3 Lebesgueův integrál

Cílem této kapitoly je vybudovat integrál pro funkce více proměnných. Mohli bychom budovat vícenásobný Riemannův integrál, což se často dělá. Riemannův integrál však má závažné nedostatky:

- Prostor $\mathcal{R}(\langle a,b\rangle) := \{ f : (a,b) \to \mathbb{R} ;\ (R)\int_a^b |f(x)|\,dx < \infty \}$ <u>není</u> úplný metrický prostor. Např. Aproximujme Dirichletovu funkci posloupností, která je rovna 1 jen v konečně mnoha racionálních bodech.

- Limitní přechody

(1) $$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

či záměny operací

(2) $$\frac{d}{dt}\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f'(t)\,dt$$

lze ospravedlnit jen za velmi silných předpokladů.

My budeme budovat jiný integrál, tzv. Lebesgueův, který má tu vlastnost, že prostory

$$L^p(\Omega) = \{ u : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} ;\ \int_\Omega |u(x)|^p dx < +\infty \} \quad \text{s} \quad \|\cdot\|_p := \left(\int_\Omega |\cdot|^p dx\right)^{1/p}$$

jsou úplné normované (tedy Banachovy) prostory pro $p \in \langle 1, \infty)$. Speciálně, pro $p=2$, dostaneme $L^2(\Omega)$, což je Hilbertův prostor se skalárním součinem $(f,g) = \int_\Omega f(x)g(x)\,dx$.

Navíc si Lebesgueův integrál klade za cíl nalézt minimální požadavky, kdy (1) či (2) platí.

Lebesgueův integrál je konstruován ideově jinak než Riemannův integrál. Z pohledu aproximací oboru integrálů máme:

$$(R) \int_a^b f(x)\,dx \simeq \sum f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$(L) \int_a^b f(x) \simeq \sum c_i \mu(M_i) \quad \text{kde}$$

$$M_i := \{x \in \langle a,b \rangle ;\ f(x) \in \langle c_i, c_{i+1})\}$$

3.1 Prostor schodovitých funkcí a množiny míry nula

Definice (intervalu v $\mathbb{R}^d$) Jsou-li $-\infty < a_i < b_i < +\infty$, $i = 1, 2, \dots, d$, pak

$I := (a_1, b_1\rangle \times (a_2, b_2\rangle \times \dots \times (a_d, b_d\rangle$ nazveme interval,

$I^0 := (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \dots \times (a_d, b_d)$ je otevřený interval

$\overline{I} := \langle a_1, b_1\rangle \times \langle a_2, b_2\rangle \times \dots \times \langle a_d, b_d\rangle$ je uzavřený interval

$S := (a_1, b_1\rangle \times \dots \times (a_{i-1}, b_{i-1}\rangle \times \{b_i\} \times \dots \times (a_d, b_d\rangle$ stěna I

Definujeme objem intervalu I resp. I^0 resp. $\overline{I}$ vztahem

$$V(I) := \prod_{i=1}^{d} (b_i - a_i)$$

Dělením I nazveme systém navzájem disjunktních intervalů, jejichž sjednocení je celé I a množiny krajních bodů v i-té složce tvoří dělení intervalu $(a_i, b_i\rangle$.

Def. (množiny míry nula). Řekneme, že $E \subset \mathbb{R}^d$ je množina míry nula pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje spočetné pokrytí intervaly I_k, $k = 1, \dots, \infty$, tak, že

$$\sum_{k=1}^{\infty} V(I_k) < \varepsilon.$$

<u>Příklad</u> Buď $Q \subseteq \mathbb{R}$ libovolná spočetná množina, pak Q je množina míry nula. Speciálně racionální čísla $\mathbb{Q}$ je množina míry nula.

Dk Buď $Q = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$. Pak $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_{\frac{\varepsilon}{2^n}}(x_n) \supset Q$,

a tedy $Q \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_{(x_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, x_n + \frac{\varepsilon}{2^n})}$

a $\sum_{n=1}^{\infty} V\left(I_{(x_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, x_n + \frac{\varepsilon}{2^n})}\right) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} < \varepsilon$ ⊠

<u>Tvrzení</u> Spočetné sjednocení množin míry nula je množina míry nula.

Dk Sami.

<u>Příklad</u> Cantorovo diskontinuum je nespočetná množina míry nula.

<u>Řešení</u> Cantorovo diskontinuum získáme z $\langle 0,1 \rangle$ tak, že $\langle 0,1 \rangle$ rozdělíme na třetiny a vynecháme prostřední třetinu $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ a ve zbylých třetinách tento postup opakujeme. Platí

$$x \in C \iff x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \text{ kde } a_n = 0 \text{ nebo } 2.$$

$\boxed{C \text{ je nespočetná}}$ Kdyby C byla spočetná, pak

$C = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 0.a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} \\ x_2 = 0.a_{21}a_{22}\ldots a_{2n} \\ \vdots \\ x_n = 0.a_{n1}a_{n2}\ldots a_{nn} \\ \vdots \end{array}\right\} a_{ij} \in \{0,2\}$$

Definujeme-li

$x = 0.a_1a_2\ldots$ předpisem $a_i = \begin{cases} 0 & \text{je-li } a_{ii} = 2 \\ 2 & \text{je-li } a_{ii} = 0, \end{cases}$

pak $x \notin C$ (neboť se liší od všech prvků v $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$).

