Téma: TRANSPORTNÍ ROVNICE . PDR 1. ŘÁDU

▷ Motivace: Buď $\vec{v} = \vec{v}(t, x) : [0,T] \times \underset{\Omega}{\underset{\cup}{\mathbb{R}^d}} \to \mathbb{R}^d$ dané vektorové pole

T ... časový interval našeho zájmu

Ω ... otevřená ~~...~~ množina, kde je pole $\vec{v}$ dobře definováno

např. řeka, výřivka, ...

Částice (barvivo) umístěná v $t=0$ do bodu $\underbrace{(x_1^0, \dots, x_d^0)}_{\vec{x}^0} \in \Omega$ se pohybuje v poli $\vec{v}$ po trajektorii

(1) $\vec{X}(\cdot, \vec{x}^0) : [0,T] \to \Omega$ tak, že $t \in [0,T]$ převádí $x \in \Omega$

přičemž

(2) $$\boxed{\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} = \vec{v}}$$ neboli $$\frac{\partial \vec{X}(t, \vec{x}^0)}{\partial t} = \vec{v}(t, \vec{X}(t, \vec{x}^0)) \left(= \vec{v}(t, \vec{x}) \right)$$

Částice může přenášet (transportovat) nějakou veličinu (hustotu, koncentraci). Označme ji u. Pak, pokud zanedbáme (tzn. jsou irelevantní) další možné fyzikální mechanismy (jako zdroj veličiny u, difúze u, ...), tak se hodnota u podél trajektorie nemění, tj.

(3) $$0 = \frac{d}{dt} u(t, \vec{X}(t, \vec{x}^0)).$$

Proderivováním (3) dostaneme rovnici transportu. Vskutku:

$$0 = \frac{\partial u}{\partial t}(t, \vec{X}(t, \vec{x}^0)) + \frac{\partial u}{\partial x_k}(t, \vec{X}(t, \vec{x}^0)) \frac{\partial X_k}{\partial t}(t, x^0)$$

Einsteinova sumační konvence (zde $k = 1, \dots, d$)

(4) $$\overset{(2)}{=} \frac{\partial u}{\partial t}(\dots) + \frac{\partial u(\dots)}{\partial x_k} v_k(\dots)$$

$$\overset{(1)}{=} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + \nabla u^{(t,x)} \cdot v(t,x)$$

$$= \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial t} + v \cdot \nabla u \right)(t,x)}$$

Podtržená je rovnice transportu.

Zobrazení: $u \longmapsto \frac{\partial u}{\partial t} + v \cdot \nabla u$ je transportní operátor.

Závěry ▷ Trajektorie částice v daném vektorovém poli $\vec{v}$ je popsána systémem ODR (2). Veličina u, která je transportována po dané trajektorii, řeší transportní rovnici (4).

▷ Transportní rce (4) je speciální případ PDR 1. řádu. Za chvíli si uvedeme jejich definici a provedeme klasifikaci

▷ Viděli jsme, že speciální případ PDR 1. řádu, tj. rovnice (4) úzce souvisí se systémem ODR (2). V našem případě jsme z (2) odvodili (4).

▷ Ukážeme si, že PDR 1. řádu lze řešit pomocí systému ODR typu (2)

Cíl Zformulovat teorii pro řešení PDR 1. řádu a naučit se tyto rovnice, alespoň v jednodušších případech, řešit.

Definice PDR 1. řádu Pro $F : \underset{\underbrace{y_1,\dots,y_m}_{y}}{\Omega} \subset \mathbb{R}^m \times \underset{u,\ \underbrace{z_1,\dots,z_m}_{z}}{\mathbb{R}^{m+1}} \to \mathbb{R}$

$$\boxed{F\left(y_1,\dots,y_m, u, \frac{\partial u}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial u}{\partial x_m}\right) = 0} \quad \text{zkráceně} \quad \boxed{F(y, u, \nabla u) = 0}$$

Příklad Rovnice transportu (4): $n = d+1$, nezávisí explicitně na u, funkce F má tvar $F(t, x_1,\dots,x_d, z_0, z_1,\dots,z_d) = z_0 + \sum_{i=1}^{d} v_k(t,x)\, z_k$

Úkol Vymyslete pěkný (nelineární) příklad PDR 1. řádu, který je různý od rovnice transportu (4). Určete pro vaši rovnici funkci F.

