$\boxed{7.1}$ Abstraktní Fourierovy řady

$\boxed{7.1.1}$ úplné ortonormální systémy, separabilita

$\boxed{\text{Def}}$ Buď H s $(\cdot,\cdot)_H$ a s $\|\cdot\|_H := \sqrt{(\cdot,\cdot)_H}$ Hilbertův (tzn. úplný lineární prostor se skalárním součinem).
Řekneme, že systém $\{\phi_\alpha\}_{\alpha\in I}$, kde I je množina indexů a kde $\phi_\alpha \in H$ $(\forall \alpha)$, je

<u>ortogonální</u> $\equiv$ $(\phi_\alpha, \phi_\beta) = 0$ pro $(\forall \alpha,\beta)(\alpha \neq \beta)$.

<u>ortonormální</u> $\equiv$ „$\{\phi_\alpha\}_{\alpha\in I}$" je ortogonální a $(\phi_\alpha,\phi_\alpha)_H = 1$

<u>úplný</u> $\equiv$ pokud $(\phi, \phi_\alpha) = 0$ pro $\forall \alpha \in I$,
pak $\phi = 0$.

$\boxed{\text{Def}}$ Řekneme, že Hilbertův či Banachův prostor je
<u>separabilní</u> $\equiv$ $\exists$ hustý spočetný systém v H.
(tzn. $(\exists \{\phi_n\}_{n=1}^{\infty})(\forall \varepsilon>0)(\forall \phi \in H)(\exists \phi_n)$
$\|\phi_n - \phi\|_H < \varepsilon$)

Ukážeme (viz věta ...), že platí:
Má-li H úplný <u>spočetný</u> ortonormální systém, pak je <u>H separabilní</u> (tzn. lze vygenerovat hustou spoč. část)

$\boxed{\text{Několik příkladů}}$

(1) Prostor $l_2 := \{ \{x_i\}_{i=1}^{\infty} ; \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty \}$ je separabilní Hilbertův prostor (nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$) neboť $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde

$$\phi_n = (0,0,\dots,\underset{\substack{\uparrow\\ n\text{-tá pozice}}}{1},0,\dots,0,\dots),$$

tvoří <u>úplný</u> <u>ortonormální</u> systém.

Skal. součin je dán vztahem:

$$x,y \in l_2 \Rightarrow (x,y)_{l_2} := \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$$

Ověřte!

(2) Prostor $X := \{ f : \langle 0,1 \rangle \to \mathbb{R};\ f$ je nenulová jen v konečně bodech $\}$

s

$$(f,g)_X := \sum_{x \in \langle 0,1 \rangle} f(x) g(x)$$ je lineární prostor

se skalárním součinem a úplným ortonormálním systémem $\{\phi_\xi\}_{\xi \in \langle 0,1 \rangle}$, kde ϕ_ξ je definováno vztahem

$$\phi_\xi(x) = \begin{cases} 0 & x \neq \xi \\ 1 & x = \xi \end{cases}.$$ Ukažte!

Tedy, X je příkladem Hilbertova prostoru, který není separabilní (neboť úplný ortonormální systém je indexován $\xi \in \langle 0,1 \rangle$, což je nespočetná množina).

$\boxed{7.1.2}$ Věta o nejlepší aproximaci

Nyní si položme následující úlohu: Buď $f \in L^2(I)$, $|I| = \ell$, $I \subseteq \mathbb{R}$. Najděme ~~xxx~~ takovou lineární kombinaci prvních N prvků úplného ortonormálního systému $\{ e^{i m \frac{2\pi}{\ell} t} \}_{m \in \mathbb{Z}}$ či $\{ 1, \cos \frac{2\pi m}{\ell} x, \sin \frac{2\pi}{\ell} m x \}_{m \in \mathbb{N}}$, která nejlépe aproximuje f.

