jednotková normála

$$=\fint_{\partial B_r(x)}\frac{\partial\psi}{\partial\vec{n}}\,dS_y \overset{\text{Gauss}}{=} \frac{1}{|\partial B_r(x)|}\int_{B_r(x)}\Delta\psi(y)\,dy=\frac{r}{d}\frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)}\Delta\psi(y)\,dy$$

Nyní za Ψ vezměme U.

Tak
$$\frac{\partial U}{\partial r}(x;t,r)=\frac{r}{d}\fint_{B_r(x)}\Delta u(t,y)\,dy \underset{u \text{ řeší } \Box u=0}{=} \frac{r}{d}\fint_{B_r(x)}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,y)\,dy=\frac{1}{d\alpha(d)\,r^{d-1}}\int_{B_r(x)}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,y)\,dy$$

Tak
$$r^{d-1}\frac{\partial U}{\partial r}=\frac{1}{d\alpha(d)}\int_{B_r(x)}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,dy \underset{\text{„Fubini"}}{=} \frac{1}{d\alpha(d)}\int_0^r\left(\int_{\partial B_\rho(x)}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,dS_y\right)d\rho$$

Nyní
$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{d-1}\frac{\partial U}{\partial r}\right)} \overset{\text{derivování integ. dle horní meze}}{=} \frac{1}{d\alpha(d)}\int_{\partial B_r(x)}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,dS_y=\frac{r^{d-1}}{|\partial B_r(x)|}\int_{\partial B_r(x)}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,dS_y=\underbrace{r^{d-1}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}},$$

což dává (E-P-D) rci. ∎

$\boxed{\text{Buď } d=3}$ Pak (E-P-D) se redukuje pro $\tilde{U} := rU$, $\tilde{U}_0 := rU_0$, $\tilde{U}_1 := rU_1$ na úlohu

$$\left[\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial r^2} = 0 \text{ v } \overset{t}{(0,\infty)} \times \overset{r}{(0,\infty)} \\ &\tilde{u} = \tilde{u}_0, \ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = \tilde{u}_1 \text{ v } \{0\} \times (0,\infty) \\ &\tilde{u} = 0 \quad \text{na} \quad (0,\infty) \times \{0\} \end{aligned}\right]$$

Dk $\quad \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} = r\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = r\left[\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right] = r\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + 2\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(U + r\frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial r^2}$ $\square$

Povšimněme také, že $\frac{\partial^2 \tilde{u}_0}{\partial r^2}(0) = 0$

Pokud $\boxed{0 \le r \le t}$

$$\tilde{u}(x;r,t) = \frac{1}{2}\left[U_0(r+t) + U_0(t-r) + \frac{1}{2}\int_{t-r}^{t+r} \tilde{u}_1(y)\,dy\right]$$

Protože

$$u(t,x) = \lim_{r\to 0+} \frac{\tilde{u}(x;r,t)}{r} = \lim_{r\to 0}\left[\frac{\tilde{u}_0(r+t) - \tilde{u}_0(t-r)}{2r} + \frac{1}{2r}\int_{t-r}^{t+r} \tilde{u}_1(y)\,dy\right]$$

$$= \tilde{u}_0'(t) + \tilde{u}_1(t)$$

Tedy

$$\underline{\underline{u(t,x)}} = \frac{\partial}{\partial t}\left(t \fint_{\partial B_t(x)} u_0(y)\,dS_y\right) + t\fint_{\partial B_t(x)} u_1(y)\,dS_y$$

$$\overset{\shortparallel}{t\fint_{\partial B_1(0)} u_0(x+tz)\,dS_z}$$

$$= \fint_{\partial B_1(0)} \nabla u_0(x+tz)\cdot z\,dS_z + \fint_{\partial B_1(0)} u_0(x+tz)\,dS_z + t\fint_{\partial B_1(0)} u_1(y)\,dS_y$$

$$= \fint_{\partial B_t(x)} u_0(y) + tu_1(y) + \nabla u_0(y)\cdot(y-x)\,dS_y \qquad x\in\mathbb{R}^3,\ t>0$$

[Kirchhoffův vzorec] pro řešení Cauchyho úlohy pro vlnovou rovnici ve třech dimenzích.

Buď $\boxed{d=2}$. Nyní nelze bohužel metodu využít (E-P-D) rci. Použijeme jinou metodu: redukce dimenze či metodu sestupu. Budeme chápat dvoudimenzionální problém jako speciální případ ve 3 dimenzích.

Pokud u řešit úlohu v $d=2$, pak označme

$$\bar u(t,x_1,x_2,x_3) := u(t,x_1,x_2)$$
$$\bar u_0(x_1,x_2,x_3) := u_0(x_1,x_2)$$
$$\bar u_1(x_1,x_2,x_3) = u_1(x_1,x_2).$$

Ukážeme, že z Kirchhoffova vzorce lze odvodit

$$(P_0) \qquad \left[\; u(t,\overset{x_1,x_2}{x}) = \frac{1}{2} \fint_{B_t(x)} \frac{t u_0(y) + t^2 u_1(y) + t \nabla u_0(y)\cdot(y-x)}{(t^2-|y-x|^2)^{1/2}} \;\right]$$

což je Poissonův vzorec pro řeš. Cauchyho úlohy pro vlnovou rovnici ve dvou dimenzích.

Ještě než formuli (P_0) odvodíme, všimněme si, že:

Je-li $d=3$, pak u_0, u_1 v x mají vliv na řešení jen na hranici $\{(y,t) \mid t>0, |x-y|=t\}$ kužele $C := \{(y,t);\ t>0,\ |x-y|<t\}$.

Je-li však $d=2$, pak u_0, u_1 ovlivňují u v celém kuželi.

Tento princip, tzv. Huygensův princip, se týká obecně sudých a lichých dimenzí. Princip říká, že porucha či signál, který vznikl v x, se šíří v lichých dimenzích po ostré vlnové ~~[illegible]~~ frontě, ale v sudých dimenzích ovlivňují řešení i poté co vedoucí hrana té vlnové fronty prošla bodem x. Pro jistou představu uvažme vlny vzniklé hozeným kamenem do mělké vody. (Nevýhodou této analogie je skutečnost, že rovnice popisující mělkou vodu není lineární vlnová rovnice.)

Odvození (P_0) Předpokládáme, že $u(t,x_1,x_2)$ řeší vlnovou rovnici v $\mathbb{R}^2$.

Tedy $\bar{u}(t,x_1,x_2,x_3) := u(t,x_1,x_2)$ řeší vlnovou rovnici v $\mathbb{R}^3$.

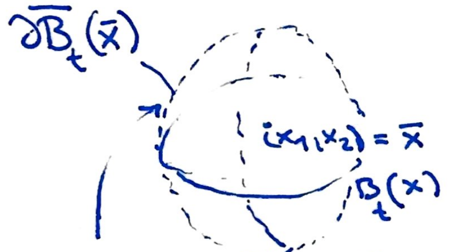
Dle Kirchhoffova vzorečku, viz str. 4/16, kde užijeme značení $\bar{x} = (x_1,x_2,0)$

$\bar{B}_t(\bar{x}) = \{y \in \mathbb{R}^3, |y-\bar{x}|<t\}$

$$u(t,x_1,x_2) = \bar{u}(t,x_1,x_2,x_3)$$
$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(t ⨍_{\partial \bar{B}_t(\bar{x})} \bar{u}_0(y)\, dS_y \right) + t ⨍_{\partial \bar{B}_t(\bar{x})} \bar{u}_1(y)\, dS_y$$

Tento vztah zjednodušíme takto:

$$⨍_{\partial \bar{B}_t(\bar{x})} \bar{u}_0(y)\, dS_y = \frac{1}{4\pi t^2} \int_{\partial \bar{B}_t(\bar{x})} \bar{u}_0(y)\, dS_y$$



$$= \frac{2}{4\pi t^2} \int_{B_t(x)} u_0(y) \sqrt{1 + |\nabla_y x_3(y)|^2}\, dy$$
$$= \frac{2}{4\pi t^2} \int_{B_t(x)} u_0(y) \frac{t}{\sqrt{t^2-|y-x|^2}}\, dy$$

$$x_3^2 + (y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2 = t^2$$
$$x_3 = \pm\sqrt{t^2-|y-x|^2} = x_3(y_1,y_2)$$
$$\nabla_y x_3 = \left(\frac{y_1-x_1}{\sqrt{t^2-|y-x|^2}}, \frac{y_2-x_2}{\sqrt{t^2-|y-x|^2}} \right)$$
$$1 + |\nabla_y x_3|^2 = \frac{t^2}{t^2-|y-x|^2}$$

$$= \frac{1}{2\pi t} \int_{B_t(x)} \frac{u_0(y)}{\sqrt{t^2-|y-x|^2}}\, dy$$
$$= \frac{t}{2} ⨍_{B_t(x)} \frac{u_0(y)}{\sqrt{t^2+(y-x)^2}}\, dy$$

Tedy
$$u(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t^2}{2} ⨍_{B_t(x)} \frac{u_0(y)}{\sqrt{t^2+(y-x)^2}}\, dy \right) + \frac{t^2}{2} ⨍_{B_t(x)} \frac{u_1(y)}{(t^2-|y-x|^2)^{\frac{1}{2}}}\, dy$$

Protože
$$t^2 ⨍_{B_t(x)} \frac{u_0(y)}{\sqrt{t^2+(y-x)^2}}\, dy \underset{\substack{z = \frac{y-x}{t} \\ y = x+tz \\ \det \nabla y = t^2}}{=} \frac{t^2}{\pi t^2} \int_{B_1(0)} \frac{u_0(x+zt)}{\sqrt{1+|z|^2}}\, dz \frac{t^2}{t} = t ⨍_{B_1(0)} \frac{u_0(x+zt)}{\sqrt{1-|z|^2}}\, dz$$

tak (dopočítejte!)

$$\boxed{u(t,x) = \frac{1}{2} ⨍_{B_t(x)} \frac{t u_0(y) + t^2 u_1(y) + t \nabla u_0(y)\cdot(y-x)}{\sqrt{t^2-|y-x|^2}}\, dy}$$

Nehomogenní Cauchyho úloha pro vlnovou rovnici

Pokud chci vyřešit úlohu

$$(W_f)\quad \left[\begin{array}{ll} \Box u = f & \text{v } (0,\infty)\times\mathbb{R}^d \\ u = u_0,\ \frac{\partial u}{\partial t} = u_1 & \text{v } \{0\}\times\mathbb{R}^d \end{array}\right]$$

Postupuji tak, že ① vezmu řešení u_H homogenní Cauchyho úlohy

$$(W_H)\quad \left[\begin{array}{ll} \Box u_H = 0 & \text{v } (0,\infty)\times\mathbb{R}^d \\ u_H = u_0,\ \frac{\partial u}{\partial t} = u_1 & \text{v } \{0\}\times\mathbb{R}^d \end{array}\right.$$

② vezmu řešení u_f splňující

$$(U_f)\quad \begin{array}{ll} \Box u_f = f & \text{v } (0,\infty)\times\mathbb{R}^d \\ u_f = 0,\ \frac{\partial u}{\partial t} = 0 & \text{v } \{0\}\times\mathbb{R}^d \end{array}$$

Pak $u = u_H + u_f$ řeší (W_f) [díky **LINEARITĚ** $\Box$]

$\boxed{\text{Zbývá vyřešit } (U_f).}$ Očekáváme konvoluci s fundamentálním řešením vlnového operátoru. U evolučních rovnic je F.Ř. odlišné od obecných úloh $Lu=f$ v tom smyslu, že čas dáváme výjimečnou roli. Viděli jsme např. v kapitole 1, viz str. 1/13 – 1/15, že Fundamentální řešení rovnice vedení tepla je řešení úlohy

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \ \text{v } (0,\infty)\times\mathbb{R}^d,\quad u(0,\cdot) = \delta \ \text{v } \mathbb{R}^d}$$

(a toto fundamentální řešení má tvar $G_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} e^{-|x|^2/4t}$
viz podrobněji Lemma na str. 1/15.)

Také jsme viděli, že u rovnice transportu:

$$u_H^{trans}(t,x) = u_0(x-bt)$$

a

$$u_f^{transp}(t,x) = \int_0^t f(s, b(s-t)+x)\,ds$$

} a součtem dostanu řešení nehomogenní rovnice transportu $\boxed{\begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + b\cdot\nabla u = f \\ u(0,\cdot) = u_0 \end{array}}$

F. řešení je řeš. úlohy $\boxed{\begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + b\cdot\nabla u = 0 \\ u(0,\cdot) = \delta_x \end{array}}$

které má tvar δ_{x-bt}, tzn. $\langle \delta_{x-bt}, \varphi\rangle = \varphi(x-bt)$.