Tedy C není spočetná.

Dále $C \subset \langle 0,1 \rangle \setminus F_m$, kde F_m je sjednocení vynechaných intervalů po m-tém kroku konstrukce C. Tedy

$$V(F_m) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \dots + \frac{2^{m-1}}{3^m} = \frac{1}{3} \sum_{i=0}^{m-1} \left(\frac{2}{3}\right)^i$$

$$= \frac{1}{3} \, \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^m}{1-\frac{2}{3}} = 1-\left(\frac{2}{3}\right)^m \longrightarrow 1 \text{ pro } m \to \infty.$$

Tedy C je pokryta spočetným (konečným) sjednocením otevřených intervalů, jejichž celkový objem jde k nule.

<u>Definice</u> Řekneme, že $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ je schodovitá (jednoduchá) funkce (step or simple) pokud existuje interval $I \subset \mathbb{R}^d$ tak, že $\quad f \equiv 0 \ \text{ v } \mathbb{R}^d \setminus I$
a existuje dělení $\{I_k\}_{k=1}^N$ intervalu I a existují $\{c_k\}_{k=1}^N \subset \mathbb{R}$ tak, že

$$f(x) = \sum c_k \chi_{I_k}(x)$$

<u>Značení</u> $\quad H := \{ f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} ;\ f \text{ je schodovitá} \}$

<u>Definice</u> $\quad f \in H \Rightarrow \int f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx = \int_I f(x)\,dx := \sum_{k=1}^N c_k V(I_k)$

Následující tvrzení charakterizuje množiny míry nula pomocí schodovitých funkcí.

Tvrzení $E \subset \mathbb{R}^d$ je množina míry nula $\iff \forall \eta > 0 \ \exists \{h_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ tak, že

(1) $0 \le h_1 \le h_2 \le \dots \le h_m \le \dots$

(2) $(\forall m \in \mathbb{N}) \quad \int h_m(x)\,dx \le \eta$

(3) $(\forall x \in E) \quad \sup_{m \in \mathbb{N}} h_m(x) \ge 1$

Dk $\boxed{\Rightarrow}$ Předpokládáme, že $\boxed{\text{pro dané } \eta > 0}$ existují $\{I_k\}$ tak, že $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ a $\sum_{k=1}^{\infty} V(I_k) < \eta$. Definujme

$$h_m(x) := \sum_{k=1}^{m} \chi_{I_k}(x)$$

Pak $h_m \in H$ a (1) platí. Navíc $\int h_m(x) = \sum_{k=1}^{m} V(I_k) < \eta$ pro $\forall m \in \mathbb{N}$, což je (2). Protože $\bigcup I_k$ pokrývá E, tak (3) platí.

$\boxed{\Leftarrow}$ Zkuste si dokázat sami.

$\boxed{\text{Věta 3.1}}$ (Vlastnosti schodovitých funkcí, vlastnosti prostoru H)

(i) $f \in H \Rightarrow |f| \in H$

(ii) $(\forall f \in H) \quad f \ge 0 \Rightarrow \int f\,dx \ge 0$

(iii) H je vektorový prostor ($f, g \in H, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \underset{\alpha f}{f+g} \in H$)

$$\boxed{\begin{array}{c} f \le g \ \& \ f, g \in H \\ \Downarrow \\ \int f \le \int g \end{array}}$$

(iv) $f, g \in H \Rightarrow \max\{f, g\} \in H, \ f^+ \in H$
$\min\{f, g\} \in H, \ f^- \in H$

(v) $f \in H \Rightarrow \left| \int f\,dx \right| \le \int |f|\,dx$

(vi) Jsou-li $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ a $f_k \searrow 0$, pak $\lim_{k \to \infty} \int f_k = 0$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^d: \ 0 \le \dots \le f_{k+1}(x) \le f_k(x) \le \dots \le f_1(x) \ \& \ \lim_{k \to \infty} f_k(x) = 0}$$

Dk $\boxed{\text{Ad (i)}}$ Je-li $f(x) = \sum_{k=1}^{N} c_k \chi_{I_k}(x)$, pak $|f(x)| = \sum |c_k| \chi_{I_k}(x)$ je zřejmě také schodovitá.

$\boxed{\text{Ad (ii)}}$ Je-li $f(x) = \sum_{k=1}^{N} c_k \chi_{I_k}(x)$ a $c_k \geq 0$, pak $\int f = \sum c_k V(I_k) \geq 0$.