Definice • Kvazilineární PDR 1. řádu

$$\sum_{i=1}^{m} a_i(\underbrace{y_1,\dots,y_m}_{y}, u) \frac{\partial u}{\partial y_i}(y) = f(y,u)$$

• Nehomogenní lineární PDR 1. řádu

$$\sum_{i=1}^{m} a_i(y) \frac{\partial u}{\partial y_i}(y) + a_{m+1}(y)\, u(y) = f(y)$$

• Homogenní lineární PDR 1. řádu: $\boxed{a_{m+1} = f = 0}$

(5) $$\boxed{\sum_{i=1}^{m} a_i(y) \frac{\partial u}{\partial y_i}(y) = 0}$$

$\boxed{\text{Úvaha (teorie)}}$ k nalezení řešení rce (5), tj.

(5) $$a_1(y)\frac{\partial u}{\partial y_1}(y) + \dots + a_n(y)\frac{\partial u}{\partial y_n}(y) = 0 \qquad y=(y_1,\dots,y_n)$$

kde dané funkce $a_i(y)$ splňují $\sum_{i=1}^{n} |a_i(y)|>0 \quad \forall\, y\in\Omega$.

- Nechť u řeší (5). Uvažujme parametrizaci (trajektorii, křivku)

(*) $$s\in\mathbb{R} \longmapsto (y_1(s),\dots,y_n(s))$$

a definujme

$$z(s) := u(y_1(s),\dots,y_n(s)) \ \left(= u(y(s))\right)$$

Pak

(6) $$\frac{dz}{ds}(s) =: z'(s) = \frac{\partial u}{\partial y_1}(\dots)\, y_1'(s) + \dots + \frac{\partial u}{\partial y_n}(\dots)\, y_n'(s)$$

Porovnáním (6) s (5) dostáváme dvě tvrzení:

▶ Pokud $y_1(s),\dots,y_n(s)$ řeší systém ODR

(7) $$\begin{cases} y_1'(s) = a_1(y_1(s),\dots,y_n(s)) \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \\ y_n'(s) = a_n(y_1(s),\dots,y_n(s)) \end{cases}$$

pak $z'(s)=0$ a tedy $u(y_1(s),\dots,y_n(s))$ se na křivce (*) nemění, tj. u je podél křivky (trajektorie) (*) konstantní

▶ Také: je-li y řešením (7), pak $\boxed{u(y_1(s),\dots,y_n(s))=C}$ řeší PDR 1. řádu (5).

K určení konstanty potřebuji znát hodnotu u v jednom bodě křivky.

TERMINOLOGIE • Systém ODR, který lze doplnit o "počáteční" podmínku $y_1(0)=y_1^0,\dots,y_n(0)=y_n^0$, se říká charakteristický systém PDR 1. řádu (5).

- Křivce (*), což je řešení charakteristického systému (7), se říká charakteristika.

Poznámka Protože podél charakteristik je řešení u rce (5) konstantní, nelze na charakteristikách předepsat data (počáteční podmínky). Charakteristiky jsou tak význačné objekty spojené s PDR.

Místo poznámky

(Q1)/3'

Buď $(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n) \in \mathbb{R}^n$ libovolný, pevný bod. Pokud máme charakteristiku procházející tímto bodem protne přímku či křivku, na které máme zadaná (počáteční) data, pak víme, že hodnota $u(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n)$ se shoduje s hodnotou dat v průsečíku charakteristiky s křivkou, kde máme zadané (počáteční) podmínky.

Z této úvahy vidíme, že zadávání počátečních podmínek či dat na charakteristikách nás vede do nesmyslné ~~[illegible]~~ situace. Důležitý aspekt obecné teorie PDR je zajistit zadávání (počátečních) podmínek na rozumných necharakteristických plochách/křivkách.

<u>Příklad</u> (Homogenní transportní rovnice s konstantními koeficienty)

Buď $\boxed{\vec{b} \in \mathbb{R}^d}$, $b = (b_1, \dots, b_d)$, $\boxed{T > 0}$ a $\boxed{u_0 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}}$ dána

Hledejme $u : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ splňující

(T1) $\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + \vec{b} \cdot \nabla u(t,x) = 0$ v $(0,T) \times \mathbb{R}^d$

(T2) $u(0,x) = u_0(x)$ v $\mathbb{R}^d$

u_0, b, T DATA $\longrightarrow$ u řešení (T1) a (T2).

Tuto úlohu vyřešíme třemi způsoby.

