Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale přesně odůvodněte. V případě studia číselných řad doslovně uveďte jaké kritérium používáte při studiu konvergence. Ve výpočtech můžete bez dalšího komentáře používat známé výsledky ohledně konvergence řad $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$, vlastnosti řad $\sum_{n=1}^{N} \sin(nx)$, $\sum_{n=1}^{N} \cos(nx)$, a dále Taylorovy rozvoje elementárních funkcí.

Jméno: ______________________________

Příklad	1	2	3	4	5	6	**Celkem bodů**
Bodů	5	6	6	6	7	6	36
Získáno							

[5] 1. Najděte rozvoj funkcí $\arcsin x$ a $\arctan x$ do Taylorových polynomů 4. řádu. Poté pomocí nich spočtěte

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x - \arctan x}{x^3}.$$

Řešení:

Jelikož jsou funkce $\arcsin x$ a $\arctan x$ liché, koeficienty u sudých mocnin budou nulové a stačí tedy spočítat koeficienty u mocnin x a x^3. Platí

$$\begin{aligned}
\arcsin 0 &= 0,\\
(\arcsin x)'\big|_{x=0} &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\bigg|_{x=0} = 1\\
(\arcsin x)''\big|_{x=0} &= -\frac{1}{2}\frac{-2x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\bigg|_{x=0} = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\bigg|_{x=0} = 0\\
(\arcsin x)'''\big|_{x=0} &= \frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}(-2x)}{(1-x^2)^3}\bigg|_{x=0} = \frac{(1-x^2) - \frac{3}{2}x(-2x)}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}\bigg|_{x=0}\\
&= \frac{1+2x^2}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}\bigg|_{x=0} = 1
\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}
\arctan 0 &= 0,\\
(\arctan x)'\big|_{x=0} &= \frac{1}{1+x^2}\bigg|_{x=0} = 1,\\
(\arctan x)''\big|_{x=0} &= -\frac{2x}{(1+x^2)^2}\bigg|_{x=0} = 0,\\
(\arctan x)'''\big|_{x=0} &= -\frac{2(1+x^2)^2 - 8x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^4}\bigg|_{x=0} = -\frac{2(1+x^2) - 8x^2}{(1+x^2)^3}\bigg|_{x=0}\\
&= \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}\bigg|_{x=0} = -2.
\end{aligned}$$

Tudíž

$$\begin{aligned}
\arcsin x &= x + \frac{x^3}{3!} + o(x^4),\\
\arctan x &= x - \frac{2x^3}{3!} + o(x^4),\\
\arcsin x - \arctan x &= \left(\frac{1+2}{6}\right)x^3 + o(x^4) = \frac{x^3}{2} + o(x^4),\ x \to 0.
\end{aligned}$$

To znamená, že

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x - \arctan x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{2} + o(x^4)}{x^3} = \frac{1}{2}.$$

[6] 2. Uvažujte funkci $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2 \sin x}{x^2+xy+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Ukažte, že funkce definovaná a spojitá na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
2. Ukažte, že funkce je spojitá v počátku.
3. Spočtěte $\nabla f(x,y)$ v počátku.
4. Rozhodněte, zda funkce f má v počátku totální diferenciál.

Řešení:

Platí $x^2 + y^2 \geq -2xy$ (neboť $(x+y)^2 \geq 0$). Tedy $xy \geq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ a tedy $x^2+y^2+xy \geq \frac{1}{2}(x^2+y^2) \geq 0$, přitom poslední rovnost nastává jen pro $x = y = 0$. Jmenovatel je tedy nenulový mimo počátek a funkce f je tedy definovaná na $\mathbb{R}^2$ a je zjevně spojitá mimo počátek. Dále mimo počátek platí odhad

$$0 \leq \left| \frac{y^2 \sin x}{x^2+xy+x^2} \right| \leq 2\frac{y^2|\sin x|}{x^2+y^2} \leq 2\frac{y^2|x|}{x^2+y^2} \leq 2\frac{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} = 2\sqrt{x^2+y^2}.$$

Tudíž

$$0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{y^2 \sin x}{x^2+xy+x^2} \right| = \lim_{(x,y)\to 0} 2\sqrt{x^2+y^2} = 0 \tag{1}$$

a funkce f je tedy spojitá i v počátku.

Nyní spočteme první parciální derivace v počátku

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(0+x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0^2 \sin x - 0}{x(x^2+x0+0^2)} = 0,$$
$$\lim_{y\to 0} \frac{f(0,0+y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{y^2 \sin 0 - 0}{y(0^2+0y+y^2)} = 0.$$

Vidíme, že jediný kandidát na totální diferenciál v počátku je nulové zobrazení. Dále

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y)-f(0,0)|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2|\sin x|}{(x^2+xy+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}. \tag{2}$$

Položme $y = kx$, pak limita přejde na

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{k^2x^2|\sin x|}{x^2|x|(1+k+k^2)\sqrt{1+k^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{k^2 \sin x}{x(1+k+k^2)\sqrt{1+k^2}} = \frac{k^2}{(1+k+k^2)\sqrt{1+k^2}}.$$

Jelikož limita závisí na k, pak celková limita (2) neexistuje a funkce f tedy nemá v počátku totální diferenciál.