U vlnové rovnice je Fund. řešení $\Box u = 0$ řešení úlohy

$$\left[\Box u = 0 \ \text{v } (0,\infty)\times\mathbb{R}^d,\quad u(0,\cdot) = 0,\quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,\cdot) = \delta_x \ \text{v } \{0\}\times\mathbb{R}^d\right]$$

Ještě si připomeňme, že F. řeš. $x^{(n)} = f$ má tvar

$$u_F(t) = \begin{cases} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} & (t>0) \\ 0 & (t<0) \end{cases}$$

(viz str. 4/5)

což lze však vnímat i jako řešení úlohy *)

$$x^{(n)} = 0 \quad , \; x(0) = \dots = x^{(n-2)}(0) = 0 \; , \; x^{(n-1)}(0) = 1 .$$

Teď už se plně shodneme, že F. Ř. $\Box u = f$ je řeš. úlohy

$$\boxed{\Box u = 0 \text{ v } (0,\infty)\times\mathbb{R}^d \; , \; u(0,\cdot) = 0 \; , \; \frac{\partial u}{\partial t}(0,\cdot) = \delta}$$

Proto

v $\boxed{d=1}$ z d'Alembertova vzorečku a předchozí úvah plyne

$$u_f(t,x) = \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} f(s,y)\,dy\,ds$$

a

v $\boxed{d=3}$

$$u_f(t,x) = \int_0^t (t-s) \fint_{\partial_{t-s}B(x)} f(s,y)\,dS_y\,ds$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_0^t \int_{\partial_{t-s}B(x)} \frac{f(s,y)}{(t-s)}\,dS_y\,ds$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_0^t \int_{\partial_r B(x)} \frac{f(t-r,y)}{r}\,dS_y\,dr$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{B_t(x)} \frac{f(t-|y-x|,y)}{|y-x|}\,dy$$

<u>zpožděný potenciál</u>

*) Víme, že řeš. $x^{(n)} = f$ je ve tvaru $x(t) = (u_F * f)(t)$ je-li f def. na $(0,\infty)$. Pak

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underset{\substack{\shortparallel \\ 0 \text{ na } (-\infty,0)}}{f(s)}\, u_F(\underset{\to\, t-s>0 \iff s<t}{t-s})\,ds = \int_0^t f(s)\,u_F(t-s)\,ds .$$

Důležité v mat. analýze rovnic jsou energetické metody.
Buď u řešení Cauchyho či počátečně a okrajové úlohy pro vlnový operátor. Formálně vynásobme $\Box u = 0$ (či $\Box u = f$) fci $\frac{\partial u}{\partial t}$ a proveďme integraci přes Ω.

Pak
$$\int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\frac{\partial u}{\partial t}\,dx = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_2^2$$

a také
$$-\int_\Omega \Delta u \frac{\partial u}{\partial t}\,dx \underset{\text{per partes}}{=} +\int_\Omega \nabla u \cdot \frac{\partial}{\partial t}\nabla u\,dx - \int_{\partial\Omega}\underbrace{\frac{\partial u}{\partial n}\frac{\partial u}{\partial t}}_{=0}\,dx$$

0 pokud $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ či $u = 0$ nebo $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ či pokud u klesá v ∞

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx$$
$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_2^2$$

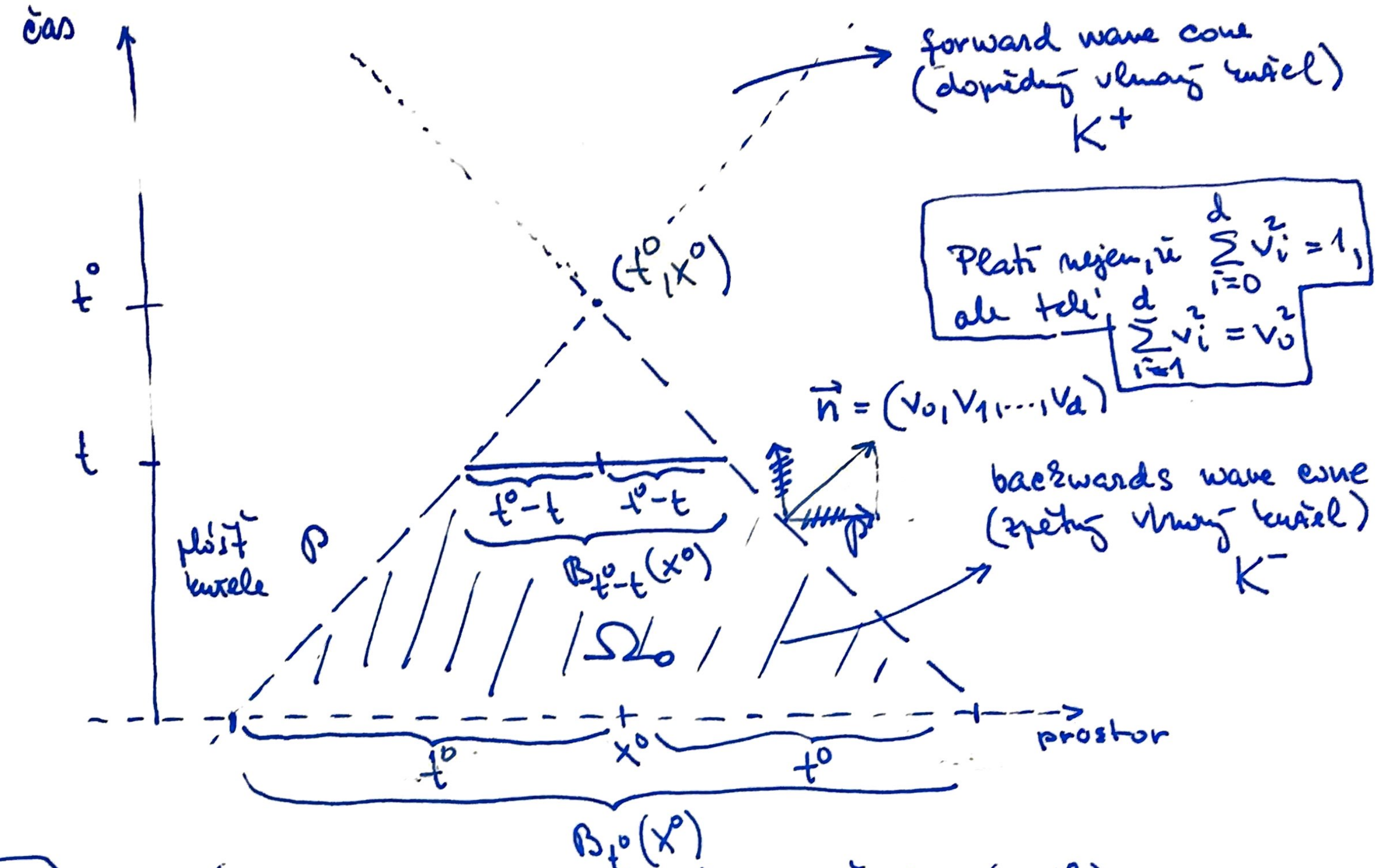
Tedy
$$\frac{d}{dt}\left(\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2\right) = 0$$

$\int_0^t ds$
$$\boxed{\left\|\frac{\partial u}{\partial t}(t)\right\|_2^2 + \|\nabla u(t)\|_2^2 = \|u_1\|_2^2 + \|\nabla u_0\|_2^2}$$

Věta 4.3 (O jednoznačnosti řešení počáteční a okraj. úlohy pro $\Box u = f$)
Existuje nejvýše jedno klasické řešení u (tzn. $u \in C^2(\overline{Q_T})$) splňující spojité poč. podmínky a okrajové podmínky pro úlohu:

$$\boxed{\begin{aligned} \Box u &= f \quad \text{v } Q_T := (0,T)\times\Omega \\ u = u_0,\ \frac{\partial u}{\partial t} &= u_1 \quad \text{v } \{0\}\times\Omega \\ u &= a \quad \text{v } \Sigma_T := (0,T)\times\partial\Omega \end{aligned}} \qquad (W_{IBVP})$$

Dk Nechť jsou řešení dvě: u a v splňující (W_{IBVP}).
Pak $w := u - v$ splňuje $\boxed{\Box w = 0 \text{ v } Q_T,\ w = \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \text{ v } \Omega,\ w = 0 \text{ na } \Sigma_T}$.
Násobme $\Box w$ fcí w, $\int_\Omega$ a jako výše dokončeme pro všechna $t > 0$:
$$\left\|\frac{\partial w}{\partial t}(t)\right\|_2^2 + \|\nabla w\|_2^2 = 0 \quad \text{neboli} \quad \left(\frac{\partial w}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial w}{\partial x_d}\right) = 0$$
tedy $w \equiv$ konstanta a protože $w = 0$ na Σ_T tak $w \equiv 0$. Tedy $u = v$ v Q_T a věta je dokázána. ☐



Věta 4.4 (energetická nerovnost) Buď $t \in (0, t^0)$ a $B_{t^0}(x^0)$, $B_{t^0-t}(x^0)$ jako na obrázku. Nechť $u \in C^2(\overline{\Omega_0})$ je řešením vlnové rovnice ($\Box u = 0$) (resp. Cauchyho či IBVP) s tím, že $\overline{\Omega_0} \subset Q_T$ (resp. $(0,\infty)\times\mathbb{R}^d$). Pak

$$\boxed{(EN) \quad \int_{B_{t^0-t}(x^0)} \left(\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 + |\nabla u|^2\right)\Big|_{(t^0-t,x)} dx \le \int_{B_{t^0}(x^0)} \left(\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 + |\nabla u|^2\right)\Big|_{(t^0,x)} dx}$$

Dk: Opět násobme $\Box u = 0$ (ZDROJE f JSOU NULOVÉ) fcí u a integrujme přes časoprostorovou množinu Ω_0 s hranicí $\partial\Omega_0 = B_{t^0}(x^0) \cup B_{t^0-t}(x^0) \cup P$. Máme

$$0 = \int_{\Omega_0} \frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u\right) dx\, ds = \int_{\Omega_0} \frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t} - \operatorname{div}(\nabla u)\right) dx\, ds$$

$$= \int_{\Omega_0} \left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \operatorname{div}_x\left(\frac{\partial u}{\partial t}\nabla u\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}|\nabla u|^2\right) dx\, ds$$

$$= \frac{1}{2}\int_{B_{t^0-t}(x^0)} \left(\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 + |\nabla u|^2\right) dx - \frac{1}{2}\int_{B_{t^0}(x^0)} \left(\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 + |\nabla u|^2\right) dx$$

$$+ \int_P \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}|\nabla u|^2\right)\nu_0 - \frac{\partial u}{\partial t}\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial u}{\partial x_i}\nu_i \; dS_{tx} =: I_1 + I_2 + I_3.$$

Důkaz bude hotov pokud ukážeme, že $I_3 \ge 0$.

Avšak $(v_0>0)$

$$I_3 = \frac{1}{2v_0}\int_P \left(\left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + |\nabla u|^2\right)v_0^2 - 2\sum_{i=1}^d \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x_i} v_i v_0\right) dS_{x,t}$$

$$= \frac{1}{2v_0}\int_P \sum_{i=1}^d \left(v_i \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x_i} v_0\right)^2 dS_{t,x} \geq 0$$

kde jsme využili skutečnosti, že $\sum_{i=1}^d v_i^2 = v_0^2$. ☒

<u>Důsledek</u> Je-li $u \in C^2(\overline{K^-})$ a $u = 0 = \frac{\partial u}{\partial t}$ v $B_{t^0}(x^0)$. Pak $u \equiv 0$ v K^-.

Řešení vlnovou rovnici pomocí Fourierovy transformace Cauchyho úlohy pro

Aplikuji-li F.T.*) na

$$\boxed{\begin{aligned} &\Box u = 0 \quad v\ (0,\infty)\times\mathbb{R}^d \\ &u(0,\cdot) = u_0,\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,\cdot) = u_1 \quad v\ \mathbb{R}^d \end{aligned}}$$

pak dostane

$$(*) \quad \boxed{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2} + |s|^2 \hat{u} = 0 \quad &v\ (0,\infty)\times\mathbb{R}^d \\ &\hat{u}(0,\cdot) = \hat{u}_0,\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(0,\cdot) = \hat{u}_1 \quad &v\ \mathbb{R}^d \end{aligned}}$$

což je pro pevné $s \in \mathbb{R}^d$ O.D.R.

Řešením (zcela formálně lze provést i v distribucích)

$$\boxed{\hat{u}(t,s) = \hat{u}_0(s)\cos(t|s|) + \frac{\hat{u}_1(s)}{|s|}\sin(t|s|)}$$

Invertováním

$$u(t,x) = \left[\hat{u}_0(s)\cos(t|s|) + \frac{\hat{u}_1(s)}{|s|}\sin(t|s|)\right]^\vee$$

Pro $u_1 \equiv 0$

$$(**) \quad \boxed{u(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\hat{u}_0(s)}{2}\left(e^{i(x\cdot s + t|s|)} + e^{i(x\cdot s - t|s|)}\right) ds.}$$

---

* máme na mysli F.T. v $\mathbb{R}^d$

$$\hat{u}(t,s) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d} u(t,x)e^{ix\cdot s}\,dx$$

Je-li navíc $d=1$, tak

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\hat{u}_0(s)}{2}\left(e^{i(xs+t|s|)} + e^{i(xs-t|s|)}\right) ds$$

rozdělením integrace na $(0,\infty)$ a $(-\infty,0)$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\hat{u}_0(s)}{2} e^{i(x+t)s} ds + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\hat{u}_0(s)}{2} e^{i(x-t)s} ds$$

def. inverzní F.t.

$$= \frac{1}{2}\left(u_0(x+t) + u_0(x-t)\right),$$ což je část d'Alembertova vzorečku.

Ten platí pokud $\underline{u_0 \in \mathcal{S}'}$

Jak získat Kirchhoffův vzorec pomocí F.T. uvidíte či jste již viděli na cvičení.

SHRNUTÍ, které má mimojiné ozřejmit a upřesnit hledání fundamentálního řešení vlnové rovnice a hledání řešení Cauchyho úloh s nenulovou pravou stranou.

(1) Cílem je vysvětlit proč F. řešení vlnové rovnice, tzn. řešení úlohy

(V1) $$\boxed{\Box u = \delta_{t,x} \quad \text{v } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{d+1})}$$

$$\langle \delta_{t,x}, \varphi\rangle = \varphi(0,\underbrace{0,\dots,0}_{d\text{ krát}}) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{d+1})$$

lze získat řešením úlohy

(V2)
$$\boxed{\begin{aligned} \Box u &= 0 && \text{v } (0,\infty)\times\mathbb{R}^d \\ u(0,\cdot) &= 0 && \text{v } \mathbb{R}^d \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,\cdot) &= \delta_x && \text{v } \mathbb{R}^d \end{aligned}}$$

$$\langle \delta_x, \psi\rangle = \psi(0) \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$$

Uvažujme nejdříve ODR, kde jednorozměrná proměnná je čas, tj. $x = x(t)$, $t \in (0,\infty)$.