Či obecněji: Buď H separabilní Hilbertův, $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ úplný ortonormální systém a $f \in H$. Označme $t_m = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \phi_k$, $\alpha_k \in \mathbb{C}$ libovolné. Pak

$\| f - t_m \|_H$ měří „jak dobře t_m aproximuje f"

Otázka nejlepší aproximace je ~~A~~ úlohou pro nalezení $\{\alpha_k\}_{k=1}^{m}$, které „minimalizují" $\| f - t_m \|_H$: (*)

ZKUSTE SAMI MINIMALIZOVAT $\|f - t_m\|_H^2$ přes $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$.

Místo přesení minimalizační úlohy, uvažme $f = \sum_{k=1}^{m} c_k \phi_k$. Pak hledaná α_k jsou ta, pro která platí $\alpha_k = c_k$, $k = 1, \dots, m$. Jak můžeme c_k vybrat/identifikovat?
$$(f, \phi_\ell)_H = \Big(\sum_{k=1}^{m} c_k \phi_k, \phi_\ell \Big) = c_\ell.$$
Snadno, z ortonormálnosti:

Tato pozorování zformulujeme do následujícího tvrzení.

Věta 7.1 Buď H Hilbertův s ortonormálním systémem $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$. Pro libovolnou $f \in H$ položme $t_n = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \phi_k$ a $s_m = \sum_{k=1}^{m} c_k \phi_k$, kde $\alpha_k \in \mathbb{C}$ a $c_k := (f, \phi_k)$.

Pak

1) $\|f - s_m\|_H \leq \|f - t_m\|_H$

2) Rovnost nastává právě když $\alpha_k = c_k$ pro $\forall k \in \{1, \dots, m\}$

Dk Platí:

$$
(*)\quad
\begin{aligned}
\|f - t_m\|_H^2 &= (f - t_m, f - t_m)_H \\
&= \|f\|_H^2 - (t_m, f)_H - (f, t_m)_H + (t_m, t_m)_H + \sum_{k=1}^{m} |c_k|^2 - \sum_{k=1}^{m} |c_k|^2 \\
&= \|f\|_H^2 - \sum_{k=1}^{m} |c_k|^2 + \underbrace{\sum_{k=1}^{m} |c_k|^2 - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \bar{c}_k - \sum_{k=1}^{m} c_k \bar{\alpha}_k + \sum_{k=1}^{m} |\alpha_k|^2} \\
&= \underbrace{\|f\|_H^2 - \sum_{k=1}^{m} |c_k|^2} + \sum_{k=1}^{m} |c_k - \alpha_k|^2 \\
&= \|f - s_m\|_H^2 + \sum_{k=1}^{m} |c_k - \alpha_k|^2 .
\end{aligned}
$$

Při výpočtu jsme využili ortonormality systému $\{\phi_k\}_{k=1}^{m}$ pro $m \in \mathbb{N}$ libovolné. Vztah $(*)$ implikuje jak 1) tak 2). ∎

DEFINICE Píšeme-li $f \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k$, pak $c_k := (f, \phi_k)$ a $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k$ se nazývá abstraktní Fourierova řada prvku $f \in H$ vzhledem k ortonormálnímu systému $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$. Koeficienty c_k se nazývají Fourierovy koeficienty

<u>Příklad</u> Buď $H = L^2((0,2\pi))$, $(f,g)_{L^2((0,2\pi))} := \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx$ a $\{\phi^n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\right\}_{n=1}^{\infty}$. (Již víme, že $\{\phi^n\}$ je ortonormální systém v $L^2((0,2\pi))$.) Pak pro $f \in L^2((0,2\pi))$ dle předchozí definice máme

$$f \sim \frac{\tilde{a}_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{a}_k \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{b}_k \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}},$$

kde

$$\tilde{a}_0 = \int_0^{2\pi} f(t)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,dt, \quad \tilde{a}_k = \int_0^{2\pi} f(t)\frac{\cos kt}{\sqrt{\pi}}\,dt, \quad \tilde{b}_k = \int_0^{2\pi} f(t)\frac{\sin kt}{\sqrt{\pi}}\,dt \quad (k \in \mathbb{N})$$

NEBO ČASTĚJI (přeuspořádání násobků):

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx,$$

kde

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos kt\,dt \quad (k = 0, 1, \dots)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin kt\,dt \quad (\;\text{—}\,||\,\text{—}\;).$$

Tento zápis Fourierovy řady f má tu výhodu, že vzoreček pro a_0 a a_k s $k \in \mathbb{N}$ je „stejný". Abych měl jeden vzoreček pro a_k, $k = 0, 1, 2, \dots$, tak jsem musel první koeficient v Four. řadě dělit 2.

