

3. Lebesgueův integrál

Cílem této kapitoly je vybudovat integrál pro funkce více proměnných. Měli bychom budovat náhradou Riemannův integrál, což se často dělá. Riemannův integrál však má řadu nedostatků:

- Prostor $R(a,b) := \{f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}; (R) \int_a^b |f(x)| dx < \infty\}$ není úplný metrický prostor. Např. Aproximace Dirichletovu funkci počtouprst, která je rovna 1 jím v konečné množině racionálních bodech.

- Limitní přechody

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

či změny operací

$$(2) \quad \frac{d}{dt} \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f'(t) dt$$

ne ospravedlnit jím za velmi silných předpokladů.

My budeme budovat jiný integrál, tzv. Lebesgueův, který má tu vlastnost, že

$$L^p(\Omega) = \{u: \Omega \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}; \int_{\Omega} |u(x)|^p dx < +\infty\} \quad \|\cdot\|_p = \left(\int_{\Omega} |\cdot|^p dx \right)^{1/p}$$

je úplně normovaný (tedy Banachov) prostor pro $p \in (1, \infty)$.

Speciálně, pro $p=2$, dostaneme $L^2(\Omega)$, což je Hilbertův prostor se skalárním součinem $(f,g) = \int f(x)g(x) dx$.

Nauč se Lebesgueův integrál Ω klade za cíl malát minimální požadavky, kdy (1) či (2) platí.

Lebesgueův integrál je konstruován ideově jinak než Riemannův integrál. Z pohledu aproximace obou integrálů máme:

$$(R) \int_a^b f(x) dx \approx \sum f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$(L) \int_a^b f(x) \approx \sum c_i \mu(M_i) \text{ kde}$$

$$M_i := \{x \in \langle a, b \rangle; f(x) \in \langle c_i, c_{i+1} \rangle\}$$

3.1 Prostor schodovitých funkcí a množiny míry nula

Definice (intervaly v $\mathbb{R}^d$) Jsou-li $-\infty < a_i < b_i < +\infty$,
 $i=1, 2, \dots, d$, pak

$I := (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \dots \times (a_d, b_d)$ nazýváme interval,

$I^\circ := (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \dots \times (a_d, b_d)$ je otevřený interval

$\bar{I} := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_d, b_d]$ je uzavřený interval

$S := (a_1, b_1) \times \dots \times (a_{i-1}, b_{i-1}) \times \{b_i\} \times \dots \times (a_d, b_d)$ stěna I

Definujeme objem intervalu I resp. I° resp. $\bar{I}$ vztahem

$$V(I) := \prod_{i=1}^d (b_i - a_i)$$

Dělení I nazýváme systémem navzájem disjunktůvých intervalů, jejichž sjednocení je celé I a množiny krajních bodů v i -té složce tvoří dělení intervalu (a_i, b_i) .

Def. (množiny míry nula). Řekneme, že $E \subset \mathbb{R}^d$

je množina míry nula pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje společný počet intervalů $I_k, k=1, \dots, \infty$, tak, že

$$\sum_{k=1}^{\infty} V(I_k) < \varepsilon.$$

Příklad Buď $Q \subseteq \mathbb{R}$ libovolná spočetná množina, pak Q je množina míry nula. Speciálně racionální čísla Q je množina míry nula.

(Dě) Buď $Q = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$. Pak $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_{\frac{\varepsilon}{2^n}}(x_n) \supset Q$,
a tedy $Q \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_{(x_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, x_n + \frac{\varepsilon}{2^n})}$
a $\sum_{n=1}^{\infty} V\left(I_{(x_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, x_n + \frac{\varepsilon}{2^n})}\right) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} < \varepsilon \quad \square$

Tvrzení Společné sjednocení množin míry nuly je množina míry nula.

(Dě) Sami.

Příklad Cantorovo diskontinuum je nespočetná množina míry nula.

Rěšení - Cantorovo diskontinuum získáme ze $(0,1)$ tak, že $(0,1)$ rozdělíme na třetiny a vynecháme prostřední úseť $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ a ve zbylých částech tento postup opakuje. Platí $x \in C \iff x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ kde $a_n = 0$ nebo 2 .

C je nespočetná když C byla spočetná, pak

$$C = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \text{ kde } \left. \begin{array}{l} x_1 = 0.a_{11}a_{12} \dots a_{1n} \\ x_2 = 0.a_{21}a_{22} \dots a_{2n} \\ \vdots \\ x_n = 0.a_{n1}a_{n2} \dots a_{nn} \\ \vdots \end{array} \right\} a_{ij} \in \{0, 2\}$$

Definujeme-li

$$x = 0.a_1a_2 \dots \text{ podpisem } a_i = \begin{cases} 0 & \text{je-li } a_{ii} = 2 \\ 2 & \text{je-li } a_{ii} = 0 \end{cases}$$

pak $x \notin C$ (neb se liší od všech prvků v $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$).

Tedy C není spočetná.