- Nejjednodušší rovnice je $x' = 0$ resp. $x' = f$ v $\mathbb{R}$.

  Víme, že $\boxed{\text{všechna řešení } x' = f}$ jsou ve tvaru $\boxed{\text{všechna řeš. } x' = 0}$ + [jedno spec. řeš. $x' = f$]

  což dává

$$\boxed{x(t) = C + \int_0^t f(s)\,ds \quad \text{pokud } f \in L^1(0,\infty)}$$

Fundamentální řeš. této ODR je jediné řešení $\boxed{x' = \delta \text{ v } \mathcal{D}'(\mathbb{R})}$ což je $\boxed{x_F(t) = H(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}}$. Toto řešení lze získat taky takto

$$\boxed{x_F(t) = H(t)\, z(t), \quad \text{kde } z \text{ řeší } \begin{array}{l} z' = 0 \text{ v } (0,\infty) \\ z(0) = 1 \end{array}}$$

Toto platí obecněji:

Tvrzení Označme $Lx := x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1 x' + a_0 x$, kde $a_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{0,1,\dots,n-1\}$. Nechť z řeší úlohu

$$\boxed{Lz = 0 \text{ v } (0,\infty), \quad z(0) = \dots = z^{(n-2)}(0) = 0, \quad z^{(n-1)}(0) = 1}$$

Pak $x_F(t) := \underset{\text{Heaviside}}{H(t)}\, z(t)$ je fund. řeš. rovnice $Lx = f$, tzn. $\boxed{Lx_F = \delta_t \text{ v } \mathcal{D}'(\mathbb{R})}$.

Dk Pro $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ libovolné, ale pevné platí,

$$\langle Lx_F, \varphi\rangle = \langle x_F, L^*\varphi\rangle = \int_0^\infty z(t)\, L^*\varphi(t)\, dt$$

duální operátor, který vznikne po "per partes"

plyne z definice distributivní derivace

$$\overset{\text{per partes}}{=} \int_0^\infty \underbrace{Lz(t)}_{=0}\, \varphi(t)\, dt$$

$\varphi \equiv 0$ v "∞"

$z(0) = \dots = z^{(n-2)}(0) = 0$

$$- \left[z^{(n-1)}\varphi\right]_0^\infty$$

$$= \varphi(0) = \langle \delta, \varphi\rangle,$$

což jsme chtěli ukázat. ∎

Pro úplné pochopení proveďme důkaz podrobněji pro $n = 2$. V tomto případě $Lx := x'' + a_1 x' + a_0 x$. Pak

$$\left.\begin{aligned} \langle Lx, \varphi\rangle &= \langle x'', \varphi\rangle + a_1\langle x', \varphi\rangle + a_0\langle x, \varphi\rangle \\ &= \langle x, \varphi''\rangle - a_1\langle x, \varphi'\rangle + a_0\langle x, \varphi\rangle \\ &= \langle x, \varphi'' - a_1\varphi' + a_0\varphi\rangle =: \langle x, L^*\varphi\rangle \end{aligned}\right\} (\Delta)$$

linearita

definice distributivní derivace

linearita

Nechť z řeší $\boxed{\underset{\text{v } \mathbb{R}}{Lz = 0}, \ z(0) = 0, \ z'(0) = 1}$ Chceme ukázat, že $x_F(t) = H(t) z(t)$ splňuje $\langle Lx_F, \varphi\rangle = \langle \delta, \varphi\rangle = \varphi(0)$. Avšak

$$\langle Lx_F, \varphi\rangle \underset{(\Delta)}{=} \langle x_F, L^*\varphi\rangle = \int_0^\infty z(t)\left(\varphi''(t) - a_1\varphi'(t) + a_0\varphi(t)\right) dt$$

$$\overset{\text{per partes}}{=} -\int_0^\infty z'(t)(\varphi' - a_1\varphi)(t) + \int_0^\infty a_0 z(t)\varphi(t)\,dt + \underbrace{\Big[z(t)\big(\varphi(t) - a_1\varphi(t)\big)\Big]_0^\infty}_{=0 \text{ neb } z(0)=0 \text{ a } \underbrace{\varphi'(\infty)=\varphi(\infty)=0}_{\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})}}$$

$$= -\int_0^\infty z'(t)\varphi'(t) + \int_0^\infty \big(a_1 z'(t) + a_0 z(t)\big)\varphi(t)\,dt$$

$$\overset{\text{per partes}}{=} \int_0^\infty (z'' + a_1 z' + a_0 z)\varphi\,dt - \Big[z'(t)\varphi(t)\Big]_0^\infty$$

$$= \underbrace{\int_0^\infty \underbrace{Lz}_{=0}\,\varphi\,dt + \underbrace{z'(0)}_{=1}\varphi(0)}_{\text{plyne z vlastností } z} = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi\rangle$$

(2) Cílem je přiblížit jiný zápis Cauchyho úlohy pro nehomogenní vlnovou (či obecnější evoluční PD) rovnici.

Chceme ukázat, že

$$(\mathrm{VC1})\quad \begin{cases} \Box u = f & v\ (0,\infty)\times\mathbb{R}^d \\ u(0,\cdot) = u_0 & v\ \mathbb{R}^d \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,\cdot) = u_1 & v\ \mathbb{R}^d \end{cases}$$

pro dostatečná data u_0, u_1, f

lze přepsat také ve tvaru

$$(\mathrm{VC2})\quad \Box u = f + u_1\delta_t + u_0\delta_t' \quad v\ \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{d+1})\ (*)$$

Uvažme pro jednoduchost nejdříve

$$Lx = x'' + a_0 x$$

a řešme úlohu $\bullet$ $\begin{cases} Lx = f \ v\ (0,\infty) \\ x(0) = x_0 \\ x'(0) = x_1 \end{cases}$ tak, že ji rozdělíme na tři úlohy

(i) $\begin{cases} Lx = f \ v\ (0,\infty) \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} Lx = 0 \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 1 \end{cases}$ (iii) $\begin{cases} Lx = 0 \\ x(0) = x_0 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$

Pak $\boxed{x^{i} = f * x_F}$ $\boxed{x^{ii} = x_1 x_F}$ víme z předchozího

$\star$ Definuj $y(t) = \int_0^t x(s)\,ds$

Pak $\begin{cases} Ly = 0 \ \text{(díky linearitě)} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = x_0 \end{cases}$ tedy dle ii)

$y = x_0 x_F$, avšak

$x^{iii} = y' \Rightarrow x^{iii} = x_0 x_F'$

Z linearity L:

$$\boxed{x(t) = (f * x_F)(t) + x_1 x_F(t) + x_0 x_F'(t)}$$

Úlohu $\bullet$ lze také psát

$$Lx = f + x_1\delta_t + x_0\delta_t' \quad v\ \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

Ekvivalentní vztah mezi (VC1) a (VC2) je nyní již zřejmý. Jeho výhodou/důsledkem je skutečnost, že tvar řešení Cauchyho úlohy je plně určen daty a fundamentálním řešením. Skutečně

$$\boxed{u \text{ řeší (VC2)}} \iff \Box u = F \quad \text{s} \quad F := f + u_1 \delta_t + u_0 \delta_t'$$
$$\iff u(t,x) = (F * u_F)(t,x)$$
$$= (f * u_F)(t,x) + (u_1 \delta_t * u_F)(t,x)$$
$$+ (u_0 \delta_t' * u_F)(t,x).$$

Protože v $\boxed{d=1}$

F.ř. $\Box u = f$ má tvar $u_F(t,x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & |x|<t \\ 0 & |x|>t \end{cases}$

tak

$$\underline{u(t,x)} = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} f(s,y)\, u_F(t-s, x-y)\, dy\, ds$$
$$+ \int_{\mathbb{R}} u_1(y)\, u_F(t, x-y)\, dy$$
$$+ \frac{d}{dt}\left(\int_{\mathbb{R}} u_0(y)\, u_F(t,x-y)\, dy\right)$$
$$= \frac{d}{dt}\left(\int_{x-t}^{x+t} \frac{u_0(y)}{2}\, dy\right) + \int_{x-t}^{x+t} \frac{u_1(y)}{2}\, dy + \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} f(s,y)\, dy\, ds$$
$$= \frac{1}{2}\left\{ u_0(x+t) - u_0(x-t) + \int_{x-t}^{x+t} \frac{u_1(y)}{2}\, dy + \int_0^t \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} f(s,y)\, dy\, ds.\right.$$

což je d'Alembertův vzoreček pro nehomogenní pravou stranu.

- Podobně řešení $\left[\begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \\ u(0,\cdot) = u_0 \end{array}\right]$ v $\mathcal{D}$ lze psát $\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f + u_0 \delta_t \quad \text{v } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{d+1})}$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = F \quad \text{s} \quad F = f + u_0 \delta_t$$

Tedy

$$\underline{u(t,x)} = (f * G)(t,x) + (u_0 \delta_t * G)(t,x)$$
$$= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} f(s,y) \frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{4\pi(t-s)}}}{\sqrt{2\pi(t-s)}^d}\, dy\, ds + \int_{\mathbb{R}^d} u_0(y) \frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{4\pi t}}}{\sqrt{2\pi t}}\, dy$$

a podobně další evol. rce.

V přiložené tabulce uvádíme přehled fundamentálních řešení pro několik základních evolučních rovnic a také tvar řešení pro homogenní Cauchyho úlohu.

Rovnice, případně dimenze	Fundamentální řešení	Řešení Cauchyho úlohy s $f \equiv 0$.
$\Box u \quad (d=1)$	$u_F(t,x) = H(t) \begin{cases} 1/2 & \lvert x\rvert < t \\ 0 & \lvert x\rvert > t \end{cases}$	$u(t,x) = \frac{1}{2}\{[u_0(x+t) + u_0(x-t)]\} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} u_1(y)\,dy$
$\Box u \quad (d=2)$	$u_F(t,x) =$	$u(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{2\pi}\int_{\lvert y\rvert\le 1}\frac{u_0(x+ty)}{\sqrt{1-\lvert y\rvert^2}}\,dy\right) + \frac{t}{2\pi}\int_{\lvert y\rvert\le 1}\frac{u_1(x+ty)}{\sqrt{1-\lvert y\rvert^2}}\,dy$
$\Box u \quad (d=3)$	$\langle u_F, \varphi\rangle = \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty \frac{1}{t}\left(\int_{\lvert x\rvert = t}\varphi(t,x)\,dS_x\right)dt$ $= \frac{H(t)}{4\pi t}\,\delta_S(t^2-\lvert x\rvert^2)$	$u(t,x) = \fint_{\partial B(x,t)} t u_1(y) + u_0(y) + \nabla u_0(y)\cdot(y-x)\,dS$
$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u \quad d$ obecné	$u_F(t,x) = \frac{H(t)}{(4\pi t)^{d/2}}\, e^{-\frac{\lvert x\rvert^2}{4t}}$	$u(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d} u_0(y)\, e^{-\frac{\lvert x-y\rvert^2}{4t}}\,dy$
$\frac{\partial u}{\partial t} - i\Delta u \quad d=3$ Schrödingerova rovnice	$u_F(t,x) = \frac{H(t)}{t^{3/2}}\, e^{\pm\frac{3}{4}\pi i}(\pi)^{3/2}\, e^{\frac{i\lvert x\rvert^2}{4t}}$ (viz výpočet na str. 4|30)	$u(t,x) = \left(\frac{\pi}{t}\right)^{3/2} e^{\pm\frac{3}{4}\pi i}\int_{\mathbb{R}^3} e^{\frac{i\lvert x-y\rvert^2}{4t}}\, u_0(y)\,dy$

Pohyb částice v kvantové teorii popsán komplexní vlnovou fcí $u(t,x)$. Pokud na částici nepůsobí žádné potenciální či interakční síly, tak je evoluce u popsána Schrödingerovou rovnicí: $i\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u = 0$ s poč. podmínkou $u(0,\cdot) = u_0$

POZOROVÁNÍ Dle d'Alembertovy vzorce závisí u jen na hodnotách u_0, zatímco v Kirchhoffově vzorci u závisí nejen na u_0, ale i na jeho derivacích. Tato závislost na derivaci u_0 je spojena s jevem, který se nazývá "zesílení/zaostření singularit" (focusing singularity). Jev ilustrujeme na speciální situaci:

$$x = 0 \quad , \quad u_1 \equiv 0 \quad , \quad u_0 = u_0(|x|)$$

Pak z Kirchhoffova vzorce plyne

$$u(t,0) = \fint_{|x|=t} U_0(|y|) + \nabla u_0(|y|)\cdot y \, dy$$

$$= U_0(t) + U_0'(t)\,t \quad = \left(t\, U_0(t)\right)'$$

Buď $$U_0(s) = \begin{cases} (1-s)^{1/2} & |s| \le 1 \\ 0 & |s| > 1 \end{cases}$$

Pak

$$u(t,0) = (1-t)^{1/2} - \frac{t}{2(1-t)^{1/2}} \xrightarrow[t\to 1-]{} -\infty$$

zatímco na počátku

$$u(0,0) = 1 \quad \text{a} \quad 0 \le u(0,x) \le 1 \quad \forall x \in (-1,1)$$

$$\text{a} \quad u(0,x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus (-1,1).$$

Tedy zdánlivě malá vlnka na počátku může vést ke singularitě v $t=1$. Tento jev se nazývá focusing singularities

$\blacksquare$

$\boxed{\text{Příklad}}$ (Schrödingerova rce a kvantová mechanika)

Nechť $\int_{\mathbb{R}^3} |u_0(x)|^2 dx < +\infty$ a $u_0 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ je "vlnová fce" popisující (počáteční) stav částice v kvantové mechanice.
Vývoj vlnové fce $u(t,x)$ je dán tzv. volnou Schrödingerovou rovnicí

$$(S) \quad \boxed{\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= ik\Delta u \quad \text{v } (0,\infty)\times\mathbb{R}^3 \\ u(0,\cdot) &= u_0 \quad \text{v } \mathbb{R}^3 \end{aligned}}$$

k souvisí s hmotou částice a Planckovou konst.