$\boxed{7.1.3}$ Vlastnosti Fourierových koeficientů

$\boxed{\text{Věta}}$ 7.2 (Besselova nerovnost a Parsevalova rovnost)

Buď $(H, (\cdot,\cdot)_H)$ Hilbertův s ortonormálním systémem $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$.
Buď $f \in H$ a $f \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k$. Potom platí:

Besselova nerovnost

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 < \infty$ a platí $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|f\|_H^2$

Parsevalova rovnost

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \|f\|_H^2 \iff \lim_{n\to\infty} \|f - s_n\|_H = 0$, kde $s_n := \sum_{k=1}^{n} c_k \phi_k$

Dk $\boxed{\text{Ad (i)}}$ Plyne z ortonormality $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$ a z identity

$$\boxed{0 \leq \|f - s_n\|_H^2 = \|f\|_H^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2}$$

neboť odtud dostáváme, pro $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \leq \|f\|_H^2$, což implikuje obě tvrzení v (i)

$\boxed{\text{Ad (ii)}}$ Identita v rámečku, tj. $\|f - s_n\|_H^2 = \|f\|_H^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2$ dává ekvivalenci. ▨

Důsledek Z (i) a z teorie číselných řad plyne, že $c_k \to 0$ $(k \to \infty)$
Volíme-li speciálně $\{\phi_l\}_{l=1}^{\infty} = \{e^{ilx}\}_{l=1}^{\infty}$, tak pro $f \in L^2((0,2\pi))$

$$c_n = \int_0^{2\pi} f(t) e^{int}\, dt \underset{n\to\infty}{\to} 0 \quad \text{neboli} \quad \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt\, dt \underset{n\to\infty}{\to} 0$$
$$\text{a} \quad \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt\, dt \underset{n\to\infty}{\to} 0,$$

což je speciální případ tzv. Riemann-Lebesgueova lemmatu, které budeme mít později.

Pozorování Parsevalovu rovnost lze psát také ve tvaru

$$\|f\|_H^2 = \|\mathbf{c}\|_{l^2}^2 \quad \text{kde } \mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3, \dots, c_k, \dots) \in l_2,$$

což indikuje, že každý (separabilní) Hilbertův prostor H bude možné ztotožnit s prostorem l_2. V tomto smyslu je $L^2((0,2\pi))$ totéž co l_2. Viz Věta 7.6 dále.

Věta 7.3 (Obrácení věty 7.2 – Riesz-Fischerova věta #2)*)

Buď $(H, (\cdot,\cdot))$ Hilbertův s ortonormálním systémem $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$. Nechť $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in l_2$ (tj. $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 < \infty$). Pak $\exists f \in H$ tak, že

(i) $c_k = (f, \phi_k)$

(ii) $\|f\|_H^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$

Dk. Chceme ukázat, že $\forall c \in l_2$ $\exists f \in H$ tak, že $c_k = (f, \phi_k)$ a platí $\|f - s_n\|_H^2 \to 0$ kde $s_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \phi_k$

Avšak

- $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je pro $s_n := \sum_{k=1}^{n} c_k \phi_k$ cauchyovská neboť pro libovolně malé $\varepsilon > 0$ existuje dostatečně velké n tak, (že pro) libovolné $p \in \mathbb{N}$ je
$$\|s_{n+p} - s_n\|_H^2 = \Big\|\sum_{k=n+1}^{n+p} c_k \phi_k\Big\|_H^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} |c_k|^2 < \varepsilon$$