$\boxed{\text{Ad (iii)}}$ Pokud $\alpha \in \mathbb{R}$, $f \in H$, pak $\alpha f \in H$.

Jsou-li $f, g \in H$ a $f \equiv 0$ v $\mathbb{R}^d - I^f$ a $g \equiv 0$ v $\mathbb{R}^d - I^g$, pak snadno sestrojíme interval I a jeho dělení $\{I_k\}$ tak, že $\{I_k\}|_{I^f}$ je zjemněním (dělením) $\{I_k^f\}_{k=1}^{N_f}$ a $\{I_k\}|_{I^g}$ je zjemněním $\{I_k^g\}_{k=1}^{N_g}$. Na intervalech $I_k \notin I^f \cup I^g$ položíme $c_k = 0$.
Na $I_k \subset I^f \setminus I^g$ je $c_k = c_k^f$ a na $I_k \subset I^g \setminus I^f$ položíme $c_k = c_k^g$. Nakonec na $I_k \subset I^f \cap I^g$ klademe $c_k = c_k^f + c_k^g$.

Tak $f + g = \sum c_k \chi_{I_k} \in H$.

$\boxed{\text{Ad (iv)}}$ Protože $f^+ = \max\{f, 0\}$, $f^- = \max\{-f, 0\}$, $\max\{f,g\} = \frac{1}{2}\{|f-g| + f + g\}$ a $\min\{f,g\} = -\max\{-f, -g\}$, tak tvrzení plyne z (iii) a (i).

$\boxed{\text{Ad (v)}}$ Protože $-|f| \leq f \leq |f|$, tak dle (ii) aplikované na $|f| + f$ a $|f| - f$ a s použitím linearity dostáváme

$$-\int |f| \leq \int f \leq \int |f|.$$

$\boxed{\text{Ad (vi)}}$ Chceme ukázat, že

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k_0 \in \mathbb{N})(\forall k \geq k_0) \int f_k \leq \varepsilon.$$

[1] <u>Značení</u> • f_1 je nula vně I (f_k jsou monotónní $\Rightarrow f_k = 0$ vně I)

$$M := \max_{x \in I} f_1(x)$$

• $f_k \in H \Rightarrow \exists \{I_{kj}\}_{j=1}^{N_j} (\exists f_{kj} \in \mathbb{R})\ f_k = \sum_{j=1}^{N_j} f_{kj} \chi_{kj}$

S_k .... množina všech stěn dělení I_{kj}

$$S_\infty = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k \cup \{\text{zbylé stěny } \partial I\}$$

S_∞ je spočetná – jednotlivé stěny z S_∞ lze oindexovat přirozenými čísly

[2] Pokrytí $\overline{I}$ $\quad \varepsilon > 0$ dáno. Polož $\eta := \frac{\varepsilon}{2M}$ a $\eta' = \frac{\varepsilon}{2V(I)}$

(a) pokrytí S_∞ $\quad \forall$ stěnu S_i z S_∞ pokryjeme otevřeným intervalem K_i tak, že $V(K_i) \leq \frac{\eta}{2^i}$

Potom $\sum_{i=1}^{\infty} V(K_i) < \eta$.

(b) pokrytí $I \setminus S_\infty$

$I \setminus S_k$ je otevřená množina a f_k je na $I \setminus S_k$ spojitá

$\forall x \in I \setminus S_\infty \; (\exists k_0 = k_0(x)) \, (\forall k \geq k_0) \; f_k(x) < \eta'$

(speciálně $f_{k_0}(x) < \eta'$)

Protože f_{k_0} je po částech konstantní, tak existuje otevřený interval $J(x)$ tak, že $f_{k_0}(y) < \eta'$ pro všechna $y \in J(x)$

$$\overline{I} \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i \cup \bigcup_{x \in \overline{I} \setminus S_\infty} J(x)$$, ale $\overline{I}$ je kompakt

$$\Longrightarrow \exists K_{i_1}, \dots, K_{i_m}, x_1, \dots, x_p \text{ tak, že } \overline{I} \subset \bigcup_{j=1}^{m} K_{i_j} \cup \bigcup_{i=1}^{p} J(x_i)$$

vzájemně disjunktní

[3] Definujme $k_0^* = \max_{i=1,\dots,p} \{k_0(x_i)\}$

Pro $\forall k \geq k_0^*$ a $\forall x \in I \setminus S_\infty$: $f_k(x) < \eta'$

a současně $I \setminus S_\infty \subset \bigcup_{i=1}^{p} J(x_i)$ & $\sum_{i=1}^{p} V(J(x_i)) \leq V(I)$

$$\int f_k \leq \int f_{k_0^*} \leq M \sum_{j=1}^{m} V(K_{i_j}) + \eta' V(I)$$

$$\leq M\eta + \eta' V(I) = \varepsilon$$

$\boxed{\text{QED}}$

<u>Definice</u> Řekneme, že nějaká vlastnost (např. $f=g$, $f\leq g, \dots$) platí <u>skoro všude</u> (almost everywhere) a píšeme s.v. (a.e.)