Aplikujeme-li na (S) F.T., pak dostaneme

$$\left[\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(s,t) &= -ik|s|^2\hat{u}(s,t) \\ \hat{u}(s,0) &= \hat{u}_0(s) \end{aligned}\right]$$

Odsud $\boxed{\hat{u}(s,t) = e^{-ik|s|^2 t}\,\hat{u}_0(s)}$

Dle Příkladu 3, str. 3/21, vztahu ?, kde za $4a$ dosadíme $+(kt)^{-1}$, dostáváme

$$\underline{\underline{u(t,x)}} = \mathcal{F}^{-1}\left[\left(\frac{1}{2kt}\right)^{3/2} e^{\pm\frac{3\pi i}{4}} e^{\frac{i|x|^2}{4kt}}(s)\ \hat{u}_0(s)\right] = \mathcal{F}^{-1}[\hat{g}(s)\hat{h}(s)](x)$$

$$= \frac{e^{\pm\frac{3\pi i}{4}}}{(2kt)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} u_0(y)\, e^{\frac{i|x-y|^2}{4kt}}\, dy$$

Vzorec pro F.T. u je užitečný i z dalších důvodů:

- Pozorujme, že $\boxed{|\hat{u}(t,s)| = |\hat{u}_0(s)| \text{ pro } \forall t}$ ← ?!?!

  Tedy $\|u(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \|\hat{u}(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \|\hat{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$

- Kvantová mechanika: vztah mezi fyzikálním měřením a vlnovou fcí není dokonale synchronizován/spárován, v důsledku toho měření polohy částice a vlnové fce nedává vždy stejný výsledek. Máme však pravděpodobnostní předpis: pravděpodobnost, že polohový vektor částice bude v množině $A \subset \mathbb{R}^3$ je $\frac{\int_A |u_0|^2}{\int_{\mathbb{R}^3}|u_0|^2}$. Podobně pro momentum:

$B \subset \mathbb{R}^3$

$$\frac{\int_B |\hat{u}_0|^2}{\int_{\mathbb{R}^3}|\hat{u}_0|^2} = \frac{\int_B |\hat{u}(t,s)|^2}{\int_{\mathbb{R}^3}|u_0|^2} \quad \forall t,$$ což je zachování hybnosti v kvantové mechanice.

$\boxed{4.4.}$ LAPLACEOVA A POISSONOVA RCE

$$-\Delta u = 0 \qquad\qquad -\Delta u = f$$

Rce jsou uvažovány v $\mathbb{R}^d$ nebo v $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, a v druhém případě pak řešíme okrajovou úlohu.

Již víme, že F. Ř. těchto rovnic má tvar:

- $\boxed{d=2}$ $\Phi(x) = \frac{1}{2\pi}\log|x|$ logaritmický potenciál
- $\boxed{d=3}$ $\phi(x) = \frac{1}{4\pi|x|}$ Newtonův potenciál
- $\boxed{d>2}$ $\phi(x) = \frac{1}{d(d-2)|B_1(0)|\,|x|^{d-2}}$

Pozorujme $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}|x| = \frac{x_i}{|x|}\right)$, že pro libovolné $d \geq 2$ platí:

- ϕ je radiální
- $|\nabla\phi(x)| \leq \frac{C}{|x|^{d-1}}$
- $|\nabla^2\phi(x)| \leq \frac{C}{|x|^d}$

<u>Úvaha</u> (proč konvoluce) Fce $x \mapsto \phi(x)$ je harmonická kromě $x=0$

Fce $x \mapsto \phi(x-y)$ —||— kromě $x=y$

Pro f lib., Fce $x \mapsto f(y)\phi(x-y)$ —||— kromě $x=y$

a Fce $x \mapsto \sum_{i=1}^N f(y_i)\phi(x-y_i)$ —||— kromě $x=y_i$, $i=1,\dots,N$

Mohli bychom vyslovit domněnku, že
$$x \longmapsto \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(y-x)f(y)\,dy$$
bude harmonická.

Již víme, že to tak není a že platí

<u>Věta 4.5</u> Buď $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$ s kompaktním nosičem a nechť $u(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\phi(x-y)\,dy$. Pak
- $u \in C^2(\mathbb{R}^d)$
- $-\Delta u = f$ v $\mathbb{R}^d$.

<u>POZNÁMKA</u> Víme, že vlastnost $-\Delta u = f$ platí i pro $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.

(Dk) • Protože $u(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(z+x)\,\phi(z)\,dz$, tak
$\phi(x-y) = \phi(y-x)$

$$\frac{u(x+he_i)-u(x)}{h} = \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{\frac{f(z+x+he_i)-f(z+x)}{h}}_{\downarrow\, h\to 0}\,\phi(z)\,dz$$

$\frac{\partial f}{\partial x_i}$ a má majorant

$\Downarrow$

$\frac{\partial u}{\partial x_i}$ existuje

Protože $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in C(\mathbb{R}^d)$, tak $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in C(\mathbb{R}^d)$.

Totéž pro druhé derivace.

- Nyní ověříme $-\Delta u = f$ analytickými metodami. (Dle předchozí poznámky a ověření, že $\Delta u \in C(\mathbb{R}^d)$ (viz bod výše) je však toto tvrzení triviální. Proč?)

Počítejme Δu ze vzorečku $u(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\,\Phi(y)\,dy$.
Pak

$$\Delta_x u(x) = \int_{B_\varepsilon(0)} \Delta_x f(x-y)\,\Phi(y)\,dy + \int_{\mathbb{R}^d - B_\varepsilon(0)} \Delta_x f(x-y)\,\Phi(y)\,dy =: A_\varepsilon + B_\varepsilon$$

Avšak $|A_\varepsilon| \le c\,\|\nabla^2 f\|_{C(B_1(0))} \underbrace{\int_{B_\varepsilon(0)} |\phi(y)|\,dy} \le \begin{cases} C\varepsilon^2|\log\varepsilon| & d=2 \\ C\varepsilon^2 & d\ge 3\end{cases}$

[např. pro $d=3$: $\int_{B_\varepsilon(0)} |\phi(y)|\,dy \le C\int_{B_\varepsilon(0)} \frac{1}{|y|}\,dy \underset{\text{sférické souř.}}{\le} \tilde{C}\int_0^\varepsilon \rho\,d\rho = \frac{\tilde{C}}{2}\varepsilon^2$]

Tedy $|A_\varepsilon| \to 0$ pro $\varepsilon \to 0+$.

Dále $B_\varepsilon \overset{\text{per partes } 2\times}{=} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d - B_\varepsilon(0)} \Delta_y\phi(y)\,f(x-y)\,dy}_{=0 \text{ neboť } \phi \text{ je harmonická mimo počátek}} + \underbrace{\int_{\partial B_\varepsilon(0)} \Phi(y)\,\frac{\partial f}{\partial \nu}(x-y)\,dS_y - \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{\partial \phi}{\partial \nu}(y)\,f(x-y)\,dS_y}_{=:\, C_\varepsilon + D_\varepsilon}$

derivace dle normály

Využijeme $\Delta_x f(x-y) = \Delta_y f(x-y)$

- $|C_\varepsilon| \le \|\nabla f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} |\phi(y)|\,dS_y \le \begin{cases} C\varepsilon|\log\varepsilon| & (d=2) \\ C\varepsilon & d\ge 3\end{cases} \to 0$ pro $\varepsilon \to 0$

- Protože $\nabla\phi(y) = \frac{-1}{d\,\alpha(d)}\frac{y}{|y|^d}$ a $\nu = \frac{-y}{|y|} = -\frac{y}{\varepsilon}$, tak $\frac{\partial\phi}{\partial\nu}(y) = \frac{1}{d\,\alpha(d)\,\varepsilon^{d-1}}$ na $\partial B_\varepsilon(0)$

Tak
$$D_\varepsilon = -\fint_{\partial B_\varepsilon(x)} f(y)\,dS_y \longrightarrow -f(x) \quad \text{pro } \varepsilon \to 0+.$$

$\boxed{\text{E}}$

$\boxed{4.4.2}$ VZORCE S PRŮMĚRY neboli: VĚTY O STŘEDNÍ HODNOTĚ

$\boxed{\text{Věta}}$ 4.6 Je-li $u \in C^2(\Omega)$ harmonická (tzn. $\Delta u = 0$ v Ω), pak

$$u(x) = \fint_{\partial B_r(x)} u \, dS = \fint_{B_r(x)} u(y) \quad \text{pro } \forall B_r(x) \subset \Omega.$$

Dk Označme

$$\phi(r) := \fint_{\partial B_r(x)} u(y) \, dS_y .$$

Pak

$$\phi(r) = \fint_{\partial B_1(0)} u(x + rz) \, dS_z$$

a tedy

$$\phi'(r) = \fint_{\partial B_1(0)} \nabla u(x + rz) \cdot z \, dS_z$$

$$= \fint_{\partial B_r(x)} \nabla u(y) \cdot \frac{y-x}{r} \, dS_y$$

$$= \fint_{\partial B_r(x)} \frac{\partial u}{\partial n}(y) \, dS_y$$

$$\overset{\text{Gauss}}{=} \frac{r}{d} \fint_{B_r(x)} \Delta u(y) \, dy = 0$$

Tedy $\phi(r) = \text{const}$, which means $\lim\limits_{r \to 0} \phi(r)$

$$\phi(r) = \lim_{t \to 0} \phi(t) = u(x)$$

Tak

$$\boxed{u(x) = \fint_{\partial B_r(x)} u \, dS} \quad (*)$$

Dále

$$\fint_{B_r(x)} u(y) \, dy = \frac{1}{\alpha(d) r^d} \int_{B_r(x)} u(y) \, dy = \frac{1}{\alpha(d) r^d} \int_0^r \left(\int_{\partial B_\rho(x)} u(y) \, dS_y \right) d\rho$$

$$= \frac{1}{r^d} \int_0^r \underbrace{\left(\frac{d \rho^{d-1}}{|\partial B_\rho(x)|} \int_{\partial B_\rho(x)} u(y) \, dS_y \right)}_{d\rho^{d-1} u(x) \text{ dle } (*)} d\rho = \frac{1}{r^d} \int_0^r d\rho^{d-1} \, d\rho \, u(x) = \underline{\underline{u(x)}}$$

Q.E.D.

$\boxed{\text{Věta}}$ 4.7 (Obrácená věta o střední hodnotě)

Pokud $u \in C^2(\Omega)$ splňuje $u(x) = \fint_{\partial B_r(x)} u(y)\, dS_y$,

pak $\Delta u = 0$.

Dk: Sporem. Kdyby u nebyla harmonická, tak pak existuje $B_r(x)$ tak, že $\Delta u > 0$ v $B_r(x)$ (Bez újmy na obecnosti, že v bodě, kde $\Delta u \neq 0$ je hodnota Δu kladná). Pak vzal A výpočty v důkazu předchozí věty 4.6 pro A předpokladu, že

$$\phi(r) = \fint_{\partial B_r(x)} u(y)\, dS_y = u(x) \quad \left(\Rightarrow \phi'(r) = 0\right)$$

plyne

$$0 = \phi'(r) = \frac{r}{d} \fint_{B_r(x)} \Delta u(y)\, dy > 0\,,$$

což dává spor.

Věty o střední hodnotě mají obrovský význam v analýze harmonických fcí a úloh spojených s Poissonovou rovnicí. Pomocí vět o střední hodnotě dokážeme tyto vlastnosti:

(1) Princip maxima/minima. Jednoznačnost řešení.

(2) Regularita řešení

(3) Lokální odhady v termínech "nejslabší" L^1-normy.

(4) Liouvilleovy věty

(5) Analytičnost harmonických funkcí

(6) Harnackova nerovnost.

$\boxed{4.4.3}$ Vlastnosti harmonických fcí dokázaných na větách o průměru.

$\boxed{\boxed{1} \text{ Max/Min !}}$

$\boxed{\text{Věta}}$ 4.8 (Princip maxima/minima) Buď $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $\Delta u = 0$ v Ω. Pak

(1) $$\max_{x \in \Omega} u(x) = \max_{x \in \partial\Omega} u(x)$$ Princip maxima

(2) Je-li navíc Ω souvislá a $\exists\, x_0 \in \Omega$ tak, že
$$u(x_0) = \max_{x \in \partial\Omega} u$$
pak $u \equiv \text{konst.}$ v Ω Silný princip maxima

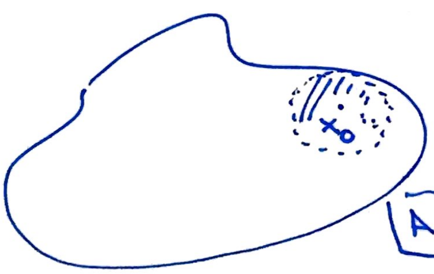
Důsledek (Nezápornost, Kladnost)

Buď u řešení $\Delta u = 0$ v Ω, $u = g$ na $\partial\Omega$ a $g \geq 0$ na $\partial\Omega$, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$

pak $u \geq 0$. Je-li navíc g v nějakém bodě $z_0 \in \partial\Omega$ kladné, tn. $g(z_0) > 0$ na části hranice, pak $u > 0$ všude v Ω.