Dále $C \subset \langle 0,1 \rangle \setminus F_\infty$, kde F_n je sjednocení vynechaných intervalů po n -tém kroku konstrukce C . Tedy

$$\begin{aligned} V(F_n) &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \dots + \frac{2^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{3} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{2}{3}\right)^i \\ &= \frac{1}{3} \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \rightarrow 1 \text{ pro } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Tedy C je potřeba pochopit (koncizně) sjednocením otevřených intervalů, jejichž celkový objem jde k nule.

Definice Řekneme, že $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ je schodovitá (jednoduchá) funkce (step or simple) pokud existuje interval $I \subset \mathbb{R}^d$ tak, že $f \equiv 0$ v $\mathbb{R}^d \setminus I$ a existují dělení $\{I_k\}_{k=1}^N$ intervalu I a existují $\{c_k\}_{k=1}^N \subset \mathbb{R}$ tak, že

$$f(x) = \sum_{I_k} c_k \chi_{I_k}(x)$$

Značení $H := \{f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ je schodovitá}\}$

Definice $f \in H \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx = \int_I f(x) dx := \sum_{k=1}^N c_k V(I_k)$

Následující tvrzení charakterizuje množiny míry nula pomocí schodovitých funkcí.

Twierdzenie $E \subset \mathbb{R}^d$ jest mierzalą miera $\Leftrightarrow \forall \eta > 0 \exists \{h_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}$
 tak, że

$$(1) 0 \leq h_1 \leq h_2 \leq \dots \leq h_m \leq \dots$$

$$(2) (\forall m \in \mathbb{N}) \int h_m(x) dx \leq \eta$$

$$(3) (\forall x \in E) \sup_{m \in \mathbb{N}} h_m(x) \geq 1$$

(Dł) $\Rightarrow$ Przypuśćmy, że dla danego $\eta > 0$ istnieje $\{I_k\}$
 tak, że $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ a $\sum_{k=1}^{\infty} V(I_k) < \eta$. Definiujemy

$$h_m(x) := \sum_{k=1}^m \chi_{I_k}(x)$$

Wtedy $h_m \in \mathcal{H}$ a (1) jest spełnione. Ponadto $\int h_m(x) dx = \sum_{k=1}^m V(I_k) < \eta$
 dla $\forall m \in \mathbb{N}$, co jest (2). Ponadto $\bigcup I_k$ pokrywa E , więc (3) jest spełnione.

$\Leftarrow$ Zwróćmy się do dowodu samej.

Wzeta 3.1 (Własności skończonej funkcji, własności przestrzeni $\mathcal{H}$)

$$(i) f \in \mathcal{H} \Rightarrow |f| \in \mathcal{H}$$

$$(ii) (\forall f \in \mathcal{H}) \quad f \geq 0 \Rightarrow \int f dx \geq 0$$

$$(iii) \mathcal{H} \text{ jest przestrzenią wektorową} \quad (f, g \in \mathcal{H}, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha f + g \in \mathcal{H})$$

$$\left. \begin{array}{l} f \leq g \\ f, g \in \mathcal{H} \end{array} \right\} \Downarrow \int f \leq \int g$$

$$(iv) f, g \in \mathcal{H} \Rightarrow \max\{f, g\} \in \mathcal{H}, \quad f^+ \in \mathcal{H}$$

$$\min\{f, g\} \in \mathcal{H}, \quad f^- \in \mathcal{H}$$

$$(v) f \in \mathcal{H} \Rightarrow \left| \int f dx \right| \leq \int |f| dx$$

$$(vi) \text{ Istnieje } \{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{H} \text{ a } f_k \searrow 0, \text{ przy } \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k = 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^d: 0 \leq \dots \leq f_{k+1}(x) \leq f_k(x) \leq \dots \leq f_1(x) \text{ a } \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = 0$$

(D₁) Ad (i) Je-li $f(x) = \sum_{k=1}^N c_k \chi_{I_k}(x)$, pak $|f(x)| = \sum |c_k| \chi_{I_k}(x)$ je zřejmá také schodovitá.

Ad (ii) Je-li $f(x) = \sum_{k=1}^N c_k \chi_{I_k}(x)$ a $c_k \geq 0$, pak $\int f = \sum c_k V(I_k) \geq 0$.

Ad (iii) Pokud $\alpha \in \mathbb{R}$, $f \in H$, pak $\alpha f \in H$.

Jsou-li $f, g \in H$ a $f \equiv 0$ v $\mathbb{R}^d - I^f$ a $g \equiv 0$ v $\mathbb{R}^d - I^g$, pak snadno sestrojíme interval I a jeho dělení $\{I_k\}$ tak, $\{I_k\}_{I^f}$ je symetrické (determin) $\{I_k^f\}_{k=1}^{N^f}$ a $\{I_k\}_{I^g}$ je symetrické $\{I_k^g\}_{k=1}^{N^g}$. Na intervalech $I_k \notin I^f \cup I^g$ položíme $c_k = 0$. Na $I_k \subset I^f \setminus I^g$ je $c_k = c_k^f$ a na $I_k \subset I^g \setminus I^f$ položíme $c_k = c_k^g$. Nakonec na $I_k \subset I^f \cap I^g$ uklademe $c_k = c_k^f + c_k^g$.