$\stackrel{df}{\equiv}$ vlastnost platí $\forall x \in \mathbb{R}^d \setminus Z$, kde Z je množina míry nula.

<u>Věta 3.2</u> (Další vlastnosti schodovitých funkcí). Buď $f, g \in H$

(i) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ a $f_n \searrow 0$ s.v. $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \int f_n = 0$

(ii) $f = g$ s.v. $\Rightarrow \int f = \int g$

(iii) $f \leq g$ s.v. $\Rightarrow \int f \leq \int g$

Dk $\boxed{\text{Ad (i)}}$ Dokážeme tvrzení $\boxed{\text{nejdříve}}$ za silnějších předpokladů:

$\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ a $0 \leq \dots f_{n+1}(x) \leq f_n(x) \leq \dots \leq f_1(x)$ $\underline{\forall x \in \mathbb{R}^d}$

$\lim f_n(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \setminus Z$,

kde <u>Z je množ. míry nula</u> tzn. $\exists \{h_i\}_{i=1}^{\infty} \subset H$

(i) $0 \leq h_1(x) \leq \dots \leq h_n(x) \leq \dots$

(ii) $(\forall n)$ $\int h_n \leq \frac{\varepsilon}{M}$ $\quad (M := \max f_1)$

(iii) $(\forall x \in Z)$ $\sup\limits_n h_n(x) \geq 1$

Uvažme fce $\boxed{f_n - M h_n}$. jsou <u>nerostoucí</u> všude

. $f_n \geq 0 \Rightarrow \int f_n \geq 0 \ (\forall n)$. $\lim\limits_{n\to\infty} (f_n(x) - M h_n(x)) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$

Tedy $\lim\limits_{n\to\infty} (f_n(x) - M h_n(x))^+ = 0$

Dle Věty 3.1 (vi)

$$\lim_{n\to\infty} \int (f_n(x) - M h_n(x))^+ = 0,$$

což implikuje

$$\lim_{n\to\infty} \int (f_n(x) - M h_n(x)) \leq 0 \quad \Longrightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \le M \lim_{n\to\infty} \int h_n \le M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Ad (ii) $\{f-g\}_{n=1}^{\infty}$ je konstantní posloupnost, která je
(triviálně) monotónní pro všechna x a
(triviálně) $\lim_{n\to\infty} f(x)-g(x) = 0$ pro s.v. x.

Tedy dle právě dokázaného tvrzení (**Ad (i)**):

$$\lim_{n\to\infty} \int (f-g) = 0 \Rightarrow \int f = \int g$$

Ad (iii) $0 \le |g-f| = g-f$ s.v. $\Rightarrow 0 \le \int |g-f| = \int g-f \Rightarrow$

$$\underset{\text{lineárně}}{\Rightarrow} \int f \le \int g.$$

Nyní dokážeme tvrzení (i) za předpokladů uvedených ve větě.

Ad (i) **PODRUHÉ**

Definujme $\tilde{f}_n$ takto: $\tilde{f}_1 = f_1^+$

$\tilde{f}_i = \min\{f_i^+, \tilde{f}_{i-1}\}$

Pak není těžké ověřit, že

- $\tilde{f}_n$ je nerostoucí $\forall x \in \mathbb{R}^d$
- $\tilde{f}_n = f_n$ s.v.

$\Bigg\}$ $\underset{\text{ze silnějších předp.}}{\overset{\text{Tvrzení (i) dokázané}}{\Longrightarrow}}$

$\lim \int \tilde{f}_n = 0$ a dle (ii): $\int \tilde{f}_n = \int f_n \Rightarrow$

$\lim \int f_n = 0$ $\blacksquare$

3.2 Prostory měřitelných a Lebesgueovsky integrovatelných fcí M^+, L^+, M, L.

Definice • $\boxed{f \in M^+}$ (prostor měřitelných nezáporných funkcí)

$\stackrel{df.}{\equiv}$ $\exists \{h_i\}_{i=1}^{\infty} \subset H$, $h_i \geq 0$ a $\underbrace{h_i \nearrow f \text{ s.v.}}$

(tzn. $\forall x \in \mathbb{R}^d - Z$: • $0 \leq h_1(x) \leq h_2(x) \leq \dots f(x)$

• $\lim\limits_{i \to \infty} h_i(x) = f(x)$,

Z je množ. míry nula)

PROSTOR LEBESGUEOVSKY INTEGROVAT. NEZÁPORNÝCH FUNKCÍ

• $\boxed{f \in L^+}$ $\stackrel{df}{\equiv}$ $f \in M^+$ a posloupnost $\{h_i\}_{i=1}^{\infty} \subset H$ z definice prostoru M^+ navíc splňují: $\exists K > 0 \ \forall i \int h_i \leq K$.