Dk věty 4.8 $\boxed{\text{Ad (2)}}$ Předpokládejme, že $\exists\, x_0 \in \Omega$ tak, že $u(x_0) = M = \max_{\overline{\Omega}} u$. Pak $\forall\, B_r(x_0) \subset \Omega$

platí
$$M = u(x_0) = \fint_{B_r(x_0)} u(y)\,dy \leq M$$
Rovnost však může nastat jen pokud $u(y) \equiv M$ v $B_r(x_0)$



Odsud snadno plyne, že $u \equiv M$ v Ω.
(proč je potřeba souvislost Ω?)

$\boxed{\text{Ad (1)}}$ plyne z (2).

$\boxed{\text{Věta}}$ 4.9 Buď $g \in C(\partial\Omega)$, $f \in C(\Omega)$. Pak $\exists$ nejvýš jedno řešení úlohy $-\Delta u = f$ v Ω, $u = g$ na $\partial\Omega$.

Dk a) pomocí Věty 4.8. Kdyby existovala dvě řešení u_1, u_2, pak $w := u_1 - u_2$ splňuje $-\Delta w = 0$ v Ω, $w = 0$ na $\partial\Omega$ a dle V. 4.8. w nabývá max. a minima na $\partial\Omega$.
Tedy $w \equiv 0$ v $\Omega \Rightarrow u_1 \equiv u_2$ v Ω.

b) Energetickou metodou

Protože $w := u_1 - u_2$ splňuje $-\Delta w = 0$ v Ω, $w = 0$ na $\partial\Omega$, tak

$$0 = -\int_\Omega \Delta w \cdot w\,dx \underset{\text{Gauss}}{=} \int_\Omega |\nabla w|^2 dx \Rightarrow \nabla w \equiv 0 \text{ v } \Omega$$

$$\Rightarrow w \equiv \text{konst}$$

$$\overset{w=0 \text{ na } \partial\Omega}{\Rightarrow} w \equiv 0.$$

$\blacksquare$

$\boxed{\boxed{2}\ \text{Hladkost}}$

Věta 4.10 (o regularitě) Nechť $u \in C(\Omega)$ splňuje

$$u(x) = \fint_{\partial B_r(x)} u(y)\,dS_y = \fint_{B_r(x)} u(y)\,dy \qquad \forall B_r(x) \subset \Omega,$$

pak $u \in C^\infty(\Omega)$.

Dk Buď $\varepsilon > 0$ dáno. Označ $\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega;\ \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$.

Pro $x \in \Omega_\varepsilon$: $u^\varepsilon := \omega_\varepsilon * u$ kde $\omega_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^d}\,\omega\!\left(\frac{|x|}{\varepsilon}\right)$

$\omega \in C^\infty(\mathbb{R})$

$\omega \equiv 0$ vně $(-1,1)$

$u^\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$.

Ukážeme, že $u = u^\varepsilon$ v Ω_ε

$$\underline{\underline{u^\varepsilon(x)}} = \frac{1}{\varepsilon^d}\int_{B_\varepsilon(x)} \omega\!\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) u(y)\,dy$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^d}\int_0^\varepsilon \omega\!\left(\frac{\varrho}{\varepsilon}\right)\left(\int_{\partial B_\varrho(x)} u(y)\,dS_y\right) d\varrho$$

$$= \frac{u(x)}{\varepsilon^d}\int_0^\varepsilon \underbrace{|\partial B_\varrho(x)|}_{(d\,\alpha(d)\,\varrho^{d-1})}\,\omega\!\left(\frac{\varrho}{\varepsilon}\right) d\varrho$$

$$= u(x)\,\frac{1}{\varepsilon^d}\int_0^\varepsilon \left(\int_{\partial B_\varrho(x)} dS_y\right)\omega\!\left(\frac{\varrho}{\varepsilon}\right) d\varrho$$

$$= \cancel{\tfrac{1}{\varepsilon^d}}\,u(x)\underbrace{\int_{B_\varepsilon(x)} \omega_\varepsilon(y)\,dy}_{=1} = \underline{\underline{u(x)}}$$

$\blacksquare$

$\boxed{3}$ **lokální odhady** — přesné odhady derivací harmonických funkcí

$\boxed{\text{Věta}}$ **4.11** Je-li $\Delta u = 0$ v Ω. Pak $\forall B_\varrho(x_0) \subset \Omega$ $\forall \alpha : |\alpha| = k$

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{C_k}{\varrho^{d+k}} \|u\|_{L^1(B_\varrho(x_0))}$$

Přičemž

$$C_0 = \frac{1}{\alpha(d)}, \quad C_k = \frac{(2^{d+1} d k)^k}{\alpha(d)} \quad (k = 1, \dots)$$

Dk **Indukcí** $\boxed{k=0}$ $u(x_0) = \fint_{B_\varrho(x_0)} u(y)\,dy \leq \|u\|_{L^1(B_\varrho(x_0))} \frac{1}{\alpha(d)\varrho^d}$

$\boxed{k=1}$ Pozorujme, že $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ splňuje $\Delta\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \equiv 0$ v Ω.

Tedy dle věty o ϕ:

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_0)\right| = \left| \fint_{B_{\frac{\varrho}{2}}(x_0)} \frac{\partial u}{\partial x_i}\,dy \right|$$

$$= \left| \frac{2^d}{\alpha(d)\varrho^d} \int_{B_{\frac{\varrho}{2}}(x_0)} \frac{\partial u}{\partial x_i}\,dy \right|$$

$$= \left| \frac{2^d}{\alpha(d)\varrho^d} \int_{\partial B_{\frac{\varrho}{2}}(x_0)} u\, \nu_i\, dS_y \right|$$

$$\leq \frac{2}{\varrho} d \, \|u\|_{L^\infty(\partial B_{\frac{\varrho}{2}}(x_0))}$$

Je-li $x \in \partial B_{\frac{\varrho}{2}}(x_0)$, pak $B_{\frac{\varrho}{2}}(x) \subset B_\varrho(x_0)$ a tak dle případu $\boxed{k=0}$

$$u(x) \leq \frac{2^d}{\alpha(d)\varrho^d} \|u\|_{L^1(B_\varrho(x_0))}$$

Tedy

$$|\nabla u(x_0)| \leq \frac{2^{d+1} d}{\alpha(d)\varrho^{d+1}} \|u\|_{L^1(B_\varrho(x_0))}$$

což dokazuje tvrzení pro $|\alpha| = k = 1$

$\boxed{k \geq 2}$ indukcí (vynecháno) ∎

[4] Liouvilleova věta — NEEXISTUJÍ NETRIVIÁLNÍ OMEZENÉ HARMONICKÉ FUNKCE v $\mathbb{R}^d$.

Věta 4.12 Buď u harmonická a omezená v $\mathbb{R}^d$. Pak $u \equiv$ konst.

Dk Buď $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $\rho > 0$. Pak

$$|\nabla u(x_0)| \le \frac{2^{d+1} d}{\alpha(d)\, \rho^{d+1}} \int_{B_\rho(x_0)} |u(y)|\, dy$$

$$\le \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \frac{2^{d+1} d}{\rho} \longrightarrow 0 \quad \text{pro } \rho \to +\infty.$$

Tedy $\nabla u \equiv 0$ v $\mathbb{R}^d$, což implikuje $u \equiv$ konst. ☒

Věta 4.13 Je-li $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$ s komp. nosičem. Pak, pro $d \ge 3$, každé omezené řešení $-\Delta u = f$ má tvar

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{\Phi}_{\text{Fund. řeš.}}(x-y) f(y)\, dy + \underbrace{C}_{\text{konst.}} \qquad (x \in \mathbb{R}^d)$$

Dk Protože $\Phi(x) \to 0$ pro $|x| \to \infty$ pro $d \ge 3$, tak $\tilde{u}(x) := \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x-y) f(y)\, dy$ řeší $-\Delta u = f$ v $\mathbb{R}^d$ a je omezené. Je-li u jiné omezené řešení, pak $w := u - \tilde{u}$ je konstanta, dle Liouvilleovy věty. ☒

* V $d=2$, může být $\tilde{u}$ neomezené.

[5] Analytičnost = rozvinutelnost do mocninné řady

Věta 4.14 Je-li u harmonická v Ω, pak je analytická v Ω.

Dk Cíl: Pro lib. $x_0 \in \Omega$; sestrojit na okolí x_0 konvergentní mocninnou řadu.

Buď $\rho := \frac{1}{4} \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$. Pak $M := \frac{1}{\alpha(d)\rho^d} \|u\|_{L^1(B_{2\rho}(x_0))} < +\infty$.

Protože $B_\varrho(x) \subset B_{2\varrho}(x_0) \subset \Omega$ pro $\forall\, x \in B_\varrho(x_0)$, tak dle věty 4.11

$$\|D^\alpha u\|_{L^\infty(B_\varrho(x_0))} \leq \left(\frac{2^{d+1} d}{\varrho}\right)^{|\alpha|} |\alpha|^{|\alpha|} M$$

Protože $\frac{k^k}{k!} < e^k \Rightarrow |\alpha|^{|\alpha|} \leq e^{|\alpha|} |\alpha|!$

Dle Multinomické věty

$$d^k = (\underbrace{1 + \dots + 1}_{d \text{ sounař}})^k = \sum_{|\alpha| = k} \frac{|\alpha|!}{\alpha!}$$

máme

$$\underline{|\alpha|! \leq d^{|\alpha|} \alpha!}$$

Tedy

$$\boxed{\|D^\alpha u\|_{L^\infty(B_\varrho(x_0))} \leq CM \frac{(2^{d+1} d^2 e)^{|\alpha|}}{\varrho^{|\alpha|}} \alpha!}$$

Taylorova řada pro u v x_0 má tvar $\sum_\alpha \frac{D^\alpha u(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha$

Ukážeme, že řada konverguje pokud

$$|x - x_0| < \frac{\varrho}{2^{d+2} d^3 e}$$

Zbytek R_N splňuje

$$R_N(x) = u(x) - \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{|\alpha| = k} \frac{D^\alpha u(x_0)(x - x_0)^\alpha}{\alpha!} = \sum_{|\alpha| = N} \frac{D^\alpha u(x_0 + t(x - x_0))(x - x_0)^\alpha}{\alpha!}$$

$t \in (0,1)$

$$|R_N(x)| \leq CM \sum_{|\alpha| = N} \frac{(2^{d+1} d^2 e)^N}{\varrho^N} \frac{\varrho^N}{(2^{d+2} d^3 e)^N} = CM \sum_{|\alpha| = N} \frac{1}{2^N d^N}$$

$$\leq CM\, d^N \frac{1}{2^N d^N} = \frac{CM}{2^N} \to 0 \quad \text{pro } N \to \infty. \quad \boxtimes$$

Dorazke:

$$(x^1 + \dots + x^d)^k = \sum_{|\alpha| = k} \binom{|\alpha|}{\alpha} x^\alpha$$

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$

$$\binom{|\alpha|}{\alpha} = \frac{|\alpha|!}{\alpha_1! \dots \alpha_d!}, \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_d^{\alpha_d}$$

6 Harnackova nerovnost

<u>Věta 4.15</u> (Harnackova $\leq$). Pro každou (souvislou otevřenou) $V \subset \bar{V} \subset \Omega$ (V omezená, není-li Ω omezená) $\exists\, C$ (závisí jen na V) tak, že

$$\sup_V u \leq C \inf_V u \qquad \forall\, u \text{ harmonické v } \Omega \text{ nezáporná}$$

<u>Pozorování</u> speciálně

$$\frac{1}{C} u(y) \leq u(x) \leq C u(y) \qquad \forall\, x, y \in V$$

tzn. hodnoty nezáporných harmonických fcí jsou srovnatelné

intuitivně: protože V má kladnou vzdálenost od hranice, je prostor pro zprůměrování hodnot uvnitř.

Dk: Buď $\varrho := \frac{1}{4} \operatorname{dist}(V, \partial\Omega)$. Zvol. $x, y \in V : |x-y| < \varrho$.

Pak $$u(x) = \fint_{B_{2\varrho}(x)} u \, dz \overset{u \geq 0}{\geq} \frac{1}{\alpha(d)\, 2^d \varrho^d} \int_{B_\varrho(y)} u \, dz = \frac{1}{2^d} \fint_{B_\varrho(y)} u \, dz$$

$$= \frac{1}{2^d} u(y)$$

Tedy: $\forall\, x, y \in V : |x-y| < \varrho$ $\boxed{\frac{1}{2^d} u(y) \leq u(x) \leq 2^d u(y)}$

Protože V je souvislá, $\bar{V}$ kompaktní, lze pokrýt V konečně koulemi $\{B_i\}_{i=1}^N$ o poloměrech $\frac{\varrho}{2}$ a $B_i \cap B_{i-1} \neq \emptyset$ $i = 2, \dots, N$.

Tak $$u(x) \geq \frac{1}{2^{d(N+1)}} u(y) \qquad \forall\, x, y \in V$$

$\boxtimes$

4.4.4 Greenova fce

Tvrzení (Věta o třech potenciálech) Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřená, omezená, s $\partial\Omega$ lokálně popsanou C^1-fcemi. Buď $u \in C^2(\overline{\Omega})$ a $\Phi(x)$ značí Fund. řeš. Poissonovy rovnice.*) Pak

$$(*)\quad \boxed{u(x) = -\int_\Omega \Phi(y-x)\,\Delta u(y)\,dy - \int_{\partial\Omega}\left(u(y)\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(y-x) - \frac{\partial u}{\partial\nu}(y)\,\Phi(y-x)\right)dS_y}$$

Dk: Φ je singulární v bodě $y = x$ $\Rightarrow$ uvažujme $\Omega \setminus B_\varepsilon(x)$ a užijme integraci per-partes a pak (po úpravách) necháme $\varepsilon \to 0$.