Tak $f+g = \sum c_k \chi_{I_k} \in H$.

Ad (iv) Protože $f^+ = \max\{f, 0\}$, $f^- = \max\{-f, 0\}$, $\max\{f, g\} = \frac{1}{2}\{f+g+|f-g|\}$ a $\min\{f, g\} = -\max\{-f, -g\}$, tak tvrzení plyne z (iii) a (i).

Ad (v) Protože $-|f| \leq f \leq |f|$, takže dle (ii) aplikované na $|f|+f$ a $|f|-f$ a s použitím linearitě dostáváme

$$-\int |f| \leq \int f \leq \int |f|.$$

Ad (vi) Chceme ukázat, že

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists k_0 \in \mathbb{N}) (\forall k \geq k_0) \int f_k \leq \varepsilon.$$

[1] Značení • f_1 je mluva na I (f_k jsou monotónní $\Leftrightarrow f_k = 0$ na I)

$$M := \max_{x \in I} f_1(x)$$

$$f_k \in H \Rightarrow \exists \{I_{k,j}\}_{j=1}^{N_k} (\exists f_{k,j} \in \mathbb{R}) f_k = \sum_{j=1}^{N_k} f_{k,j} \chi_{I_{k,j}}$$

S_k ... množina všech dělů dělení $I_{k,j}$

$$S_\infty = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k \cup \{\text{zbylé děly } \partial I\}$$

S_∞ je spočetná - jednotlivé děly z S_∞ lze indexovat přirozenými čísly

[2] Pokrytí $\bar{I}$ $\varepsilon > 0$ dáno. Polož $\eta := \frac{\varepsilon}{2M}$ a $\eta' = \frac{\varepsilon}{2V(I)}$

(a) pokrytí S_∞ $\forall$ stěnu S_i z S_∞ pokryjeme otevřený interval K_i tak, že $V(K_i) \leq \frac{\eta}{2^i}$.
Potom $\sum_{i=1}^{\infty} V(K_i) < \eta$.

(b) pokrytí $I \setminus S_\infty$

$I \setminus S_\infty$ je otevřená množina a f_k je na $I \setminus S_\infty$ spojitá

$\forall x \in I \setminus S_\infty (\exists k_0 = k_0(x)) (\forall k \geq k_0) f_k(x) < \eta'$
(speciálně $f_{k_0}(x) < \eta'$)

Protože f_{k_0} je po částech konstanta, tak existuje otevřený interval $J(x)$ tak, že $f_{k_0}(y) < \eta'$ pro všechna $y \in J(x)$

$\bar{I} \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i \cup \bigcup_{x \in I \setminus S_\infty} J(x)$, ale $\bar{I}$ je kompaktní

$\Rightarrow \exists K_{i_1}, \dots, K_{i_m}, x_1, \dots, x_p$ tak, že $\bar{I} \subset \bigcup_{j=1}^m K_{i_j} \cup \bigcup_{i=1}^p J(x_i)$

[3] Definujme $\zeta_0^* = \max_{i=1, \dots, p} \{k_0(x_i)\}$

vzájemně disjunktů

Pro $\forall k \geq \zeta_0^*$ a $\forall x \in I \setminus S_\infty : f_k(x) < \eta'$

a dále $I \setminus S_\infty \subset \bigcup_{i=1}^p J(x_i)$ a $\sum_{i=1}^p V(J(x_i)) \leq V(I)$

$$\int f_k \leq \int f_{\zeta_0^*}^* \leq M \sum_{j=1}^m V(K_{i_j}) + \eta' V(I) \leq M \eta + \eta' V(I) = \varepsilon$$

□

Definice Řekneme, že nějaká vlastnost (např. $f = g$, $f \leq g$, ...) platí skoro všude (almost everywhere) a píšeme s.v. (a.e.)
 $\equiv$ vlastnost platí $\forall x \in \mathbb{R}^d \setminus Z$, kde Z je množina míry nula.