Protože H je úplný, tak $\exists f \in H$ tak, že $s_n \to f$ v H, což je část tvrzení, kterou jsme chtěli ukázat. Zbývá ověřit, že
$$c_k = (f, \phi_k).$$
Avšak
$$|c_k - (f, \phi_k)| = |(s_n, \phi_k) - (f, \phi_k)| \leq |(s_n - f, \phi_k)|$$
$$\underset{\text{Cauchy-Schwarz-Buňakovski}}{\leq} \|s_n - f\|_H \|\phi_k\|_H \underset{\text{ortonormalita } \phi_k}{=} \|s_n - f\|_H \to 0 \text{ pro } n \to \infty.$$

Tedy $c_k = (f, \phi_k)$. $\boxed{\text{K}}$

---

*) Úplnost Hilbertova prostoru je pro platnost tvrzení podstatná. Riesz-Fischerova věta #1 nám říká, že prostor $L^2(\Omega)$ je úplný. (V poznámkách také najdete, že $L^2(\Omega)$ je separabilní) Tedy dle Věty 7.3 a Věty 7.2 existuje úzká souvislost mezi separabilními Hilbertovými prostory a prostorem l_2.

$\boxed{\text{Věta}}$ 7.4 (Charakterizace úplnosti $\{\phi_m\}_{m=1}^{\infty}$)

Buď $(H, (\cdot,\cdot)_H)$ Hilbertův s ortonormálním systémem $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$. Následující podmínky jsou ekvivalentní:

(i) $\{\phi_m\}_{m=1}^{\infty}$ je úplný

(ii) $(\forall f \in H)$ $\|f - s_m\|_H \to 0$ $\left(\text{kde } s_m := \sum_{k=1}^{m} c_k \phi_k = \sum_{k=1}^{m} (f, \phi_k)_H \phi_k \right)$

(iii) $(\forall f \in H)$ $\|f\|_H^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$

(iv) $\operatorname{span}\{\phi_1, \dots, \phi_m\}$ pro $m \in \mathbb{N}$ libovolné je hustý v H.

Dk $\boxed{(i) \Rightarrow (ii)}$ $f \in H$ dáno (libovolné, ale pevné). Pak pro $s_m = \sum_{k=1}^{m} c_k \phi_k$, kde $c_k := (f, \phi_k)$ dle Věty 7.2(i) platí, že $\sum |c_k|^2 < \infty$ a tedy $\{s_m\}_{m=1}^{\infty}$ je cauchyovská. Existuje tedy $z \in H$ tak, že $s_m \to z$ v H. Navíc

$$(z, \phi_k) = \lim_{m\to\infty} (s_m, \phi_k) = c_k = (f, \phi_k) \quad \text{pro } \forall k \in \mathbb{N}.$$

Tedy $(z - f, \phi_k) = 0$ $(\forall k \in \mathbb{N})$ a z předpokladu úplnosti $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$ plyne $z - f = 0 \Leftrightarrow z = f$. Tedy $\|s_m - f\|_H \to 0$.

$\boxed{(ii) \Longleftrightarrow (iii)}$ plyne z Věty 7.2 (ii).

$\boxed{(ii) \Rightarrow (iv)}$ plyne z definice "hustý" a (ii)

$\boxed{(iv) \Rightarrow (i)}$ Předpokládáme, že $z \in H$ splňuje $(z, \phi_k) = 0$ a chceme ukázat, že $z = 0$. Dle předpokladu existuje $\{t_m\}_{m=1}^{\infty}$ tak, že $t_m \in \operatorname{span}\{\phi_1, \dots, \phi_m\}$ a

$$t_m \to z \text{ v } H.$$

Pak však

$$\|z\|_H^2 = (z, z) = \left(\lim_{n\to\infty} t_m, z\right) = \lim_{n\to\infty} (t_m, z) = 0$$

dle předpokladu (neboť $(z, \phi_k) = 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$.)