Pro $f \in L^+$ definujeme Lebesgueův integrál takto:

$$\int f = \lim_{i \to \infty} \int h_i$$

⌈ Povšimněme si, že $h_i \leq h_j \Rightarrow \int h_i \leq \int h_j \leq K$ pro $i < j$, $i, j \in \mathbb{N}$ lib. Tedy $\left\{ \int h_i \right\}_{i=1}^{\infty}$ tvoří monotónní omezenou posloupnost čísel. Z MAF1 víme, že limita takové posloupnosti vždy existuje. ⌋

V následujících dvou větách budeme nejdříve zkoumat strukturální vlastnosti L^+ včetně nezávislosti definice integrálu na volbě posloupnosti $\{h_i\}_{i=1}^{\infty} \subset H$.
Potom budeme zkoumat záměnu

$\int$ a limity.

Věta 3.3 Buď $f, g \in L^+$. Potom

(i) $f \leq g$ s.v. $\Rightarrow \int f \leq \int g$

(ii) $f = g$ s.v. $\Rightarrow \int f = \int g$

(iii) $\int f$ nezávisí na volbě $\{h_i\}_{i=1}^{\infty} \subset H$

(iv) f je konečná s.v.

(v) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_0^+ \Rightarrow \alpha f + \beta g \in L^+$ (to však neznamená, že L^+ je vektorový prostor. Proč?)

(vi) $\max\{f, g\} \in L^+$, $\min\{f, g\} \in L^+$.

Dk K $f \in L^+$: $\exists h_i \geq 0, h_i \in H, h_i \nearrow f$ s.v. a $\exists K > 0$ $\forall i$ $\int h_i \leq K$

K $g \in L^+$: $\exists l_i \geq 0, l_i \in H, l_i \nearrow g$ s.v. — " — $\int l_i \leq K$

Ad (i) $h_i - l_j \searrow h_i - g$ $(j \to \infty)$, protože $f - g \leq 0$, tak $h_i - g \leq 0$ s.v. $(\forall i)$ $\Rightarrow (h_i - l_j)^+ \searrow 0$ s.v. pro $j \to \infty$

$$\Rightarrow \int (h_i - l_j)^+ \to 0 \quad j \to \infty$$

Tedy $\lim\limits_{j\to\infty} \int h_i - l_j \leq 0 \Rightarrow \int h_i \leq \lim\limits_{j\to\infty} \int l_j = \int g$

$\downarrow i \to \infty$

$$\int f \leq \int g$$

Ad (ii)

plyne z (i) neboť $f = g$ s.v. $\Rightarrow f \geq g$ s.v. & $g \geq f$ s.v.

Ad (iii)

Uvažujme dvě posloupnosti $\{h_i^1\}_{i=1}^{\infty}$ & $\{h_i^2\}_{i=1}^{\infty}$ taky, že $h_i^1 \nearrow f^1 = f$ a $h_i^2 \nearrow f^2 = f$

Pak $f_1 = f_2$ s.v. a dle (ii) $\int f_1 = \int f_2$

Ad (iv)

$Z_1 := \{x \in \mathbb{R}^d;$ neplatí $h_i(x) \nearrow f(x)\}$ je množ. míry nula.
Definujme $Z_2 := \{x \in \mathbb{R}^d \setminus Z_1; f(x) = \infty\}$. Cílem je ukázat, že Z_2 je mn. míry nula. Definujme $H_i = \frac{\varepsilon}{K} h_i \in H$. Pak
(α) $H_i \geq 0$, (β) $(\forall i)$ $\int H_i = \frac{\varepsilon}{K} \int h_i \leq \varepsilon$,
(γ) $\forall x \in Z_2$ $\sup\limits_i H_i(x) \geq 1$ (neboť $h_i \nearrow \infty$ na Z_2).

Tedy Z_2 je dle "charakterizace mn. míry nula" mn. míry nula.

$\boxed{\text{Ad (v)}}$ Rozmyslete sami.

$\boxed{\text{Ad (vi)}}$ Označme $H_i = \max_x \{h_i, l_i\}$.

Protože $h_i, l_i \in H \Rightarrow H_i \in H$ dle Věty 3.1 (iv).

Navíc:
- $H_i \nearrow \max\{f, g\}$
- $(\forall i) \int \max\{f, g\} \leq 2K$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow \max\{f, g\} \in \mathcal{L}^+$. ☒

$\boxed{\text{Věta 3.4}}$ (Limitní průchod v L^+)

Buď $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^+$, $f_n \nearrow f$ s.v. a $(\exists K)(\forall n \in \mathbb{N})$ $\int f_n \leq K$.

Pak

$$\int f = \left(\int \lim f_n \right) = \lim_{n\to\infty} \int f_n$$

tj. záměna limity a $\int$ platí.