Věta 3.2 (Dalsí vlastnosti schodovitých funkcí). Bud' $f, g \in H$

$$(i) \quad \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H \text{ a } f_n \searrow 0 \text{ s.v.} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n = 0$$

$$(ii) \quad f = g \text{ s.v.} \Rightarrow \int f = \int g$$

$$(iii) \quad f \leq g \text{ s.v.} \Rightarrow \int f \leq \int g$$

ⓓⓔ Ad (i) Doplátíme tvrze nejdříve ke silnějších předpokladům:
 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ a $0 \leq \dots f_{n+1}(x) \leq f_n(x) \leq \dots \leq f_1(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \setminus Z$,

kde Z je množ. míry nula tak. $\exists \{h_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$

$$(i) \quad 0 \leq h_1(x) \leq \dots \leq h_n(x) \leq \dots$$

$$(ii) \quad (\forall n) \quad \int h_n \leq \frac{\varepsilon}{M} \quad (M := \max f_1)$$

$$(iii) \quad (\forall x \in Z) \quad \sup_n h_n(x) \geq 1$$

Uvažme fce $f_n - M h_n$. jsou perostanci všude
 $f_n \geq 0 \Rightarrow \int f_n \geq 0 \quad (\forall n)$. $\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(x) - M h_n(x)) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$

$$\text{Tedy } \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(x) - M h_n(x))^+ = 0$$

Dle Věty 3-1 (vi)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int (f_n(x) - M h_n(x))^+ = 0,$$

což implikuje

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int (f_n(x) - M h_n(x)) \leq 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \leq M \lim_{n \rightarrow \infty} \int h_n \leq M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Ad (ii) $\{f - g\}_{n=1}^{\infty}$ je konstantu polynomom, teda je
 (triviálne) monotonú po všetkých x a
 (triviálne) $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) - g(x) = 0$ po s.v. x .

Tedy dle prvého dodatku tvrzení (**Ad(i)**):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int (f - g) = 0 \Rightarrow \int f = \int g$$

$$\text{Ad (iii)} \quad 0 \leq |g - f| = g - f \text{ s.v.} \Rightarrow 0 \leq \int |g - f| = \int g - f \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int f \leq \int g.$$

Nyní dokažeme tvrzení (i) z předpokladů uvedených ve větě.

Ad (i) PODRUKA'

Definujme $\tilde{f}_n$ takto:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_1 &= f_1^+ \\ \tilde{f}_i &= \min \{f_i^+, \tilde{f}_{i-1}\} \end{aligned}$$

Pať nové tvrzení overíme

• $\tilde{f}_n$ je nerostoucí $\forall x \in \mathbb{R}^d$ } $\Rightarrow$ Tvrzení (i) dokážeme
ze silnějších předp.
 • $\tilde{f}_n = f_n$ s.v.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \tilde{f}_n = 0 \quad \text{a dle (ii):} \quad \int \tilde{f}_n = \int f_n \Rightarrow$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n = 0$$



3.2 Prostory měřitelných a Lebesgueových integrovatelných fceí M^+, L^+, M, L .

Definice • $[f \in M^+]$ (prostor měřitelných nezáporných funkcí)
 $\stackrel{\text{d.f.}}{=} \exists \{h_i\}_{i=1}^{\infty} \subset H, h_i \geq 0$ a $\underbrace{h_i \nearrow f}_{\text{s.v.}}$

$$\left(\text{tzn. } \forall x \in \mathbb{R}^d - Z : 0 \leq h_1(x) \leq h_2(x) \leq \dots \nearrow f(x) \right.$$

$$\bullet \lim_{i \rightarrow \infty} h_i(x) = f(x),$$

PROSTOR
LEBESGUEOVSKÝ
INTEGROVAT.
NEZÁPORNÝCH
FUNKCÍ

Z je množ. mrtv. bodů

$$[f \in L^+]$$

$\stackrel{\text{d.f.}}{=} f \in M^+$ a posloupnost $\{h_i\}_{i=1}^{\infty} \subset H$ z definice prostoru M^+ navíc splňující: $\exists K > 0 \forall i \int h_i \leq K$.

Pro $f \in L^+$ definujeme Lebesgueův integrál takto:

$$\int f = \lim_{i \rightarrow \infty} \int h_i$$

[Povšimněme si, že $h_i \leq h_j \Rightarrow \int h_i \leq \int h_j \leq K$
 pro $i < j$. Tedy $\{\int h_i\}_{i=1}^{\infty}$ tvoří monotonní
 posloupnost reáln. čísel.]

Monotonní posloupnost ohraničená z nahoře má v $\mathbb{R}$ limitu. Tedy
 limita takové posloupnosti vždy existuje. |

V následujících dvou větách budeme nejdříve prozkoumat
 strukturní vlastnosti L^+ včetně nezápornosti definice
 integrálu na volbě posloupnosti $\{h_i\}_{i=1}^{\infty} \subset H$.
 Potom budeme zkoumat podmínky

$\int$ a limity.

Věta 3.3 Bud' $f, g \in L^+$. Potom

(i) $f \leq g$ s.v. $\Rightarrow \int f \leq \int g$

(ii) $f = g$ s.v. $\Rightarrow \int f = \int g$

(iii) $\int f$ konverguje po volbě $\{h_i\}_{i=1}^\infty \subset H$

(iv) f je konečná s.v.

(v) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_0^+ \Rightarrow \alpha f + \beta g \in L^+$ (to už je zřejmé, že L^+ je vektorový prostor. Proč?)