[6] 3. Pro všechna $z \in \mathbb{C}$ rozhodněte, zda mocninná řada

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n2^n + (-1)^n}$$

konverguje (absolutně či neabsolutně) nebo nekonverguje.

Řešení:

Položme $a_n := \frac{1}{n2^n+(-1)^n}$, $n = 1, 2, \cdots$. Pak platí

$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n2^n + (-1)^n}} = \frac{1}{2} \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n + (-\frac{1}{2})^n}} = \frac{1}{2}.$$

Zde jsme použili

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n + (-\frac{1}{2})^n}} = 1. \qquad (\spadesuit)$$

Limita ($\spadesuit$) plyne z věty o dvou strážnících, odhadů

$$n + 1 \geq n + (-\frac{1}{2})^n \geq n - \frac{1}{2}$$

a

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n+a} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{\ln(n+a)}{n}} = e^{\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+a)}{n}} = e^{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+a}} = e^0 = 1$$

kde $a > -1$ je konstanta a kde jsme použili Heineho větu a l'Hospitalovo pravidlo. Poloměr konvergence řady je tedy 2.

Dále studejme chování řady na kružnici konvergence a položme $z = 2e^{ix}$, $x \in [0, 2\pi)$. Pak máme určit konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2e)^{ixn}}{n2^n + (-1)^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{ixn}}{n + (-\frac{1}{2})^n} \qquad (\diamondsuit)$$

v závislosti na x. Položme $b_n := \frac{1}{n+(-\frac{1}{2})^n}$, $n = 1, 2, \cdots$. Jelikož pro $n \in \mathbb{N}$ platí

$$1 - \frac{1}{2^{n+1}} \geq \frac{3}{4} > \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2^n},$$

pak

$$n + 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \geq n + \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

a tedy $\{b_n\}_{n=1}^{+\infty}$ je klesající posloupnost s limitou 0. Jelikož $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{inx}$ má pro $x \in (0, 2\pi)$ omezenou posloupnost částečných součtů, řada ($\diamondsuit$) konverguje pro tato x. Pro $x = 0$ získáme porovnáním s harmonickou řadou

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n},$$

že řada ($\diamondsuit$) diverguje.

[6] 4. Uvažujte obyčejnou diferenciální rovnici

$$y' + 2xy = \frac{4x}{y}. \tag{3}$$

1. Rozhodněte, zda rovnice (3) je lineární nebo nelineární. Zdůvodněte.
2. Najděte obecné řešení rovnce (3). (Nápověda: zaveďte substituci $z = y^2$.)

Řešení:

Rovnici (3) lze přepsat do tvaru $y' = \frac{2x(2-y^2)}{y}$. Odsud vidí me, že rovnice je nelinární, neboť např. pro $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$:

$$\frac{4x}{\alpha y} - 2\alpha xy = f(x, \alpha y) \neq \alpha f(x,y) = \alpha \left(\frac{4x}{y} - 2xy \right).$$

Rovnice má dvě stacionární řešení: $y(x) = \sqrt{2}$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a $y(x) = -\sqrt{2}$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Rovnici přenásobíme výrazem $2y$, dostanete rovnici $2yy' + 4xy^2 = 8x$. Jelikož $z' = 2yy'$ a tedy rovnice má po substituci tvar $z' + 4xz = 8x$, což je lineární rovnice 1. řádu, tj. rovnice tvaru $z' + a(x)z = b(x)$ pro $a(x) = 4x$ a $b(x) = 8x$.

Integrací dostaneme $A(x)$, primitivní funkce a $a(x)$ je např. $2x^2$ a $B(x)$, primitivní funkce k $b(x)e^{A(x)} = 8xe^{2x^2}$ je např. $2e^{2x^2}$.

Obecné řešení je tedy ve tvaru

$$z(x) = B(x)e^{-A(x)} + Ce^{-A(x)} = 2e^{2x^2}e^{-2x^2} + Ce^{-2x^2} = 2 + Ce^{-2x^2}, \quad x \in \mathbb{R},\ C \in \mathbb{R}.$$

Pro obecné řešení původní rovníce provedeme zpětnou substituci a dostaneme

$$y(x) = \pm\sqrt{2 + Ce^{-2x^2}}.$$

Je ale nutné, aby x splňovalo $2 + Ce^{-2x^2} > 0$.