$\blacksquare$

Implikace $\boxed{(i) \Rightarrow (iv)}$ předchozí věty dává tvrzení cenné zaznamenání.

$\boxed{\text{Důsledek Věty 7.4}}$ Každý Hilbertův prostor, ve kterém existuje úplný ortonormální systém, je separabilní.

Platí obrácené tvrzení:

$\boxed{\text{Věta}}$ 7.5 V každém separabilním Hilbertově prostoru H existuje úplný ortonormální systém.

Dk Je založen na dvou krocích

krok 1) Uvažme hustou spočetnou část, která dle separability prostoru H existuje, a označme ji $\{\psi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$.

krok 2) Provedeme Gramm-Schmidtův ortonormalizační proces s mezifází, kdy do procesu přidáme jen ta ψ_k, která budou lineárně nezávislá na již nalezených $\{\phi_1, \dots, \phi_k\}$.

Přesněji: • vezmi ψ_1 a definuj $\phi_1 = \frac{\psi_1}{\|\psi_1\|_H}$

• Podívej se, zda ψ_2 je LN s ϕ_1. Pokud ne, podívej se, zda ψ_3 je LN s ϕ_1 (a ψ_2 zahoď),

Pokud ano, hledej ϕ_2 ve tvaru $\phi_2 = \psi_2 - \alpha\phi_1$, kde α urči tak, aby

$$(\phi_2, \phi_1)_H = 0 \quad \text{a} \quad \|\phi_2\|_H = 1,$$

což dává

$$\phi_2 = \frac{\psi_2 - (\psi_2, \phi_1)_H \phi_1}{\|\psi_2 - (\psi_2, \phi_1)\phi_1\|_H}$$

• ...

viz podrobněji Černý, Pokorný - MAF IV. ▨

$\boxed{\text{Věta}}$ 7.6 Každý separabilní Hilbertův prostor $\overbrace{}^{(H,(\cdot,\cdot)_H)}$ je isometrický s prostorem l_2.

Připomeň Dva metrické prostory jsou isometrické, pokud existuje isometrie, zobrazující prostory na sebe (isometrie je zobrazení jednoho prostoru na druhý zachovávající metriku)

V našem případě Hilbertových prostorů je metrika daná normou (generovanou skalárním součinem).

Hledáme tedy zobrazení mezi H a l_2. Avšak H je separabilní a dle Věty 7.5 v něm existuje úplný ortonormální systém $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$. Uvažme zobrazení $I : H \to l_2$.

$$
\begin{array}{ccl}
I : H & \to & l_2 \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
f & \longmapsto & \mathbf{c} = (c_1, \dots, c_k, \dots) \\
 & & c_k := (f, \phi_k)
\end{array}
$$

a dle Věty 7.4, (i)⇔(iii):

$$\|f\|_H^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \|\mathbf{c}\|_{l_2}^2 \underset{*}{=} \|If\|_{l_2}^2,$$

což jsme chtěli ukázat. $\square$

7.1.4 Uzavřené podprostory Hilbertova prostoru. Projekce.

Připomeňme si situaci z kapitoly 7.1.1. Pro $f \in H$, kde H je nekonečně-dimensionální Hilbertův prostor s ortonormálním systémem $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$, jsme hledali $s_m := \sum_{k=1}^{m} c_k \phi_k$ tak, že $\|f - s_m\|_H \le \|f - t_m\|_H$ kde $t_m = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \phi_k$.
Zjistili jsme, že $c_k = (f, \phi_k)$ je nejlepší volba.