Dk: $f_n \in L^+$: $\exists \{h_{nj}\}_{j=1}^{\infty}$, $h_{nj} \geq 0$, $h_{nj} \in H$, $h_{nj} \nearrow f_n$ s.v., tj $\int h_{nj} \leq K$

Definujme $H_j = \max_{1 \leq n \leq j} h_{nj} \in H$

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\boxed{h_{11}} & \leq & h_{12} & \leq & h_{13} & \leq & \dots & \leq & h_{1j} & \leq & \dots & \leq & f_1 \\
h_{21} & \leq & h_{22} & \leq & h_{23} & \leq & \dots & \leq & h_{2j} & \leq & \dots & \leq & f_2 \\
h_{31} & \leq & h_{32} & \leq & h_{33} & \leq & \dots & \leq & h_{3j} & \leq & \dots & \leq & f_3 \\
\vdots & & & & & & & & \vdots & & & &
\end{array}$$

Zřejmě: $\overset{\in H}{H_j}$ je monotónní: $h^* = \lim_{j\to\infty} H_j$ a tedy $\int h^* = \lim_{j\to\infty} \int H_j$

Platí:

$$\left.\begin{array}{rccccc}
 & h_{nj} & \leq & H_j & \leq & f_j \\
j\to\infty \downarrow & f_n & \leq & h_* & \leq & f \\
n\to\infty \downarrow & f & \leq & h_* & \leq & f
\end{array}\right\} \Rightarrow f = h_* \text{ (s.v.)}$$

Integrací:

$$\begin{array}{rccccc}
 & \int h_{nj} & \leq & \int H_j & \leq & \int f_j \\
j\to\infty \downarrow & \int f_n & \leq & \int f & \leq & \lim_{j\to\infty} \int f_j \\
n\to\infty \downarrow & \lim_{n\to\infty} \int f_n & \leq & \int f & \leq & \lim_{n\to\infty} \int f_n
\end{array}$$

$(f = h_*$ s.v.$)$

$\blacksquare$

Definice: Buď $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

$\boxed{f \in L}$ (f je lebesgueovsky integrovatelná) $\equiv f^+, f^- \in L^+$

a

$$(\mathcal{L}) \int f \stackrel{df.}{=} \int f^+ - \int f^-$$

Také $\boxed{f \in M}$ (f je lebesgueovsky měřitelná) $\equiv f^+, f^- \in M^+$

Poznámka (důležitá) Lze definovat "$f \in L$" také tak, že existují $f_1, f_2 \in L^+$: $f = f_1 - f_2$ s.v. a $\int f = \int f_1 - \int f_2$

Uvidíme, že definice nezávisí na rozkladu:

Máme: $f^+ - f^- = f = f_1 - f_2 \Rightarrow f^+ + f_2 = f_1 + f^-$ s.v. a $f^+, f^-, f_1, f_2 \in L^+$

tedy:
$$\int f^+ + f_2 = \int f_1 + f^-$$
$$\Downarrow$$
$$\int f^+ - \int f^- = \int f_1 - \int f_2$$

a oba rozklady dávají stejný výsledek.

$\boxed{\text{Věta}}$ 3.5 (Struktura fcí z L) Buď $f, g \in L$. Pak

(i) L je vektorový prostor a $(\mathcal{L})\int$ je aditivní, tj.
$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$: $\alpha f + \beta g \in L$ a $\int \alpha f + \beta g = \alpha \int f + \beta \int g$

(ii)
- $f \geq g$ s.v. $\Rightarrow \int f \geq \int g$
- $f = g$ s.v. $\Rightarrow \int f = \int g$

(iii) Lebesgueův integrál je absolutně konvergentní: $|f| \in L$.

(iv) L je „svaz": $\max\{f, g\} \in L$, $\min\{f, g\} \in L$

(v) f je konečná s.v.

Dk **Ad (i)** Přímo z definice plyne: je-li $f \in L$, pak $-f \in L$ (ověřte!)

Také: je-li $\alpha > 0$ a $f \in L$, pak $\alpha f \in L$. $\Big\}\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Odtud však plyne:

je-li $\alpha < 0$, pak $-\alpha > 0$, pak $-\alpha f \in L$

a pak $-(-\alpha f) = \alpha f \in L$.

Tedy L je <u>lineární</u> prostor.