Tak

$$\int_{\Omega\setminus B_\varepsilon(x)} \Phi(y-x)\,\Delta u(y)\,dy \overset{\text{per partes}}{=} -\int_{\Omega\setminus B_\varepsilon(0)} \nabla_y\Phi(y-x)\cdot\nabla u(y)\,dy + \int_{\partial\Omega\setminus\partial B_\varepsilon(0)} \Phi(y-x)\frac{\partial u}{\partial\nu}(y)\,dS_y$$

$$\overset{\text{per partes po druhé}}{=} \int_{\Omega\setminus B_\varepsilon(0)} \Delta_y\Phi(y-x)\,u(y)\,dy - \int_{\partial\Omega\setminus\partial B_\varepsilon(0)} u(y)\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(y-x)\,dS_y$$

$$+ \int_{\partial\Omega\setminus\partial B_\varepsilon(0)} \Phi(y-x)\frac{\partial u}{\partial\nu}(y)\,dS_y$$

$\Delta_y\Phi(y-x) = 0$ v $\Omega\setminus B_\varepsilon(0)$

$$= -\int_{\partial\Omega}\left(u(y)\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(y-x) - \frac{\partial u}{\partial\nu}(y)\,\Phi(y-x)\right)dS_y$$

$$+ \int_{\partial B_\varepsilon(0)}\left(u(y)\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(y-x) - \frac{\partial u}{\partial\nu}(y)\,\Phi(y-x)\right)dS_y$$

Jakmile ukážeme, že poslední člen konverguje pro $\varepsilon\to 0$ k $u(x)$, tak jsme hotovi.

Avšak (viz též výpočty v důkazu Věty 4.5):

$$\left|\int_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{\partial u}{\partial\nu}(y)\,\Phi(y-x)\right| \le C\,\|\nabla u\|_{\infty,\Omega}\begin{cases}\varepsilon\log\varepsilon & d=2\\ \varepsilon & d>2\end{cases} \to 0 \quad \varepsilon\to 0$$

a

$$\int_{\partial B_\varepsilon(0)} u(y)\frac{\partial\Phi(y-x)}{\partial y_i}\cdot\underbrace{\frac{y_i-x_i}{|y-x|}}_{\nu_i}\,dS_y = \frac{-1}{d\,|B_1(0)|}\int_{\partial B_\varepsilon(0)} u(y)\frac{1}{|y-x|^{d-1}}\,dS_y$$

$$= -\frac{1}{|\partial B_\varepsilon(0)|}\int_{\partial B_\varepsilon(0)} u(y)\,dS_y \xrightarrow{\varepsilon\to 0} -u(x) \qquad \square$$

$|B_\varepsilon(0)| = \frac{\varepsilon}{d}\,|\partial B_\varepsilon(0)|$

---

*) $\Phi(x) = \frac{1}{2\pi}\log|x| \qquad d=2$

$\Phi(x) = \frac{1}{d(d-2)|B_1(0)|\,|x|^{d-2}} \qquad d>2$

Vzorec (*) z Věty o třech potenciálech je takřka ideální.
Řešíme-li totiž Dirichletovu úlohu

$$\boxed{-\Delta u = f \text{ v } \Omega \qquad u = u_D \text{ na } \partial\Omega} \qquad (D)$$

či Neumannovu úlohu

$$\boxed{-\Delta u = f \text{ v } \Omega \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu} = u_N \text{ na } \partial\Omega} \qquad (N)$$

pak dva z integrálů na pravé straně (*) jsou jasně specifikovány daty a Fund. řešením. Co však s třetím integrálem?
Zde si pomůžeme pomocnou úlohou, kterou budeme schopni ve speciálních geometriích (koule, vnějšek koule, poloprostor) vyřešit a vzorec (*) pak plně využít k získání explicitního řešení Dirichletovy či Neumannovy či smíšené úlohy.

Zobrazení

$$x \longmapsto -\int_{\partial\Omega} u_N(y)\, \Phi(y-x)\, dy$$

$$x \longmapsto -\int_{\partial\Omega} u_D(y)\, \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y-x)\, dy$$

$$x \longmapsto -\int_{\Omega} f(y)\, \Phi(y-x)\, dy$$

se nazývají: potenciál jednoduché vrstvy, potenciál dvojvrstvy, objemový potenciál

(terminologie je z elektrostatiky)

Nyní zpět k pomocné úloze. Pro jednoduchost se zaměříme jen na úlohu (D). V tomto případě chceme eliminovat člen $\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\, \Phi(y-x)\, dS_y$ z (*).

Uvažujme korektor (opravdu) $\psi^x(y)$ jako řešení úlohy

$$\left[-\Delta \psi^x = 0 \text{ v } \Omega \qquad \psi^x(y) = \Phi(y-x) \text{ na } \partial\Omega\right]$$

Podobně jako v důkazu Tvrzení o 3 potenciálech máme

$$(**) \quad -\int_{\Omega} \psi^x(y)\, \Delta u(y)\, dy = -\int_{\partial\Omega} \underbrace{\psi^x(y)}_{\Phi(y-x)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\, dy + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \psi^x}{\partial \nu}(y)\, u(y)\, dy$$

Sečteme-li (*) a (**) dostaneme:

$$\text{(G)} \quad \underline{\underline{u(x)}} = -\int_\Omega (\phi(y-x) - \psi^x(y))\,\Delta u(y) - \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu}(y-x) - \frac{\partial \psi^x}{\partial y}\right) u(y)\,dS_y$$

$$= -\int_\Omega G(x,y)\,\Delta u(y) - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu}\, u(y)\,dS_y$$

kde $G(x,y) := \phi(y-x) - \psi^x(y)$ je tzv. Greenova funkce

a $\frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y) := \frac{\partial G(x,y)}{\partial y_i} \nu_i$

Pozorujme, že G řeší

$$\boxed{\begin{aligned} -\Delta G &= \delta_x \ \text{v}\ \Omega \\ G &= 0 \ \text{na}\ \partial\Omega \end{aligned}}$$

<u>F. řešení</u> řeší $-\Delta u = \delta_0$ v $\mathbb{R}^d$

<u>Green. fce</u> řeší $-\Delta G = \delta_x$ v Ω, $G = 0$ na $\partial\Omega$

Pokud jsme schopni Greenovu funkci nalézt (v každém případě je to však dobře definovaný objekt jehož vlastnosti můžeme dále studovat) pak máme A (G) vzoreček pro řešení Dirichletovy úlohy (D):

$$\boxed{u(x) = -\int_\Omega G(x,y) f(y)\,dy - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y)\, u_D(y)\,dS_y}$$

kde f a u_D jsou dané fce.

Ještě než se začneme zabývat otázkou rozšíření Greenovy fce, tak si ukážeme, že G je vzhledem k x a y symetrická, tj. PLATÍ:

$$\boxed{(\mathrm{Sym}\,G) \qquad G(x,y) = G(y,x) \qquad \forall y,x \in \Omega}$$

(Dk) Zavedme dvě funkce: $v(z) := G(x,z)$ a $w(z) = G(y,z)$ $z \in \Omega$

Pak $-\Delta v = \delta_x$ v Ω, $v = 0$ na $\partial\Omega$ a $-\Delta w = \delta_y$ v Ω, $w = 0$ na $\partial\Omega$. Ukážeme, že $v(y) = w(x)$.

Buď $V_\varepsilon := \Omega - (B_\varepsilon(x) \cup B_\varepsilon(y))$. Pak

$$0 = -\int_{V_\varepsilon} \Delta v \, w = -\int_{V_\varepsilon} v \underbrace{\Delta w}_{0} dx - \int_{\partial V_\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial \nu} w + \int_{\partial V_\varepsilon} v \frac{\partial w}{\partial \nu}$$

$$\overset{v,w=0 \text{ na } \partial\Omega}{=} - \int_{\partial B_\varepsilon(x) \cup \partial B_\varepsilon(y)} \left(\frac{\partial v}{\partial \nu} w - v \frac{\partial w}{\partial \nu}\right) dS_y$$

Tedy

$$\int_{\partial B_\varepsilon(x)} \left(\frac{\partial v}{\partial \nu} w - v \frac{\partial w}{\partial \nu}\right) dS_y = \int_{\partial B_\varepsilon(y)} \left(\frac{\partial w}{\partial \nu} v - w \frac{\partial v}{\partial \nu}\right) dS_y$$

w je hladká v okolí x — v je hladká v okolí y

SAMI — SYMETRICKÁ ROLE

$$\downarrow \varepsilon \to 0 \qquad\qquad \downarrow \varepsilon \to 0$$

$$w(x) \qquad\qquad v(y)$$

$$\| \qquad\qquad \|$$

$$G(y,x) \qquad\qquad G(x,y) \qquad \boxtimes$$

Konstrukce Greenovy funkce na mezikoulí (vnější), v kouli, ve vnějšku koule lze nalézt v skriptech Černý, Pokorný. Zde si ukážeme konstrukci Greenovy funkce na poloprostoru. Pozor není omezená oblast. ! Přesto zkusíme konstrukci dle návodu výše !

Buď $\mathbb{R}^d_+ = \{x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d;\ x_d > 0\}$

Je-li $x \in \mathbb{R}^d_+$, pak $\bar{x} = (x_1, \dots, -x_d) \in \mathbb{R}^d_-$ je jeho reflexe.

Myšlenka "opravíte" ψ^x je přesunout singularitu z x do $\bar{x}$, tzn.)

$$\boxed{\begin{aligned} \psi^x(y) &= \Phi(y-x) \quad \text{na } \partial\mathbb{R}^d_+ \\ -\Delta\psi^x &= 0 \quad \text{v } \mathbb{R}^d_+ \end{aligned}}$$

položíme $\psi^x(y) := \Phi(y - \bar{x})$. Pak víme:

Tedy Greenova fce G pro poloprostor $\mathbb{R}^d_+$ je definována

$$\boxed{G(x,y) = \Phi(y-x) - \Phi(y-\bar{x})} \qquad x, y \in \mathbb{R}^d_+,\ x \neq y$$

Pak

$$\frac{\partial G}{\partial y_d} = \frac{\partial \Phi}{\partial y_d}(y-x) - \frac{\partial \Phi}{\partial y_d}(y-\bar{x}) = \frac{-1}{d|B_1(0)|}\left[\frac{y_d - x_d}{|y-x|^d} - \frac{y_d + x_d}{|y-x|^d}\right] = \frac{+2}{d|B_1(0)|} \frac{x_d}{|y-x|^d}$$

$$\frac{\partial G}{\partial \nu} = \frac{-2x_d}{d\underbrace{|B_1(0)|}_{\lambda_d(B_1(0))} |y-x|^d}$$

$\lambda_d(B_1(0))$ – d-rozměrná Lebesgueova míra

Dle vzhledu (G) očekáváme (hypotéza), že řešení

$$\boxed{\begin{array}{ll} -\Delta u = 0 & \text{v } \mathbb{R}^d_+ \\ u = u_D & \text{na } \partial\mathbb{R}^+_d \end{array}}$$

má tvar

Poissonův vzorec

$$\boxed{u(x) = \frac{2x_d}{d\,|B_1(0)|}\int_{\partial\mathbb{R}^d_+}\frac{u_D(y)}{|x-y|^d}\,dy \qquad (x\in\mathbb{R}^d_+)} \quad (P)$$

$$K(x,y) = \frac{2x_d}{d\,|B_1(0)|}\,\frac{1}{|x-y|^d}$$

se nazývá Poissonovo jádro

Zbývá ověřit, že Poissonův vzorec je skutečně řešení. Ukážeme více:

$\boxed{\text{Věta}}$ 4.16 Buď $u_D \in C(\mathbb{R}^{d-1})\cap L^\infty(\mathbb{R}^{d-1})$ a nechť u je definováno Poissonovým vzorcem (P). Pak

(1) $u \in C^\infty(\mathbb{R}^+_d)\cap L^\infty(\mathbb{R}^+_d)$

(2) $\Delta u = 0$ v $\mathbb{R}^d_+$

a

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to x^0\\ x\in\mathbb{R}^d_+}} u(x) = u_D(x^0)$ pro $\forall x^0\in\partial\mathbb{R}^d_+$

Dk (i) Víme: pro $x\in\mathbb{R}^d_+$ pevné, $y\mapsto G(x,y)$ je harmonické vyjma $y=x$. Ze symetrie G $(G(x,y)=G(y,x))$ plyne, že

$$x\mapsto G(x,y) \text{ je harmonické mimo } x=y$$

Je-li $x\in\mathbb{R}^d_+$ a $y\in\partial\mathbb{R}^d_+$,

pak $x\mapsto -\frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y) =: K(x,y)$ je harm. v $\mathbb{R}^d_+$.

(ii) Přímý výpočet lze ověřit, že

$$\int_{\partial\mathbb{R}^d_+} K(x,y)\,dy = 1 \qquad \forall x\in\mathbb{R}^d_+.$$

Tedy: je-li $u_D\in L^\infty$, pak u dané (P) je také omezené $L^\infty(\mathbb{R}^d_+)$

Protože $x\mapsto K(x,y)\in C^\infty$ pro $x\neq y$, máme $u\in C^\infty(\mathbb{R}^d_+)$.

Navíc

$$\Delta_x u(x) = \int_{\partial\mathbb{R}^d_+}\Delta K(x,y)\,u_D(y)\,dy = 0.$$

(iii) Zbývá ověřit nabývání okraj. podmínky

Buď $x^0 \in \partial\mathbb{R}^d_+$, $\varepsilon > 0$ dáno. Ze spojitosti g: najdi $\delta > 0$ tak, že $|u_D(y) - u_D(x^0)| < \varepsilon$ pokud $|y - x^0| < \delta$.