Označme nyní $H_m := \operatorname{span}\{\phi_1, \dots, \phi_m\}$. Pak $\boxed{\dim H_m = m < +\infty}$

Definujme neboli $P : H \to H_m$ předpisem $P(f) = s_m$,

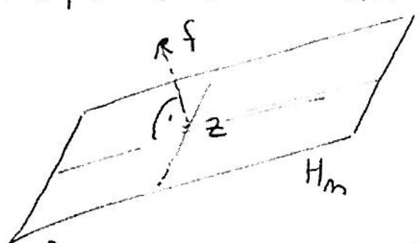
$$f \longmapsto s_m^f := \sum_{k=1}^{m} (f, \phi_k)_H \phi_k$$

Zobrazení P se nazývá projekce. Není těžké nahlédnout (ověřte si sami), že P má tyto vlastnosti:

(1) $P(H) = H_m$

(2) $P^2 = P$ (této vlastnosti se říká IDEMPOTENCE)

(3) $z = P(f) \iff z \in H_m$ a $(f - z, y) = 0 \ \forall y \in H_m$



ORTOGONALITA

(4) $\|f\|_H^2 = \|f - P(f)\|_H^2 + \|P(f)\|_H^2$ (Pythagorova věta)

Také potvrdíme, že H_m má tyto vlastnosti (OPĚT OVĚŘTE!):

H_m je PODPROSTOR:
(i) $H_m \subset H$
(ii) $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $f, g \in H_m \Rightarrow \alpha f + \beta g \in H_m$

H_m je UZAVŘENÝ:
(iii) $f^m \in H_m$ a $f^m \to f$ v $H \Rightarrow f \in H_m$

Nyní si ukážeme, že existují podprostory nekonečné dimenze (některé uzavřené jiné nejsou naopak uzavřené), a pokud jsou uzavřené pak existují jednoznačně definované projekce, které splňují výše uvedené vlastnosti (1)-(4).

Def. (uzavřeného podprostoru) Řekneme, že M je uzavřený podprostor v H $\equiv$ $\begin{cases} (\alpha)\ M \subset H \\ (\beta)\ (\forall \alpha,\beta \in \mathbb{C})(\forall u,v \in M)(\alpha u + \beta v \in M) \end{cases}$ LINEARITA

UZAVŘENOST $\{\ (\gamma)\ \{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$ a $u_n \to u$ v $H \Rightarrow u \in M$

$\boxed{M \subset\subset H}$ symbolicky

Příklad (uzavřeného podprostoru nekonečné dimenze). Buď $H = L^2(\Omega)$. Definujme $M := \{u \in L^2(\Omega);\ \int_\Omega u\,dx = 0\}$. Předpokládejme, že $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ omezená, otevřená.

Ověřte si, že takto definované M je lineární prostor (splňuje (α) a (β)). Navíc $M \subsetneq H$ (neboť existují L^2-integrovatelné funkce s nenulovým průměrem) a $\dim M = \infty$ (neboť podmínka na nulový průměr je podmínka jisté normalizace. Lze si tedy představit, že k úplnému spočetnému systému $\{\psi_l\}_{l=1}^{\infty} \subset L^2(\Omega)$ lze sestrojit systém $\{\tilde\psi_l\}_{l=1}^{\infty} \subset M$ a to tak, že

$$\tilde\psi_l := \psi_l - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \psi_l . \quad \left(\Rightarrow \int_\Omega \tilde\psi_l = 0\right)$$

Zbývá ověřit uzavřenost. Pokud $\{u^n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$ a $u^n \to u$ v $L^2(\Omega)$ pak $u \in L^2(\Omega)$ a $\int u(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int u^n(x)\,dx = 0$

neboť
$$\left|\int_\Omega u\,dx\right| = \left|\int_\Omega (u^n - u)\,dx\right| \le \int |u^n - u|\,dx \le \|u^n - u\|_2\, |\Omega|^{1/2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$
Hölder

Příklad (ukazující, že existují podprostory ∞-dimenze, které nejsou uzavřené.)

Definujme
$$M := \{\mathbf{c} \in l_2;\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tak, že } c_n = 0 \text{ pro každé } n > n_0\}.$$
Pak M je lineární podprostor v l_2, ale není uzavřený neboť

$\mathbf{c}_1 := \{1, 0, 0, \dots\} \in M$

$\mathbf{c}_2 := \{1, \frac{1}{2}, \dots\} \in M$

$\vdots$

$\mathbf{c}_n := \{1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots\} \in M$

, ale $\lim_{n\to\infty} \mathbf{c}_n = \underbrace{\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots\right)}_{= \mathbf{c}} \in l_2 \setminus M$

tedy $\mathbf{c}_n \to \mathbf{c}$ v l_2

ale $\mathbf{c} \notin M$.