Pokud $C > -2$, je i $Ce^{-2x^2} > -2$, $x \in \mathbb{R}$. Pro $C \leq -2$ platí

$$Ce^{-2x^2} > -2 \quad \Longleftrightarrow \quad |x| > \sqrt{-\frac{1}{2}\log\left(-\frac{2}{C}\right)}.$$

Dostáváme tedy řešení

$$y(x) = \pm\sqrt{2 + Ce^{-2x^2}}, \begin{cases} x \in \mathbb{R}, & C > -2, \\ x \in \left(-\infty, \sqrt{-\frac{1}{2}\log\left(-\frac{2}{C}\right)}\right), \left(\sqrt{-\frac{1}{2}\log\left(-\frac{2}{C}\right)}, \infty\right) & C \leq -2. \end{cases}$$

[7] 5. Jaký nejmenší a největší obsah může mít trojúhelník s vrcholy $(0,0)$, $(1,-1)$ a (x,y), kde $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ a $x,y\le 0$.
Připomeňme, že obsah trojúhelníku s vrcholy (x_A,y_A), (x_B,y_B) a (x_C,y_C) je dán

$$\frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ x_A & x_B & x_C\\ y_A & y_B & y_C\end{pmatrix}\right|.$$

Řešení:

Položme

$$M_1=\left\{(x,y)\in(-\infty,0)\times(-\infty,0):\frac{x^2}{4}+y^2=1\right\},\ M_2=\{(-2,0),(0,-1)\},.$$

a

$$M=M_1\cup M_2=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\frac{x^2}{4}+y^2=1,\ x,y\le 0\right\}.$$

Obsah trojúhelníku s vrcholy $(0,0)$, $(1,-1)$ a (x,y) je roven $\frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix}1 & -1\\ x & y\end{pmatrix}\right|=\frac{1}{2}|x+y|$. Protože pro všechny body $(x,y)\in M$ platí $x+y<0$, zajímají nás globální extrémy funkce $f(x,y)=-\frac{1}{2}(x+y)$ vzhledem k množině M. Ty jistě existují protože M je uzavřená a omezená (a neprázdná) a f spojitá vzhledem k M.

Pokud má být bod (x,y) bodem globálního extrému f vzhledem k M, musí být bodem lokálního extrému f vzhledem k M_1, nebo M_2. Body lokálního extrému f vzhledem k M_2 jsou zjevně body $(-2,0)$ a $(0,-1)$.

Položme $g(x,y)=\frac{x^2}{4}+y^2-1$. Pro bod (x,y), který je bodem lokálního extrému f vzhledem k M_1 musí platit alespoň jedna z podmínek

- $\nabla g(x,y)=0$.
- existuje $\lambda\in\mathbb{R}$, že $\nabla f(x,y)=\lambda\nabla g(x,y)$.

Máme $\nabla f(x,y)=(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ a $\nabla g(x,y)=(\frac{x}{2},2y)$. První podmínka není splněna v žádném bodě M_2 a druhá podmínka dává soustavu

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}&=\frac{\lambda x}{2},\\ -\frac{1}{2}&=2\lambda y,\\ \frac{x^2}{4}+y^2&=1.\end{aligned}$$

První dvě rovnice dávají podmínku $x=4y$ a jejím dosazením do třetí rovnice dostáváme $5y^2=1$. Tedy $y=-\frac{1}{\sqrt{5}}$ (chceme $y<0$) a tedy dostáváme bod $(-\frac{4}{\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{5}})$. Dosazením dostaneme

$$f(-2,0)=1,\quad f(0,-1)=\tfrac{1}{2},\quad \text{a}\quad f(-\tfrac{4}{\sqrt{5}},-\tfrac{1}{\sqrt{5}})=\tfrac{\sqrt{5}}{2}.$$

Nejmenší mozný obsah je tedy $\frac{1}{2}$ a největší $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

[6] 6. Nechť $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je definována předpisem $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

1. Určete body na křivce $F(x, y) = 0$, ve kterých je y funkcí proměnné x, tj. $y = \varphi(x)$. (Nezkoušejte funkci φ explicitně nalézt!)
2. V nalezených bodech spočtěte $\varphi'(x)$.
3. Určete, ve kterých bodech je $\varphi'(x) = 0$.

Řešení:

Zřejmě F je mnohočlen a tedy $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Protože v definici funkce F jsou výrazy x^3 a y^3, lze pro dané $x \in \mathbb{R}$ očekávat existenci alespoň jednoho $y \in \mathbb{R}$. Pro použití věty o implicitní funkci potřebujeme vyloučit body, kde hodnota $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$. Platí:

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 3y^2 - 3x = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = y^2.$$

Dosadíme-li $x = y^2$ do $F(x, y) = 0$, dostaneme $y^3(y^3 - 2) = 0$, což dává body $\{(0, 0), (\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})\}$, kde nelze aplikovat větu o implicitních funkcích. Tedy funkce $y = \varphi(x)$ je definována v $\mathbb{R} \setminus \{0, \sqrt[3]{4}\}$.

Dále,

$$\varphi'(x) = -\frac{x^2 - y}{y^2 - x} \quad \text{kde} \quad y = \varphi(x) \quad \text{splňuje } F(x, \varphi(x)) = 0.$$

Odsud vidíme, že čitatel se nuluje v bodech $\{(0, 0), (\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})\}$, přičemž ten první je vyloučen předpoklady věty o implicitní funkci.