Aditivita $(\mathcal{L})\int$: $f+g = f^+ - f^- + (g^+ - g^-) = (f+g)^+ - (f+g)^-$,

a $(f+g)^+ \in L^+$ a $(f+g)^- \in L^+$

Ad (ii) Protože $f^+ - f^- \geq g^+ - g^-$ s.v.

tak $f^+ + g^- \geq f^- + g^+$ s.v. & $f^+ + g^- \in L^+$, $f^- + g^+ \in L^+$

a tedy dle Věty 3.3 (i):

$$\int f^+ + \int g^- = \int f^+ + g^- \geq \int f^- + g^+ = \int f^- + \int g^+$$

Věta 3.3 (v)

což implikuje

$$\underline{\int f^+ - f^-} = \int f^+ - \int f^- \geq \int g^+ - \int g^- = \underline{\int g^+ - g^-}$$

Ad (iii) plyne ze skutečnosti, že $|f| = f^+ + f^-$ a z definice. Dokázali jsme implikaci:

$$f \in L \implies |f| \in L.$$

Ad (iv) $\max\{f,g\} = f + (g-f)^+$ (rozmysli)

plyne ze vztahu

Ad (v) plyne z Věty 3.3.: f^+, f^- jsou konečné až na mn. míry nula.

3.3 Věty o záměně integrálu a limity pro posloupnosti a řady funkcí a kritéria, kdy $\lim f_n \in L$

Věta 3.6 (Levi)

Buď $\left\{ \begin{array}{l} \cdot \ \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L \\ \cdot \ f_n \nearrow f \text{ s.v.} \\ \cdot \ (\exists K>0)\ \forall n \ \int |f_n| \leq K \end{array} \right\}$ Pak $\left(\int \lim f_n = \right) \int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n$

Dk Využijeme Větu 3.4. Definujme $g_n = f_n + f_1^-$.

Protože $f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f$

tak $f_1 + f_1^- \leq f_2 + f_1^- \leq \dots \leq f + f_1^-$

Navíc $f_1 + f_1^- = f_1^+ - f_1^- + f_1^- = f_1^+ \geq 0$.

Tedy $g_n \geq 0$ a $g_n \nearrow f + f_1^-$ a $(\forall n) \int g_n \leq 2K$

Dle Věty 3.4:

$$\int \lim f_n + \int f_1^- = \int \lim_{n\to\infty} g_n = \lim_{n\to\infty} \int g_n = \lim_{n\to\infty} \int f_n + \int f_1^-$$

a porovnáním podtržených výrazů dostáváme tvrzení.

Věta 3.7 (Levi pro řady)

$\left. \begin{array}{l} \cdot \ \{f_i\}_{i=1}^{\infty} \subset L,\ f_i \geq 0 \\ \cdot \ (\exists K>0)(\forall m)\ \int \sum_{i=1}^{m} f_i \leq K \end{array} \right\} \Rightarrow$ 1) $F := \sum_{i=1}^{\infty} f_i \in L$

2) $\int F = \sum_{i=1}^{\infty} \int f_i$

Dk Užijme Větu 3.6 na posloupnost částečných součtů:

$g_m := \sum_{i=1}^{m} f_i$. (Zřejmě: • $g_m \in L \ \forall m \in \mathbb{N}$

• $g_m \nearrow F$

• $(\exists K)(\forall m) \int g_m \leq K$

tedy $\int F = \lim \int g_m = \lim \sum_{i=1}^{m} \int f_i$ $\square$

Věta 3.8 (O obrácení výroku: "$f = 0$ s.v. $\Rightarrow \int f = 0$")

Je-li $f \in L$, $f \geq 0$ a $\int f = 0$, pak $f = 0$ s.v.

Dk Definujme $F_k = kf$ ($F_k(x) = kf(x)$, $k \in \mathbb{N}$).

Zřejmě $F_k \geq 0$ s.v., neklesající s.v. a $\forall k \in \mathbb{N}$ $\int F_k = 0$

Tedy, dle Věty 3.4: $F_k \nearrow F$ a

$$\int F = \int \lim_{k\to\infty} F_k = \lim_{k\to\infty} \int F_k = \lim_{k\to\infty} k \int f = 0$$

Tedy $F \in L$, $\int F = 0$ a F je konečná s.v.

Uvažujme $M = \{x;\ f(x) > 0\}$. Pak $F(x) = \infty$ $\forall x \in M$.

Tedy M je množina míry nula. ▨

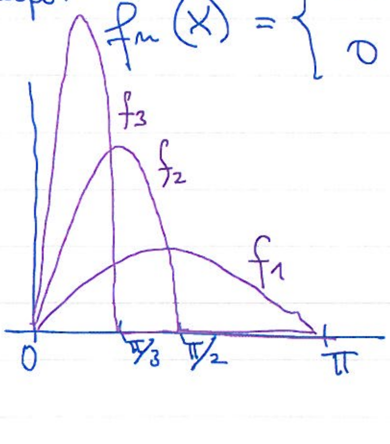
Věta 3.9 (Fatouovo lemma – kritérium garantující náležitost $\lim f_n$ do L)

$$\text{nechť} \left\{ \begin{array}{l} \cdot\ \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L,\ \boxed{f_n \geq 0} \\ \cdot\ f_n \to f \quad \text{s.v.} \\ \cdot\ (\exists K)(\forall n \in \mathbb{N}) \int f_n \leq K \end{array} \right\} \text{pak} \left\{ \begin{array}{l} \cdot\ f \in L \\ \cdot\ \int f \leq K. \end{array} \right.$$

Pozorování Fatouovo lemma neříká nic o záměně $\lim_{n\to\infty}$ a $\int$.