$\boxed{\text{Věta 7.7}}$ (O ortogonální projekci H na uzavřený podprostor)

Buď H Hilbertův a $M \subset\subset H$ uzavřený podprostor. Potom

$$(\forall f \in H)(\exists!\, f_M \in M)\ \|f - f_M\|_H = \inf_{z \in M} \|f - z\|_H .$$

Navíc, zobrazení $P : H \to M$ definované předpisem $P(f) = f_M$ splňuje:

(1) $P(H) = M$

(2) $P^2 = P$

(3) $z = P(f) \iff z \in M$ a $(f - z, y) = 0$ pro $\forall y \in M$

(4) $\|f\|_H^2 = \|f - P(f)\|_H^2 + \|P(f)\|_H^2 \quad (\forall f \in H)$.

Dk $\boxed{\text{[1] Konstrukce (existence) } f_M}$ Buď $\delta = \inf_{z \in M} \|f - z\|_H$ pro dané (libovolné) $f \in H$. Z definice infima plyne existence $\{z_n\}_{n=1}^\infty \subset M$ tak, že $\|f - z_n\|_H \to \delta$ $(n \to \infty)$.

Protože $\|z_n - z_m\|_H = \|z_n - f + f - z_m\|_H \le \varepsilon$, neboť $\{f - z_n\}_{n=1}^\infty$ je cauch. tak existuje $z^* \in H$ tak, že $z_n \to z^*$ v H, ale M je uzavřený tak, že $z^* \in M$. Navíc $\|f - z_m\|_H \to \|f - z^*\|_H$. Tedy $\|f - z^*\|_H = \delta$

Hledané $\boxed{f_M = z^*.}$ a $P : f \mapsto f_M$.

$\boxed{\text{[2] VLAstnosti (1)–(4)}}$ Vlastnosti (1), (2) rozmyslete sami.

Ověříme (3) $\boxed{\Rightarrow}$ Je-li $z = P(f)$, pak určitě $z \in M$. Navíc pro $y \in M$ libovolné a $\alpha \in \mathbb{R}$ libovolné definujme

$$\phi(\alpha) := \|f - (z + \alpha y)\|_H^2 .$$ Víme, že ϕ nabývá v $\alpha = 0$ minima. Protože

$$\phi(\alpha) = \|f - z\|_H^2 + 2\alpha (f - z, y) + \alpha^2 \|y\|_H ,$$

tak podmínka $\phi'(\alpha) = 0$ implikuje $(f - z, y) = 0$, což jsme chtěli ověřit

$\boxed{\Leftarrow}$ Naopak, buď $z \in M$ takové, že $(f - z, y) = 0$ $\forall y \in M$.

Buď $\tilde{y} \in M$ libovolné. Pak

$$\|f - \tilde{y}\|_H^2 = \|f - z + z - \tilde{y}\|_H^2 = \|f - z\|_H^2 + \|z - \tilde{y}\|_H^2 \ge \|f - z\|_H^2$$

tedy $z = f_M = P(f)$.

$\boxed{\text{[3] Jednoznačnost}}$ Nechť existují $f \in H$ tak, že f_M^1 a f_M^2 minimalizují vzdálenost a $f_M^1 \neq f_M^2$. ($\|f - f_M^1\|_H = \|f - f_M^2\|_H$)

Pak $\left.\begin{aligned}(f - f_M^1, y) &= 0 \quad \forall y \in M \\ (f - f_M^2, y) &= 0 \quad \forall y \in M\end{aligned}\right\}$ a tedy $(f_M^1 - f_M^2, y) = 0$ $\forall y \in M$

Volbou $y = f_M^1 - f_M^2$, dostáváme $\|f_M^1 - f_M^2\|_H^2 = 0$

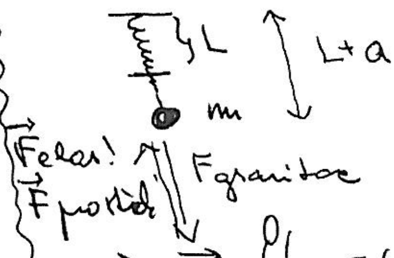
což je ↯ s $f_M^1 \neq f_M^2$.