<u>Řešení 1</u> (Geometricky) Rci (T1) lze zapsat ve tvaru

$$\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_d} \right)}_{\nabla_{t,x} u} \cdot \left(1, b_1, \dots, b_d \right) = 0$$

$$\underbrace{\nabla_{t,x} u \cdot (1, \vec{b})}_{} = 0$$

časoprostorová derivace funkce u ve směru $(1, \vec{b})$

$$\partial^{t,x}_{(1,\vec{b})} u(t,x) = 0$$

Odtud plyne, že u podél směru $(1,\vec{b})$ je neměnné/konstantní.

„Přímka" procházející body $(\bar{t}, \bar{x})$ se "směrnicí" $(1,\vec{b})$ má tvar $(t - \bar{t})\vec{b} = x - \bar{x}$. Tato "přímka" protne čas $t = 0$ v bodě $x = \bar{x} - \bar{t}\vec{b}$. Nakreslete si obrázek pro $d = 1$, $b > 0$

Tedy $u(\bar{t}, \bar{x}) = u_0(\bar{x} - \bar{t}\vec{b})$

neboli bez pruhů a šipek

(8) $$\boxed{u(t,x) = u_0(x - tb)}$$

<u>Úkol</u> Ověřte, že pro $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^d)$ je u dané vztahem (8) klasickým řešením (T1) a (T2).

<u>POZOROVÁNÍ</u> Počáteční tvar u_0 se šíří pro $t > 0$ časoprostorem.

Řešení typu (8) se říká cestující/putující vlna

<u>travelling wave</u>.

Řešení 2 (pomocí charakteristického systému)

Char. systém má tvar $\boxed{\begin{aligned}\dot t(s) &= 1\\ \dot x(s) &= \vec b\end{aligned}}$ Obecné řešení má pak

tvar $t(s) = s + \bar t$

$x(s) = \vec b s + \bar x$, kde $(\bar t, \bar x) \in \mathbb{R}^{d+1}$ lib.

Funkce $z(s) = u(s+\bar t, \vec b s + \bar x)$ splňuje [illegible] 0.

Odsud plyne, že

$$u(\bar t, \bar x) = z(s)\Big|_{s=0} = z(s)\Big|_{s=-\bar t} = u(0, \bar x - \vec b \bar t) \overset{(T2)}{=} u_0(\bar x - \vec b \bar t)$$

neboli

$$\underline{u(t,x) = u_0(x - bt)}$$

Řešení 3 (Fourierovou transformací) Protože

$$\hat u(t,x) := \int_{\mathbb{R}^d} u(t,y)\, e^{-2\pi i x\cdot y}\, dy$$

$$\widehat{\frac{\partial u}{\partial x_j}}(t,x) = 2\pi i x_j\, \hat u(t,x)$$

tak (T1) a (T2) dává

$$\boxed{\begin{aligned}&(9) \quad \frac{\partial \hat u(t,x)}{\partial t} + 2\pi i\, x\cdot b\, \hat u(t,x) = 0\\ &(10) \quad \hat u(0,x) = \hat u_0(x)\end{aligned}}$$

Integrační faktor $e^{2\pi i (x\cdot b)t}$

Odsud $\frac{d}{dt}\left(\hat u(t,x)\, e^{2\pi i x\cdot bt}\right) = 0$ a tedy

$$\hat u(t,x) = \hat u_0(x)\, e^{-2\pi i x\cdot bt} = \int_{\mathbb{R}^d} u_0(y)\, e^{-2\pi i x\cdot \overbrace{(y+bt)}^{\xi}}\, dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} u_0(\xi - bt)\, e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, d\xi = \widehat{u_0(\cdot - bt)}\Big|_x$$

Tedy $u(t,x) \equiv u_0(x - bt)$. ∎

Nadále budeme používat (jen) metodu charakteristik, neboť je nejuniverzálnější *) K nalezení analytického vzorečku potřebujeme však umět vyřešit charakteristický systém (7), a je-li $n > 2$, pak potřebujeme nalézt všechna nezávislá řešení systému (7). [Doporučená literatura: skripta O. JOHN, J. NEČAS: „Rovnice matematické fyziky", 1972. či kniha E. Zachmanoglou, D. Thoe: Introduction to PDEs with Applications, 1976]

*) Funguje (teoreticky) pro $\vec b$ nekonstantní, časově i prostorově se měnící.