SYLABUS přednášky NOFY152 - LS 2019/2020

Sylabus zahrnuje i témata, která nebyla odpřednesena v ZS 2019/2020 (kdy jsme shodou různých okolností měli 21 přednášek namísto standardních 26): Taylorovy polynomy a Riemannův a Newtonův integrál.

Požadována je znalost definic a tvrzení, přehled a intepretace pojmů, hlavní myšlenky důkazů. Látka, která nebude zkoušena, je vyznačena modře.

4. Hlubší vlastnosti spojitých a diferencovatelných funkcí

- Taylorovy polynomy. Definice. Peanova věta. Lagrangeův, Cauchyův a integrální[1] tvar zbytku. Taylorovy polynomy základních funkcí a jejich použití při výpočtu limit. Aplikace: postačující podmínka pro globální extrém (pro funkce jedné reálné proměnné).

5. Newtonův a Riemannův integrál.

- Newtonův integrál (NI). Definice zobecněné primitivní funkce a definice NI.
- Riemannův integrál (RI). Dolní a horní Riemannovy součty, horní a dolní RI a jejich existence. Definice RI. Charakterizace existence RI. Věty o existenci RI (pro (i) $f \in C(\langle a, b\rangle)$, (ii) f omezenou na $\langle a, b\rangle$ a spojitou až na konečný počet bodů, a (iii) f monotónní).
- Vlastnosti Riemannova integrálu. RI = příklad lineárního funkcionálu. RI nezáporných funkcí, uspořádání, vztah RI pro f a RI pro $|f|$. RI přes sjednocení disjunktních množin = součet RI přes jednotlivé množiny. Základní věta integrálního a diferenciálního počtu. Věta o existenci primitivní funkce. Prostor Riemannovsky a Newtonsky integrovatelných funkcí. Absolutně a neabsolutně konvergentní integrál - příkladem jsou RI resp. NI.
- Věty o střední hodnotě, per partes a substituci. Aplikace RI či NI. Délka křivky zadaná jako graf funkce, jako křivka v kartézských resp. polárních souřadnicích, obsah plochy, objem a povrch rotujících těles.
- $n!$: jeho odhad a rozšíření pomocí Γ-funkce. π je iracionální.

6. Číselné řady.

- Terminologie a základní vlastnosti. Pojem řady a posloupnosti částečných součtů pro danou posloupnost čísel. Konvergentní, divergentní, oscilující řada. Geometrická, teleskopická, harmonická řada. Nutná podmínka konvergence řad. Aritmetika řad.
- Řady s nezápornými členy. Srovnávací a podílové srovnávací kritérium. Cauchyho odmocninové a D'Alembertovo podílové kritérium a jejich limitní verze. Integrální kritérium. Kondenzační, Raabeho a Gaussovo kritérium (u posledních dvou nebudou důkazy zkoušeny).

[1] Integrální tvar zbytku odpřednesen na konci kapitoly 5.

- Alternující a obecné řady. Absolutně/neabsolutně konvergující řady. Bolzano-Cauchyho podmínka pro řady. Absolutní konvergence řady implikuje konvergenci řady. Alternující řady. Leibnizovo kritérium. Abelovo.a Dirichletovo kritérium.

- Mohutnost (kardinalita) čísel (Konečná, spočetná a nespočetná množina. Množina reálných čísel je nespočetná. Mohutnost množiny všech podmnožin reálných čísel. Cantorova diagonalizace.) Přerovnání řad (definice, přerovnání absolutně konveregentních řad, Riemannova věta o přerovnání neabsolutně konvergentních řad). Součin řad (Mertensova věta. Cauchyův součin dvou absolutně konvergentních řad.)

- Mocninné řady. Definice. Poloměr konvergence a metody pro jeho určení. Derivace a integrace mocniných řad. Abelova věta.

- Věty o sinu, cosinu a exponenciále (jen hlavní myšlenky důkazu). e je iracionální.

7. Obyčejné diferenciální rovnice (ODR).

- Úvod. Terminologie a klasifikace různých typů diferenciálních rovnic. Počáteční versus okrajová úloha pro obyčejnou diferenciální rovnici 2. řádu, fázový prostor, převod na systém rovnic 1. řádu. Energetická bilance. Obecné řešení homogenní a nehomogenní lineární diferenciální rovnice 2. řádu. Resonance.