(vi) $\max\{f, g\} \in L^+, \min\{f, g\} \in L^+$

Def. $K f \in L^+ : \exists h_i \geq 0, h_i \in H, h_i \uparrow f$ s.v. a $\exists K > 0 \forall i \int h_i \leq K$
 $K g \in L^+ : \exists l_i \geq 0, l_i \in H, l_i \uparrow g$ s.v. $\Rightarrow \int l_i \leq K$

Ad (i) $\{h_i - l_j \mid h_i \geq g, l_j \uparrow g\} \Rightarrow (h_i - l_j)^+ \rightarrow 0$ s.v. po $j \rightarrow \infty$
 protože $f - g \leq 0$, tak $h_i - g \leq 0$ s.v. (†i)

$\Rightarrow \int (h_i - l_j)^+ \rightarrow 0 \quad j \rightarrow \infty$

Tedy $\lim_{j \rightarrow \infty} \int h_i - l_j \leq 0 \Rightarrow \int h_i = \lim_{j \rightarrow \infty} \int l_j = \int g$

$\int f \leq \int g$

Ad (ii)

plyne z (i) neboť $f = g$ s.v. $\Rightarrow f \geq g$ s.v. & $g \geq f$ s.v.

Ad (iii)

Uvažujme dvě posloupnosti $\{h_i\}_{i=1}^\infty$ & $\{l_i\}_{i=1}^\infty$ tak, že $h_i \uparrow f = f$ a $l_i \uparrow g = g$

Pak $f_1 = f_2$ s.v. a dle (ii) $\int f_1 = \int f_2$

Ad (iv)

$Z_1 := \{x \in \mathbb{R}^d; \text{neplatí } h_i(x) \uparrow f(x)\}$ je množ. míry nul.

Definujme $Z_2 := \{x \in \mathbb{R}^d; Z_1, f(x) = \infty\}$. Cílem je ukázat, že

Z_2 je m. míry nula. Definujme $H_i = \frac{\varepsilon}{K} h_i \in H$. Pak

(α) $H_i \geq 0$, (β) (†i) $\int H_i = \frac{\varepsilon}{K} \int h_i \leq \varepsilon$

(γ) $\forall x \in Z_2 \sup_i H_i(x) \geq 1$ (neboť $h_i \uparrow \infty$ na Z_2).

Tedy Z_2 je dle "charakterizace m. míry nula" m. míry nula.

Ad (v) Rozmyslite sami.

Ad (vi) Označme $H_i = \max_x \{h_i, l_i\}$.

Otvoríme $h_i, l_i \in H \Rightarrow H_i \in H$ dle Věty 3.1 (iv).

Nanic: $\left. \begin{array}{l} \cdot H_i \nearrow \max \{f, g\} \\ \cdot (\forall i) \int \max \{f, g\} \leq 2K \end{array} \right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \max \{f, g\} \in L^+.$



Věta 3.4 (Limitní přechod v L^+)

Bud' $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^+$, $f_n \nearrow f$ s.v. a $(\exists K)(\forall n \in \mathbb{N}) \int f_n \leq K$.

Pak

$$\int f = \left(\int \lim f_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n$$

tj. směna limity a $\int$ platí.

(Dů) $f_n \in L^+$: $\exists \{h_{nj}\}_{j=1}^{\infty}$, $h_{nj} \geq 0$, $h_{nj} \in H$, $h_{nj} \nearrow f_n$ s.v., $\forall j \int h_{nj} \leq K$

Definujme $H_j = \max_{1 \leq m \leq j} h_{mj} \in H$

$$\begin{array}{ccccccc} \cdot & h_{11} & \leq & h_{12} & \leq & h_{13} & \leq \dots & \leq h_{1j} & \leq \dots & \leq f_1 \\ \cdot & h_{21} & \leq & h_{22} & \leq & h_{23} & \leq \dots & \leq h_{2j} & \leq \dots & \leq f_2 \\ \cdot & h_{31} & \leq & h_{32} & \leq & h_{33} & \leq \dots & \leq h_{3j} & \leq \dots & \leq f_3 \\ & \vdots & & & & & & \vdots & & \end{array}$$

Zřejmě: $H_j \in H$ je monotónní: $h^* = \lim_{j \rightarrow \infty} H_j$ a tedy $\int h^* = \lim_{j \rightarrow \infty} \int H_j$

Platí: $\left. \begin{array}{l} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} h_{nj} \leq H_j \leq f_j \\ \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f_n \leq h^* \leq f \\ f \leq h^* \leq f \end{array} \right\} \Rightarrow f = h^* \text{ (s.v.)}$

Integraci:

$$\begin{array}{l} \int h_{nj} \leq \int H_j \leq \int f_j \\ \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \int f_n \leq \int f \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \int f_j \\ \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \leq \int f \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \end{array} \quad \left(f = h^* \text{ s.v.} \right)$$



Definice Bud' $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

$f \in L$ (f je Lebesgueovsky integrovatelná) $\Leftrightarrow f^+, f^- \in L^+$
 a $(2) \int f \stackrel{\text{d.f.}}{=} \int f^+ - \int f^-$