Buď $x \in \mathbb{R}^d_+$: $|x - x^0| < \frac{\delta}{2}$. Pak

$$|u(x) - u_D(x^0)| = \left| \int_{\partial\mathbb{R}^d_+} K(x,y) \left[u_D(y) - u_D(x^0) \right] dy \right.$$

$$= \left| \int_{\partial\mathbb{R}^d_+ \cap B_\delta(x^0)} \ldots + \int_{\partial\mathbb{R}^d_+ \setminus B_\delta(x^0)} \ldots \right|$$

$$\leq \int_{\partial\mathbb{R}^d_+ \cap B_\delta(x^0)} K(x,y) \underbrace{|u_D(y) - u_D(x^0)|}_{< \varepsilon} dy$$

$$+ \int_{\partial\mathbb{R}^d_+ \setminus B_\delta(x^0)} K(x,y) |u_D(y) - u_D(x^0)| \, ,$$

Přičemž 1. člen je ze spojitosti g malý jak potřeba. Druhý integrál lze však udělat malý díky struktuře Poissonova jádra: $\frac{c x_d}{|x-y|^d}$ a omezenosti u_D, neboť $x_d \to 0+$ a $\frac{1}{|x-y|^d}$ je vně $B_\delta(x^0)$ konečné.

$\boxed{\text{//}}$

$\boxed{\text{Konstrukce Greenovy fce pro kouli v } \mathbb{R}^d, d>2}$ Opět budeme chtít využít jistý typ reflexe, tentokráte skrze sféru.

Definujme $\forall$ $x \in \mathbb{R}^d - \{0\}$ bod $\overline{x} := \frac{x}{|x|^2}$ (inverze skrz jednotkovou sféru)

Chceme najít opraváře (korektor) ψ^x tak, že $\begin{bmatrix} -\Delta\psi^x = 0 \text{ v } B_1(0) \\ \psi^x = \phi(x-y) \text{ na } \partial B_1(0) \end{bmatrix}$

Ukážeme, že $\psi^x(y) := \Phi(|x|(y-\overline{x}))$ splňuje tyto vlastnosti:

a) $$-\Delta_y \psi^x(y) = -\frac{1}{c(d)|x|^{d-2}} \Delta_y \Phi(y-\overline{x}) \underset{\uparrow}{=} 0 \quad \text{v } B_1(0)$$

neboť $\overline{x} \notin B_1(0)$

b) Je-li $y \in \partial B_1(0)$, pak

$$\begin{aligned} |x|^2|y-\overline{x}|^2 &= |x|^2(y\cdot y - 2y\cdot\overline{x} + \overline{x}\cdot\overline{x}) \\ &= |x|^2\Big(\underset{\substack{\parallel \\ 1}}{|y|^2} - \frac{2y\cdot x}{|x|^2} + \frac{1}{|x|^2}\Big) \\ &= |x|^2 - 2y\cdot x + \underset{\substack{\parallel \\ |y|^2}}{1} \\ &= |x-y|^2 \end{aligned}$$

Tedy $\Phi(|x|(y-\overline{x})) = \phi(x-y)$ pro $y \in \partial B_1(0)$.

$\boxed{\text{Řešení } \Delta u = 0 \text{ v } \Omega,\ u = u_D \text{ na } \partial\Omega \text{ pro } \Omega \subset \mathbb{R}^2}$

Ve dvou dimenzích lze využít vztah mezi fcemi dvou proměnných a komplexními fce, tedy vztah mezi holomorfními fcemi (fcemi analytickými komplexní proměnné) a harmonickými fcemi.

Víme $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfní

$$z = x + iy \quad \to \quad f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$$

fce $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

f je holomorfní (complexní analytická) $\iff$ (C-R) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ & $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

což implikuje $u = \mathrm{Re} f$ a $v = \mathrm{Im} f$ jsou harmonické $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

$\Delta v = 0.$

Kromě toho, že holomorfní fce $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tvoří bohatou zásobárnu harmonických fcí, tak holomorfní fce také mají významnou roli při řešení Laplaceovy rce v dvou dimenzích (2D). To je dáno následující významnou vlastností:

$\boxed{\text{harmonické fce jsou "invariantní" na změnu souřadnic definovanou holomorfní fcí.}}$

Vsuvka: buď $w = f(z) \iff z = F(w)$ navzájem inverzní holomorfní (analytické)

Pak $\frac{dw}{dz} = f'(z)$ a $\frac{dz}{dw} = F'(w)$ jsou nenulové a $\frac{dw}{dz} = \frac{1}{\frac{dz}{dw}}$

$\boxed{\text{Navíc,}}$

pokud $z = x+iy$, $w = u+iv$ a $u(x,y), v(x,y)$, $x(u,v), y(u,v)$ jsou reálné a imaginární části $f(z)$ a $F(z)$,

pak $\boxed{\begin{matrix} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{matrix}}$ $\boxed{\begin{matrix} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{matrix}}$ definují nesingulární transformaci souřadnic.

Nechť $U \in C^2(\Omega)$, $\underset{(x,y)}{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$. Pak (ověřte!)

$$\boxed{\Delta_{x,y} U = \Delta_{u,v} U \ |f'(z)|^2}$$

* řetízkové derivování
* C-R podmínky na u,v,x,y

Tedy je-li U harmonická v x,y, pak U je harmonická v u,v

Tato vlastnost je pro řešení úloh důležitá, a to jak početně, tak teoreticky.

Dirichletovy úlohy pro Laplaceovu rovnici

Početní Pomocí metody Greenovy funkce jsme schopni nalézt analytické řešení ve speciálních oblastech (kruh, polorovina, mezikruží, vnějšek kruhu). Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ je jednoduše souvislá oblast ($\neq \mathbb{C}$), kterou umíme převést na oblast $\Omega' \subset \mathbb{C}$ transformací $w = f(z)$, kde $f'(z) \neq 0$, a Ω' je jedna z oblastí, kde explicitní analytické řešení $\Delta_{u,v} U = 0$ v Ω' a $U = U_D$ na $\partial \Omega'$ známe. Pak

$$u(x,y) = U(f(w))$$

řeší $\Delta_{x,y} U = 0$ v Ω, $u = u_D$ na $\partial\Omega$.

Tuto metodu ilustrujme na jednoduchém (vzorovém) příkladě.

Př. Najděte řešení $\Delta^2 u(r,\theta) = 0$ pro $r \in [0,1)$, $\theta \in [-\pi,\pi)$

$$U(1,\theta) = \begin{cases} 1 & 0 < \theta < \pi \\ -1 & -\pi < \theta < 0 \end{cases}$$

Víte-li, že řešení $\Delta u = 0$ na $\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}\, z > 0\}$ s podmínkou

$$u(0,\eta) = \begin{cases} 1 & v \in \mathbb{R}^+ \\ -1 & v \in \mathbb{R}^- \end{cases}$$ má tvar $$u(\xi,\eta) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{\eta}{\xi}\right)$$

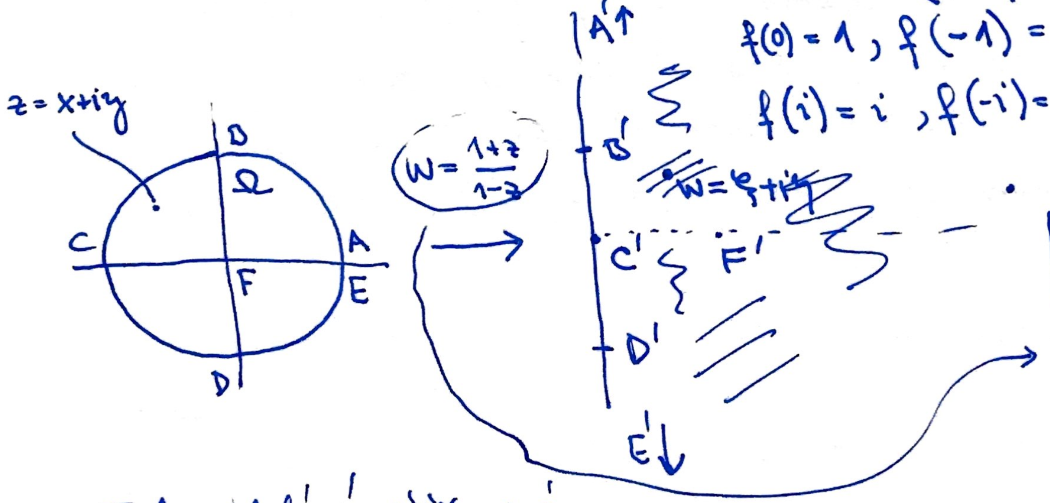
(OVĚŘTE!)

Řešení Pak $\Omega = B_1(0)$ a $\Omega' = \mathbb{C}^+$. Uvažme zobrazení $w = f(z)$ kde

$$f(z) = \frac{1+z}{1-z} \qquad \left(\begin{array}{l}\text{Toto zobrazení je v } B_1(0) \text{ diferencovatelné} \\ f'(z) = \dfrac{1-z+1+z}{(1-z)^2} = \dfrac{2}{(1-z)^2} \neq 0 \text{ v } B_1(0)\end{array}\right)$$

$f(0) = 1$, $f(-1) = 0$, $f(1+) = i\infty$, $f(1-) = -i\infty$

$f(i) = i$, $f(-i) = -i$



$$\boxed{\begin{aligned} \xi &= \frac{1-x^2-y^2}{(1-x)^2+y^2} \\ \eta &= \frac{2y}{(1-x)^2+y^2} \end{aligned}}$$

Tedy hledané řešení má tvar

$$\underline{u(x,y) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{2y}{(1-x)^2+y^2}\right)}$$

3

Teoreticky lze vyřešit touto metodou Dirichletovu úlohu pro jakoukoliv jednoduše souvislou oblast v 2D, mimo plochy ($\neq \mathbb{C}$)

Riemannova věta:

(i) Je-li $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ jednoduše souvislá v $\mathbb{C}$

$\boxed{\text{BIHOLOMORFNÍ } \varphi}$ pak $\exists \varphi : \Omega \xrightarrow{na} B_1(0)$ prosté, φ je holomorfní a φ^{-1} je také holomorfní

(ii) Navíc lze zvolit w a α tak, že $\varphi(z_0) = w$ a $\operatorname{Arg} \varphi'(z_0) = \alpha$.

(iii) $\mathbb{C}$ nelze biholomorfně zobrazit na $B_1(0)$ (důsledek Liouvilleovy věty)

~~Def. Zobrazení, které je holomorfní a $f'(z) \neq 0$ se nazývá konformní zobrazení v z.~~

Holomorfní fce f zobrazí dvě úsečky protínající se v $z_0 \in \mathbb{C}$ na dvě křivky protínající se v $f(z_0)$. Ukážeme, že tečny těchto křivek se protínají pod stejným úhlem jako dané úsečky pokud $f'(z_0) \neq 0$.

Tato vlastnost je geometricky zřejmá pro posunutí $f(z) = z + b$ a otočení $f(z) = az$, $a \neq 0$. Pokud $a = e^{i\alpha}$ pak f představuje rotaci, pokud $a = Re^{i\alpha}$, pak f představuje rotaci s natažením ($R > 1$) nebo kontrakcí ($R < 1$). Zřejmě obecná lineární fce $f(z) = az + b$, $a \neq 0$, je složení předchozích a tedy zachovává úhly.

Obecně, z existence $f'(z_0)$ plyne existence lineární aproximace blízko z_0:

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0)$$

a jelikož $f'(z_0) \neq 0$ očekáváme, že úhly budou zachovány blízko z_0.

Přesněji, buď γ_1, γ_2 dvě křivky s obrazy $\langle\gamma_1\rangle, \langle\gamma_2\rangle$, které se protínají v z_0 a nechť $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2) = z_0$ pro jisté t_1, t_2. Nechť $\gamma_1'(t_1) \neq 0$ a $\gamma_2'(t_2) \neq 0$. Pak

$$\underbrace{\arg[\gamma_2'(t_2)] - \arg[\gamma_1'(t_1)]}_{\arg \frac{\gamma_2'(t_2)}{\gamma_1'(t_1)}}$$ je úhel od $\langle\gamma_1\rangle$ k. $\langle\gamma_2\rangle$ v z_0

Je-li $f'(z_0) \neq 0$, pak existuje $B_\rho(z_0)$ tak, že f je biholomorfní z $B_\rho(z_0) \xrightarrow{na} f(B_\rho(z_0))$. Protože

$$\frac{[f(\gamma_2(t_2))]'}{[f(\gamma_1(t_1))]'} = \frac{f'(\gamma_2(t_2))\,\gamma_2'(t_2)}{f'(\gamma_1(t_1))\,\gamma_1'(t_1)} = \frac{f'(z_0)}{f'(z_0)}\,\frac{\gamma_2'(t_2)}{\gamma_1'(t_1)} = \frac{\gamma_2'(t_2)}{\gamma_1'(t_1)}$$

vidíme, že úhly mezi $\langle f(\gamma_1)\rangle$ a $\langle f(\gamma_2)\rangle$ v bodě $f(z_0)$ jsou zachovány.

<u>Def.</u> Holomorfní zobrazení f, které zachovává úhly v z_0, se nazývá <u>konformní</u>.

Dokázali jsme větu:

<u>Věta 4.</u> Je-li f holomorfní v Ω a $f'(z) \neq 0$ $\forall z \in \Omega$, pak f je konformní v Ω.