$\boxed{7.1.5.}$ Fourierovy řady a analýza periodických vibrací *)

V této kapitole se pokusíme odpovědět na otázku proč jsou Fourierovy řady tak důležité v mnoha odvětvích jako jsou např. vedení tepla, vibrace tyčí, membrán a mechanických systémů, elektrické obvody atd. Důvodem je, že základním matematickým modelem ve všech těchto situacích (nejprve redukovaný, přesto podstatný) je rovnice ve tvaru

(R) $$y'' + \alpha y' + k^2 y = p(t).$$

APŘ. [V mechanice (R) popisuje kmitající pružinu s $m = 1$ či $k^2 = \frac{E}{m}$, $\alpha = \frac{b}{m} > 0$



$$m\vec{a} = \vec{F} = \left(mg - E(y+a) - b\frac{dy}{dt} + mp(t) \right)$$

$\vec{F}_{extern.}$ (vnější oscilace)

Rce (R) je • lineární a • materiálové vlastnosti (α, k) se nemění s časem

Za těchto dvou podmínek lze využít Fourierovy řady (Fourierovu analýzu).

$p(t)$ ... vstup $\qquad y(t)$ ... řešení (výstup)

Dvě základní vlastnosti (R) lze v reálné situaci testovat následujícím experimentem: Uvažujme p ve tvaru

$$p(t) = A \sin \omega t \quad \text{nebo} \quad p(t) = Ae^{i\omega t}$$

(jak ODR (R) čistě hledá dva pohledy: reálná část + imag. č.)

Hledejme řešení ve tvaru $y(t) = Be^{i\omega t}$.

Po dosazení $B(k^2 - \omega^2 + i\alpha\omega) = A$, což implikuje

$$B = A\frac{(k^2-\omega^2) - i\alpha\omega}{(k^2-\omega^2)^2 + \alpha^2\omega^2} = ACe^{-i\phi} \quad \text{(zápis v polárním tvaru)}$$

kde $$C = \frac{1}{\sqrt{(k^2-\omega^2)^2 + \alpha^2\omega^2}} \quad \text{a} \quad \operatorname{tg} \phi = \frac{\alpha\omega}{k^2-\omega^2}.$$

---

*) dle knihy: „Cornelius Lanczos: Discourse on Fourier series"

Tedy v uvažovaném případě:

(K) $\boxed{\text{VSTUP } p(t) = A \sin \omega t \quad \text{vyplívyje VÝSTUP } y(t) = AC \sin(\omega t - \phi)}$

Potovrujeme, že „výstup k sinusoidálnímu vstupu je opět sinusoidální se stejnou frekvencí, ale modifikovanou amplitudou a modifikovanou fází."

Skutečnost, že frekvence zůstane stejná plyne z linearity a koeficienty α a k v (R) konstantní. Pokud jedna z těchto podmínek neplatí, neplatí ani vztah (K).

Nabízí se otázka: Je vlastnost (K) rovnice (R) důležitá?

Nyní přichází význam Fourierova objevu:

Uvažujme $p = p(t)$ na intervalu $(0, T)$. Pak „Fourierova teorie" říká, že

$$p(t) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \dots$$
$$+ b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + \dots$$

kde $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Tedy stačí znát výstupy pro speciální vstupní funkce $e^{ik\omega t}$.

Samozřejmě je však třeba znát $a_0, a_1, a_2, \dots$
$b_1, b_2, \dots$)

což Fourier udělal:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T p(t) \cos k\omega t \, dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T p(t) \sin k\omega t \, dt.$$