Také $f \in M$ (f je Lebesgueovsky měřitelná) $\Leftrightarrow f^+, f^- \in M^+$

Prohlášení (důležitá) Lze definovat " $f \in L$ " také tak, že existují $f_1, f_2 \in L^+$: $f = f_1 - f_2$ s.v. a $\int f = \int f_1 - \int f_2$

Vrátíme, že definice nezávisí na rozkladu:

Máme: $f^+ - f^- = f = f_1 - f_2 \Rightarrow f^+ + f_2 = f_1 + f^-$ s.v. a $f^+, f^-, f_1, f_2 \in L^+$
 tedy:

$$\Downarrow \int f^+ + \int f_2 = \int f_1 + \int f^-$$

$$\int f^+ - \int f^- = \int f_1 - \int f_2$$

a oba rozklady dávají stejný výsledek.

Věta 3.5 (Struktura $f \in L$) Bud' $f, g \in L$. Pak

(i) L je vektorový prostor a $(2) \int$ je aditivní, tj.

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}: \alpha f + \beta g \in L \text{ a } \int \alpha f + \beta g = \alpha \int f + \beta \int g$$

(ii) • $f \geq g$ s.v. $\Rightarrow \int f \geq \int g$

• $f = g$ s.v. $\Rightarrow \int f = \int g$

(iii) Lebesgueův integrál je absolutně konvergent: $|f| \in L$

(iv) L je "svaz": $\max\{f, g\} \in L, \min\{f, g\} \in L$

(v) f je konečná s.v.

(Dě) [Ad (i)] Příklad z definice plyne: $\text{je-li } f \in L, \text{ pak } -f \in L$ } $\Rightarrow$
(ověřte!)

Také: $\text{je-li } \alpha > 0 \text{ a } f \in L, \text{ pak } \alpha f \in L.$

$\Rightarrow$ Odvodí se tedy:

$\text{je-li } \alpha < 0, \text{ pak } -\alpha > 0, \text{ pak } -\alpha f \in L$
a $\text{pak } -(-\alpha f) = \alpha f \in L.$

Tedy L je lineární prostor.

Aditivita (2): $f+g = f^+ - f^- + (g^+ - g^-) = (f+g)^+ - (f+g)^-,$
a $(f+g)^+ \in L^+ \text{ a } (f+g)^- \in L^+$

[Ad (ii)] Protože $f^+ - f^- \geq g^+ - g^-$ s.v.
tak $f^+ + g^- \geq f^- + g^+$ s.v. a $f^+ + g^- \in L^+$
 $f^- + g^+ \in L^+$

a tedy dle věty 3.3 (i):

$$\int f^+ + \int g^- = \int f^+ + g^- \geq \int f^- + g^+ = \int f^- + \int g^+$$

což implikuje

Věta 3.3 (v)

$$\int f^+ - f^- = \int f^+ - \int f^- \geq \int g^+ - \int g^- = \int g^+ - g^-$$

[Ad (iii)] plyne ze struktury, $|f| = f^+ + f^-$
a z definice. Důležitá je implikace:

$$f \in L \Rightarrow |f| \in L.$$

[Ad (iv)] $\max\{f, g\} = f + (g - f)^+$ (rozmyslel)

plyne ze vztahu

[Ad (v)] plyne z věty 3.3: f^+, f^- jsou
konečné at na mn. místy nula.

3.3 Věty o záměně integrálu a limity pro posloupnosti a řady funkcí a kritéria, kdy $\lim f_n \in L$

Věta 3.6 (Levi)

$$\text{Bud' } \left\{ \begin{array}{l} \cdot \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L \\ \cdot f_n \nearrow f \text{ s.v.} \\ \cdot (\exists k > 0) \forall n \int f_n \leq K \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Pak } \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \right) \int f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n$$

(Dě) Využijeme Větu 3.4. Definujeme $g_n = f_n + f_1^-$.

Potom $f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f$

tak $f_1 + f_1^- \leq f_2 + f_1^- \leq \dots \leq f + f_1^-$

Nakonec $f_1 + f_1^- = f_1^+ - f_1^- + f_1^- = f_1^+ \geq 0$.

Tedy $\underbrace{g_n \geq 0} \text{ a } \underbrace{g_n \nearrow f + f_1^-} \text{ a } \underbrace{(\forall n) \int g_n \leq 2K}$

Dle Věty 3.4:

$$\int \lim f_n + \int f_1^- = \int \lim_{n \rightarrow \infty} g_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n + \int f_1^-$$

a porovnáním podtržených výrazů dostáváme tvrzení.