Důležitou třídu konformních zobrazení tvoří lineární lomená zobrazení (také se nazývají homografie, nebo Möbiovy transformace). To jsou funkce typu

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{kde } ad - bc \neq 0.$$

Fce f je definována všude kromě $cz+d \neq 0$; je vhodnější uvažovat $f: \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ předpisy $f\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$ a $f(\infty) = \frac{a}{c}$.
(Je-li $c=0$, pak máme jen jeden další předpis $f(\infty) = \infty$)

Nyní je jednoduché nahlédnout, že $f(z)$ typu $\frac{az+b}{cz+d}$ jsou vzájemně jednoznačná zobrazení $\mathbb{C}^* \xrightarrow{na} \mathbb{C}^*$ a jsou <u>konformní</u> mimo $z = -d/c$. $\boxed{\Delta}$

Věta 4.17 (PDR vs. Variační počet) Platí

$$\boxed{u \in C^2(\bar\Omega) \text{ řeší } \begin{array}{l} -\Delta u = f \text{ v } \Omega \\ u = u_D \text{ na } \partial\Omega \end{array}} \iff \boxed{\begin{array}{l} u \text{ splňuje} \\ I[u] = \min_{w \in \mathcal{A}} I[w] \\ \mathcal{A} = \{ w \in C^2(\bar\Omega);\ w = u_D \text{ na } \partial\Omega \} \end{array}}$$

Dk $\boxed{\Leftarrow}$ pak $u \in \mathcal{A}$

$$\delta\Phi[u,\varphi] = 0 \quad \forall \varphi \in C^2(\bar\Omega),\ \varphi = 0 \text{ on } \partial\Omega \text{ tn..}$$

$$0 = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi - \int_\Omega f \varphi \, dx$$

$$\stackrel{\text{per partes}}{=} \int_\Omega (-\Delta u - f)\,\varphi \, dx \implies \underline{-\Delta u = f \text{ v } \Omega}$$

∎

$\boxed{\Rightarrow}$ Buď $w \in \mathcal{A}$ lib. pak $u - w = 0$ na $\partial\Omega$

$$0 = \int_\Omega (-\Delta u - f)(u - w)\, dx \stackrel{\text{per partes}}{=} \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \nabla u \cdot \nabla w - fu - fw \right)$$

$$\Downarrow$$

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega f u \, dx = \int \nabla u \cdot \nabla w - \int f w \qquad \underline{a \cdot b \le \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2)}$$

$$\le \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 + \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla w|^2 - \int_\Omega f w \, dx$$

což dává tvrzení:

$$\Phi[u] = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega f u \le \frac{1}{2} \int |\nabla w|^2 - \int_\Omega f w \, dx = \Phi[w]$$

pro libovolné $w \in \mathcal{A}$.

∎

Tato věta je základní tvrzení, které spojuje teorii PDR s variačním počtem, dvě zdánlivě odlišné disciplíny.

4.4.5 ROVNICE VEDENÍ TEPLA

Připomeňme, že umíme vyřešit nehomogenní Cauchyho úlohu, viz strany 1/13 – 1/15. Víme také, že fundamentální řešení má tvar

$$\phi(t,x) = \frac{H(t)}{(4\pi t)^{d/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \qquad (H \text{ - Heaviside})$$

Toto řešení, nalezené dříve pomocí Fourierovy transformace, lze nalézt také **metodou samopodobnosti** (self-similarity):

Buď $u = u(t,x)$ řešení evoluční rovnice $Lu = 0$. Řekneme, že $u_\lambda(t,x) := \lambda^\beta u(\lambda^\alpha t, \lambda x)$ pro $\lambda > 0$ a α, β nějaká reálná, je **samopodobné** řešení, pokud $Lu_\lambda = 0$.

Je jednoduché nahlédnout, že $u_\lambda(t,x) = u(\lambda^2 t, \lambda x)$ řeší rovnici vedení tepla, pokud u řeší rovnici vedení tepla. Vidíme, že čas se škáluje jinak než prostorové proměnné. Motivováni tímto pozorováním, zkusme hledat řešení rce vedení tepla ve tvaru

$$v(t,x) = \frac{1}{t^\gamma} V\left(\frac{|x|}{\sqrt{t}}\right) \qquad V : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$$

Po dosazení do $\frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = 0$ dostáváme:

$$0 = \left[-\frac{1}{2}\frac{|x|}{t^{3/2}} V'(\cdot) - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(V'(\cdot)\frac{x_i}{|x|\sqrt{t}}\right)\right]\frac{1}{t^\gamma} - \gamma \frac{V(\cdot)}{t^{\gamma+1}}$$

$$= \left[-\frac{1}{2}\frac{|x|}{t^{3/2}} V' - V''(\cdot)\frac{1}{t} - \frac{V'(\cdot)}{t^{1/2}}\left(\frac{d}{|x|} - \frac{1}{|x|}\right)\right]\frac{1}{t^\gamma} - \gamma\frac{V(\cdot)}{t^{\gamma+1}}$$

$$\Rightarrow \boxed{V''(y) + V'(y)\left(\frac{y}{2} + \frac{(d-1)}{y}\right) + \gamma V(y) = 0} \qquad y := \frac{|x|}{\sqrt{t}}$$

Vynásobme při y^{d-1} a volme $\gamma = \frac{d}{2}$, pak dostaneme

$$\boxed{\left(y^{d-1} V'(\cdot)\right)' + \frac{1}{2}\left(y^d V(\cdot)\right)' = 0}$$

Tedy

$$y^{d-1} V'(\cdot) + \frac{1}{2} y^d V(\cdot) = \text{konst.}$$

(Předp. $V(y) = V'(y) = 0$ pro $y \to \infty$ $\Downarrow$ konst. $= 0$)

$$V'(\cdot) + \frac{y}{2} V(\cdot) = 0 \iff V(y) e^{\frac{y^2}{4}} = C$$

$$\Rightarrow \left[v(t,x) = \frac{C}{t^{d/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\right]$$

$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0$

Pro řešení vlnové rovnice platí podobné vlastnosti jako pro harmonické funkce, ale teorie je komplikovanější jak technicky, tak z pohledu důkazů jednotlivých tvrzení. Uvedeme si některá tvrzení bez důkazu a poté dvě věty o (dopředné a zpětné) jednoznačnosti dokázané energetickými metodami.

$Q_T := (0,T] \times \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ časoprostorový válec

$$\Sigma_T = \underbrace{(0,T] \times \partial\Omega}_{\text{plášť válce}} \cup \underbrace{\{0\} \times \Omega}_{\text{podstava}}$$

Věta o střední hodnotě platí, ale vzorec je komplikovaný. Souvislost s

(◎) $\quad u(x) = ⨍_{B_\rho(x)} u(y)\,dy$ je následující: (pro jednoduchost v $d=3$)

Fundamentální řeš. $-\Delta u = 0$ je $\frac{1}{4\pi|y-x|} =: \phi(y-x)$

Vztah (◎) lze zapsat:

(◎◎) $$u(x) = \frac{1}{|B_\rho(x)|} \int_{\{y;\,\phi(y-x) > \frac{1}{4\pi\rho}\}} u(y)\,dy = \frac{1}{|B_1(0)|\rho^d} \int_{\{y;\,\phi(y-x) > \frac{1}{4\pi\rho}\}} u(y)\,dy$$

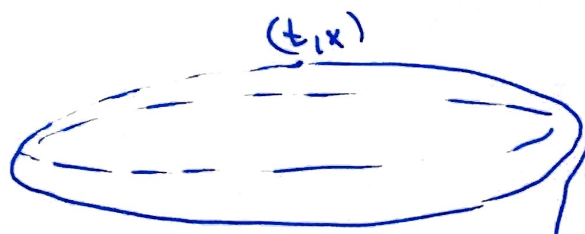
Tento vztah již bude mít analogii pro $\frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = 0$.

$\boxed{\text{Tvrzení}}$ T1 Buď $u \in C^1([0,T]; C^2(\overline{\Omega}))$. Pak

$$u(t,x) = \frac{1}{4\rho^d} \iint_{E_\rho(t,x)} u(y,s) \frac{|x-y|^2}{(t-s)^2}\,dy\,ds \qquad \forall E_\rho(t,x) \subset Q_T$$

zde $E_\rho(t,x) := \left\{(s,y) \in \mathbb{R}^{d+1} \mid s \le t,\ \phi(x-y,t-s) \ge \frac{1}{\rho^d}\right\}$

tepelné koule.



Opět jako v eliptickém případě v dvě dimenze méně, neboť čas se chová jako 2 prostorové dimenze

Pozor! t může být T

tzn., že $u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in C(\overline{Q_T})$

$\boxed{\text{Tvrzení}}$ T2 (silný princip maxima) Buď $u \in C^1([0,T]; C^2(\Omega))$ řešení $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0$. (1) Pak

$$\max_{\overline{Q_T}} u = \max_{\Sigma_T} u$$

(2) Je-li navíc Ω souvislá a $\exists (t^0,x^0) \in Q_T$ tak, že $u(t^0,x^0) = \max_{\overline{Q_T}} u$

pak u je konstantní v $\overline{Q_{t_0}}$.

Odsud opět plyne pozorování, že vychlost šíření zápachu (vůně / tepla) je ∞:

Je-li $u \in C^1([0,T], C^2(\Omega)) \cap C(\overline{Q_T})$ takové, že řeší

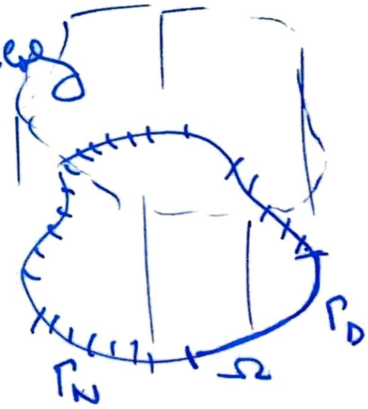
$$\left[\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u &= 0 && \text{v } Q_T \\ u &= 0 && \text{na } (0,T)\times\partial\Omega \\ u &= u_0 && \text{na } \{0\}\times\Omega \end{aligned}\right]$$

a $u_0 \geq 0$, pak $u > 0$ všude v Q_T je-li $u_0 > 0$ někde v Ω. [Platí-li opak, tj. u v nějakém $(t^0,x^0) \in (0,T)\times\Omega$ je 0, pak dle principu minima $u \equiv 0$ v $(0,t^0)\times\Omega$ a máme ↯ $u_0 \gneq 0$.]

▶ Platí tvrzení o lokálních odhadech, hladkosti a analytičnosti řešení.

▶ Jednoznačnost počátečně a okrajové úlohy

$$(*) \quad \left[\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u &= f && \text{v } (0,T)\times\Omega \\ u &= u_D && \text{na } (0,T)\times\Gamma_D \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= u_N && \text{na } (0,T)\times\Gamma_N \\ u &= u_0 && \text{v } \{0\}\times\Omega \end{aligned}\right.$$



$\overline{\Gamma_D \cup \Gamma_N} = \partial\Omega$
$\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$

Věta 4.13. Existuje právě jedno řešení (JEDNOZNAČNOST) $u \in C^1([0,T]; C^2(\Omega))$ úlohy (*).

Dk: Kdyby existovala dvě řeš. u^1, u^2, pak $w := u^1 - u^2$ splňuje homogenní tepelnou rci s nulovými daty, pak

$$0 = \int_\Omega \left(\frac{\partial w}{\partial t} - \Delta w\right) w \, dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|_2^2 + \int_\Omega |\nabla w|^2 dx.$$

Integrací přes čas od 0 do t:

$$\to \|w(t)\|_2^2 + 2\int_0^t \int_\Omega |\nabla w|^2 dx\, ds = 0 = \|w(0)\|_2^2 \Rightarrow w(t) \equiv 0 \quad \forall t > 0. \quad \boxed{\text{Ξ}}$$

$\boxed{\text{Věta 4.19}}$ (Zpětná jednoznačnost) Nechť u_1 a $u_2 \in C^2(\overline{Q_T})$ ŘŠ

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \quad \text{v } (0,T) \times \Omega$$

$$u = u_D \quad \text{na } (0,T) \times \partial\Omega$$

a

$$u_1(x,T) = u_2(x,T) \quad (\forall x \in \Omega)$$

Pak

$$u_1 \equiv u_2 \quad \text{v } Q_T.$$

Dk • Označ $w := u_1 - u_2$ a $e(t) = \|w(t)\|_2^2$

Pak $\dot{e}(t) = -2\|\nabla w\|_2^2$ a $\ddot{e}(t) = -4\int_\Omega \nabla w \cdot \nabla w_t = 4\int_\Omega \Delta w\, w_t$

$$= 4\|\Delta w\|_2^2$$

Protože $w = 0$ na $\partial\Omega$

$$\int |\nabla w|^2 = -\int w \Delta w \leq \|w\|_2 \|\Delta w\|_2$$

Tedy

$$\underline{(\dot{e}(t))^2} = 4\|\nabla w\|_2^4 \leq 4\|w\|_2^2 \|\Delta w\|_2^2 = \underline{e(t)\,\ddot{e}(t)}$$

pomocné práce

• Pokud $e(t) = 0$ pro $t \in [0,T]$, pak jsme hotovi.
V opačném případě existuje $[t_1,t_2] \subset [0,T]$ a $e(t) > 0$ pro $t_1 < t < t_2$

• Def. $f(t) = \log e(t)$. Pak $\dot{f}(t) = \frac{\dot{e}(t)}{e(t)}$ a

$$\ddot{f}(t) = \frac{\ddot{e}(t)e(t) - (\dot{e}(t))^2}{(e(t))^2} \geq 0$$. Tak f je konvexní na (t_1,t_2)

$$f((1-\lambda)t_1 + \lambda t) \leq (1-\lambda)f(t_1) + \lambda f(t)$$

Z definice f a s využitím vlastností logaritmu a exponenciály:

$$e((1-\lambda)t_1 + \lambda t) \leq [e(t_1)]^{1-\lambda}[e(t)]^\lambda \qquad \forall t \in [t_1,t_2)$$

tedy po limitě $t \to t_2-$.

$$e((1-\lambda)t_1 + \lambda t_2) \leq [e(t_1)]^{1-\lambda}[e(t_2)]^\lambda$$

což vede ke sporu neboť $e(t_2) = 0$ a $e((1-\lambda)t_1 + \lambda t_2)$ by mělo být kladné! ▨