- Skalární ODR 1. řádu. Definice řešení, definice maximálního řešení, směrové pole. Lineární ODR 1. řádu (metoda integračního faktoru) a nelineární ODR se separovanými proměnnými. Bernoulliova, homogenní a Riccatiova rovnice. Chemické a biologické modely.

- Základní existenční věty. Definice lokálního řešení počásteční úlohy pro systém ODR 1. řádu. Peanova a Picard-Lindelöfova věta. Eulerova numerická metoda tečen. Řešení ODR metodou mocninných řad. Besselova rovnice.

- Lineární skalární ODR n-tého řádu. Věta o globální existenci a jednoznačnosti počáteční úlohy. Vlastnosti řešení homogenní rovnice , tj. rovnice s nulovou pravou stranou. Wronského matice a Wronskián. Metoda variace konstant. Nalezení báze pro lineární ODR n-tého řádu s konstaními koeficienty.

8. Funkce více proměnných (a úvod do metrických prostorů).

- Prostor $\mathbb{R}^d$. $(\mathbb{R}^d, +)$ je Abelova grupa, $\mathbb{R}^d$ je vektorový prostor. Skalární součin a jeho vlastnosti, (Eukleidovská) norma indukovaná skalárním součinem, p-normy, ekvivalence norem, geometrický význam, metrika v $\mathbb{R}^d$.

- Zobecněné struktury. (Pre-)Hilbertovy prostory, normované lineární prostory, metrické prostory. Příklady: spojité funkce na uzavřeném intervalu s maximovou resp. integrální normou (metrikou) tvoří normované (metrické) vektorové prostory, normy nejsou ekvivalentní. ℓ^p prostory.

- Topologie $\mathbb{R}^d$. ε-ové okolí bodu, vnitřní bod množiny, množina otevřená, uzavřená, systém všech otevřených (uzavřených) množin v $\mathbb{R}^d$ - topologie $\mathbb{R}^d$, bod hranice množiny, hranice, uzávěr množiny M (nejmenší uavřená množina obsahující M), vnitřek množiny M (největší otevřená podmnožina M). Bod je uzavřená množina. Hausdorffův oddělovací axiom. Hromadný bod, charakterizace uzavřených množin pomocí hromadných bodů.

- Konvergence posloupnosti, úplnost a kompaktnost v $\mathbb{R}^d$. Konvergence posloupnosti bodů v topologickém a metrickém prostoru, cauchyovská posloupnost, Banachův prostor, kompaktnost (topologická definice), kompaktnost v metrickém prostoru a její charakterizace. Kompaktní množiny v $\mathbb{R}^d$. Heine-Borelova věta. Malé ℓ^p prostory.

- Limita, spojitost a derivace skalárních a vektorových funkcí více proměnných. Spojitost, parciální derivace, divergence, derivace ve směru, základní věty, věta o derivování složeného zobrazení, gradient, derivace ve směru největšího spádu, věta o záměně derivací vyššího řádu.

- Totální diferenciál a Taylorův rozvoj. Dvě varianty věty o střední hodnotě. Totální diferenciál a jeho geometrická interpretace pro skalární funkce. Důsledky plynoucí z existence totálního diferenciálu. Postačující podmínky k existenci totálního diferenciálu.

- Věty o spojitém zobrazení na kompaktu $K \subset \mathbb{R}^d$, extrémy. Definice lokálního/globálního maxima/minima. Definice sedlového bodu. Pro $f \in C(K)$ platí: $f(K)$ je kompakt, f je omezená v K, f nabývá maxima a minima v K, f je stejnoměrně spojitá v K. Nutné a postačujícící podmínky existence extrému.

- O čtyřech hlubších větách. Banachova věta (varianty v Banachově prostoru a v úplném metrickém prostoru) a její modifikace s počátkem coby počáteční hodnotou pro iterace. Aplikace 1: důkaz Picard-Lindelöfovy věty.

  Věta o implicitních funkcích včetně odvození vztahu pro derivace pro skalární resp. Jakobiho matici pro vektorové funkce. ODR 1. řádu ve tvaru totálního diferenciálu. Potenciál k danému vektorovému poli a nutná (a postačující) podmínka jeho existence.

  Věta o inverzním zobrazení (lokální a globální varianta).

  Lagrangeova věta o vázaných extrémech (resp. o multiplikátorech). Extrémy kvadratické formy na jednotkové sféře.