Věta 3.7 (Levi pro řady)

$$\left. \begin{array}{l} \cdot \{f_i\}_{i=1}^{\infty} \subset L, f_i \geq 0 \\ \cdot (\exists K > 0) (\forall m) \int \sum_{i=1}^m f_i \leq K \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 1) F := \sum_{i=1}^{\infty} f_i \in L \\ 2) \int F = \sum_{i=1}^{\infty} \int f_i \end{array}$$

(Dě) Užijme Větu 3.6 na posloupnost číselných funkcí:

$$g_m := \sum_{i=1}^m f_i.$$

(zřejmě: $\cdot g_m \in L \quad \forall m \in \mathbb{N}$
 $\cdot g_m \nearrow F$

$\cdot (\exists K) (\forall m) \int g_m \leq K$

tedy $\int F = \lim \int g_m = \lim \sum_{i=1}^m \int f_i$

□

Věta 3.8 (O obrácení vypočtu: " $f=0$ s.v. $\Rightarrow \int f=0$ ")

Je-li $f \in L$, $f \geq 0$ a $\int f = 0$, pak $f = 0$ s.v.

(Dě) Definujme $F_k = kf$ ($F_k(x) = kf(x)$ $k \in \mathbb{N}$).
Zřejmě $F_k \geq 0$ s.v., měřitelná s.v. a $\forall k \in \mathbb{N} \int F_k = 0$
Tedy, dle Věty 3.4: $F_k \uparrow F$ a
$$\int F = \int \lim_{k \rightarrow \infty} F_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \int F_k = \lim_{k \rightarrow \infty} k \int f = 0$$

Tedy $F \in L$, $\int F = 0$ a F je konstanta s.v.

Uvažujme $M = \{x; f(x) > 0\}$. Pak $F(x) = \infty \quad \forall x \in M$.

Tedy M je množina míry nula. $\square$

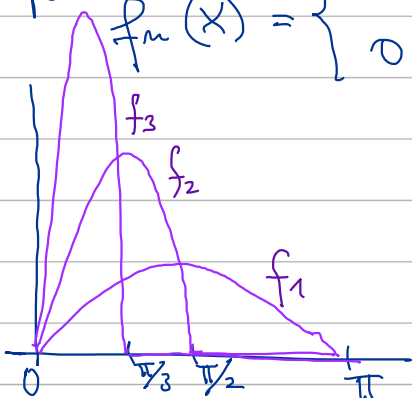
Věta 3.9 (Fatouovo lemma - kritérium garantující měřitost $\lim f_n$ do L)

nechť $\left\{ \begin{array}{l} \cdot \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L, \boxed{f_n \geq 0} \\ \cdot f_n \rightarrow f \text{ s.v.} \\ \cdot (\exists K)(\forall n \in \mathbb{N}) \int f_n \leq K \end{array} \right\}$ pak $\left\{ \begin{array}{l} \cdot f \in L \\ \cdot \int f \leq K. \end{array} \right.$

Pozorování Fatouovo lemma říká nic o záměně $\lim_{n \rightarrow \infty}$ a $\int$.

Záměna na předpokladech V.3.9. obecně NEPLATÍ. Uvažujme např.

$$f_n(x) = \begin{cases} n \sin nx & x \in (0, \frac{\pi}{n}) \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}, \text{ pak}$$



$$\begin{aligned} \cdot f_n(x) &\rightarrow 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \cdot \int f_n &= \int_0^{\frac{\pi}{n}} n \sin nx = \left[-\cos nx \right]_0^{\frac{\pi}{n}} = 2 \\ \cdot f &= 0, f \in L, \quad \underline{0 = \int f < \lim \int f_n = 2.} \end{aligned}$$

Dle Věty 3.5 Definujme $F_k = \inf \{f_k, f_{k+1}, \dots\} \nearrow f$. Pak dle
lemmatu máme platit: $F_k \in L$. Navíc $\forall k \in \mathbb{N}$: $\int F_k \leq K$

Dle Lemby věty 3.6: $\int f = \lim_{k \rightarrow \infty} \int F_k \leq K$ a $f \in L$,
což jsme chtěli ukázat. $\square$

Lemma (uzavření)

Pokud $\left\{ \begin{array}{l} f_k, g_k \in L, k \in \mathbb{N} \\ f_0, g_0 \in L \\ f_k \geq f_0, g_k \leq g_0 \\ (\forall k \in \mathbb{N}) \end{array} \right\}$ pak

$$F = \inf \{f_1, f_2, \dots\} \in L$$

$$G = \sup \{g_1, g_2, \dots\} \in L$$

Dle $G_k = \max \{g_1, \dots, g_k\} \in L, G_k \nearrow G \xRightarrow{\text{Lem}} G \in L$;

Protivě $\inf \{f_1, \dots\} = -\sup \{-f_1, -f_2, \dots\}$. $\square$

Věta 3.10 (Lebesgueova - o integrovatelné majorantě)

Pokud $\left\{ \begin{array}{l} \bullet \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L \\ \bullet f_n \rightarrow f \text{ s.v.} \\ \bullet (\exists g \in L) (\forall n \in \mathbb{N}) |f_n| \leq g \end{array} \right\}$ pak $\left\{ \begin{array}{l} \bullet f \in L \\ \bullet \int f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \end{array} \right.$

Dle Definujme $F_k = \inf_x \{f_k, f_{k+1}, \dots\} \nearrow f$ s.v.
 $G_k = \sup_x \{f_k, f_{k+1}, \dots\} \searrow f$ s.v.

Pak

$$-g \leq F_k \leq f_k \leq G_k \leq g$$

Integraci

$$-\int g \leq \int F_k \leq \int f_k \leq \int G_k \leq \int g$$

Provedeme $\lim_{k \rightarrow \infty}$ a tím, že $\{F_k\}$ a $\{G_k\}$ splňují předpoklady
Lemby věty 3.6. Tedy $(k \rightarrow \infty)$

$$\int f \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k \leq \int f,$$

což jsme chtěli ukázat. $\square$

Tvrzení (užitečné varianty Lebesgueovy věty)

- (1) Necht' platí (i) a (ii) z Věty 3.10 a $\exists g, h \in L: h \leq f_n \leq g$,
 pak platí tvrzení věty 10.11.
 (2) Necht' platí (i) a (ii) a $(\exists g \in L) |f_n| \leq g$. Pak $f \in L$.

Dě Ad(1) jednoduché (samé)

Ad(2) Definujme $\tilde{f}_n = \max \{ \min \{ f_n, g \}, -g \}$
 ořezáme f_n se zdola $-g$
 a se shora f_n g .

Pak $|\tilde{f}_n| \leq g$ a $\tilde{f}_n \rightarrow f$ s.v.

Dle Věty 3.10 dostáváme i.e. $f \in L$. $\square$

Příklady

(1) $f_n(x) = \chi_{[-n, n]} \operatorname{sgn} x$

Pak $\left. \begin{aligned} & f_n(x) \rightarrow \operatorname{sgn} x \\ & \int f_n = 0 \\ & f_n \in L \end{aligned} \right\}$

AVŠAK $f \notin L$

Stejně chováni
 vytrácejí oscilující $f_n(x) = \chi_{[-2\pi n, 2\pi n]} \sin x$

$f \in M$ ale
 $f^+ a f^- \notin L^+$

Pouančeni z příkladu (1):

(i) Dle Fatouovy lemmaty nelze vynechat předpoklad

$f_n \geq 0$.

(ii) Posloupnost $\{f_n\}$ nelze integrovatelnou majorantou.

(2) Koncentrace v bodě

$f_n = \begin{cases} n & \text{na } (-\frac{a}{n}, \frac{a}{n}) \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

Pak $f_n \rightarrow 0$ s.v.

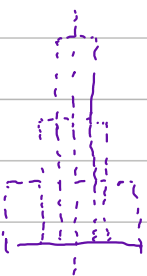
$(\forall n) \int f_n = 2a$

$\int \lim f_n = \lim \int f_n$

neboť

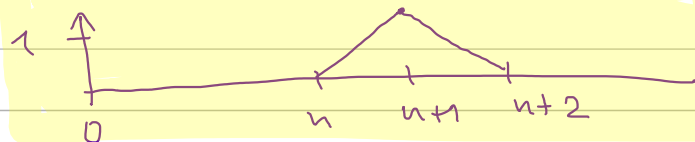
$0 = \int \lim f_n < \lim \int f_n = 2a$

Dle Fatouovy lemmaty $0 \in L$, což je fajm, ale
 zároveň neplatí: NEMÁM MAJORANTU ani MONOTONII



③ Únik hmoty do nekonečna

Bať f_n jako na obrázku:



$$\text{Pak } 0 \leq f_n \rightarrow 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \int f_n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$0 = \int \lim f_n < \lim \int f_n = 1$$

Obecnější komentář:

OSCILLACE, KONCENTRACE A ROZPTYL (DISPERSE)

V NEKONEČNÉM PROSTORU jsou zajímavé komplikované jevy, kdy je třeba dávat pozor na zachování vlastností. Dáleť přírodně jsou skokové NESPOJITOSTI (RÁZOVÉ VNITRY).
nechť λ $\rightarrow$ ∞ u integrálu

④ $f_n = -\frac{1}{n}$ a $f_n \geq 0$ v $\mathbb{R}$, ale NEPLATÍ $\lim \int f_n = \int \lim f_n$ neboť $f_n \notin L$.

⑤ Pomocí Leviho věty pro řady můžeme elegantně spočítat

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx$$

Platí:

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx = \int_0^{\infty} \frac{x e^{-x}}{1 - e^{-x}} dx = \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} x e^{-nx} dx \stackrel{\text{Levi}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} x e^{-nx} dx$$

$$\stackrel{\text{Levi}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{x e^{-nx}}{n} - \frac{e^{-nx}}{n^2} \right]_0^{\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Použití Leviho věty plyne z porovnání:

$$\int \sum_{n=1}^k x e^{-nx} \leq \sum_{n=1}^k \int_0^{\infty} x e^{-nx} = \sum_{n=1}^k \frac{1}{n^2} < \infty.$$