Záměna za předpokladů V.3.9. obecně NEPLATÍ. Uvažujme např.

$$f_n(x) = \begin{cases} n \sin nx & x \in \langle 0, \frac{\pi}{n}) \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}, \text{ pak}$$



- $f_n(x) \to 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$
- $\int f_n = \int_0^{\pi/n} n \sin nx = \left[-\cos nx\right]_0^{\pi/n} = 2$
- $f = 0$, $f \in L$, $0 = \int f < \lim \int f_n = 2$.

Dk Věty 3.9 Definujme $F_k = \inf\{f_k, f_{k+1}, \dots\} \nearrow f$. Pak dle lemmatu musí platit $F_k \in L$. Navíc $\forall k \in \mathbb{N}: \int F_k \leq K$

Dle Leviho věty 3.6: $\int f = \lim_{k\to\infty} \int F_k \leq K$ a $f \in L$,

což jsme chtěli ukázat. ☒

Lemma (užitečné)

Pokud $\begin{cases} f_k, g_k \in L, \ k \in \mathbb{N} \\ f_0, g_0 \in L \\ f_k \geq f_0, \ g_k \leq g_0 \ (\forall k \in \mathbb{N}) \end{cases}$ pak $\begin{array}{l} F = \inf\{f_1, f_2, \dots\} \in L \\ G = \sup\{g_1, g_2, \dots\} \in L \end{array}$

Dk $G_k = \max\{g_1, \dots, g_k\} \in L$, $G_k \nearrow G \overset{\text{Levi}}{\Longrightarrow} G \in L$;

Protože $\inf\{f_1, \dots\} = -\sup\{-f_1, -f_2, \dots\}$. ☒

Věta 3.10 (Lebesgueova – o integrovatelné majorantě)

Pokud $\begin{cases} \bullet \ \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L \\ \bullet \ f_n \to f \text{ s.v.} \\ \bullet \ (\exists g \in L)(\forall n \in \mathbb{N}) \ |f_n| \leq g \end{cases}$ pak $\begin{cases} \bullet \ f \in L \\ \bullet \ \int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n \end{cases}$

Dk Definujme $F_k = \inf_x \{f_k, f_{k+1}, \dots\} \nearrow f$ s.v.

$G_k = \sup_x \{f_k, f_{k+1}, \dots\} \searrow f$ s.v.

Pak
$$-g \leq F_k \leq f_k \leq G_k \leq g$$

Integrací
$$-\int g \leq \int F_k \leq \int f_k \leq \int G_k \leq g$$

Provedeme $\lim_{k\to\infty}$ s tím, že $\{F_k\}$ a $\{G_k\}$ splňují předpoklady Leviho věty 3.6. Tedy $(k \to \infty)$

$$\int f \leq \lim_{k\to\infty} \int f_k \leq \int f,$$

což jsme chtěli ukázat. ☒

Tvrzení (užitečné varianty Lebesgueovy věty)

(1) Nechť platí (i) a (ii) z Věty 3.10 a $\exists\, g, h \in L : h \le f_n \le g$, pak platí tvrzení Věty 10.11.

(2) Nechť platí (i) a (ii) a $(\exists g \in L)\ |f| \le g$. Pak $f \in L$.

Dk $\boxed{\text{Ad}(1)}$ jednoduché (sami)

$\boxed{\text{Ad}(2)}$ Definujme $\tilde{f}_n = \max\{\min\{f_n, g\}, -g\}$

oříznutí fcí f_n se zdola $-g$ a se shora fcí g.

Pak $|\tilde{f}_n| \le g$ a $\tilde{f}_n \longrightarrow f$ s.v.

Dle Věty 3.10 dostáváme, že $f \in L$. ∎

$\boxed{\text{Příklady}}$ (1) $f_n(x) = \chi_{[-n,n]} \operatorname{sgn} x$

Pak
- $f_n(x) \longrightarrow \operatorname{sgn} x$
- $\int f_n = 0$
- $f_n \in L$

AVŠAK $f \notin L$

$f \in M$ ale f^+ a $f^- \notin L^+$

Stejné chování vykazuje oscilující $f_n(x) = \chi_{[-2\pi n, 2\pi n]} \sin x$

Poučení z příkladu (1):

(i) Ve Fatuově lemmatu nelze vypustit předpoklad $f_n \ge 0$.

(ii) Posloupnost $\{f_n\}$ nemá integrovatelnou majorantu.

(2) Koncentrace v bodě

$$f_n = \begin{cases} n & \text{na } \left(-\frac{a}{n}, \frac{a}{n}\right) \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

Pak
- $f_n \to 0$ s.v.
- $(\forall n)\ \int f_n = 2a$

$\not\Rightarrow \int \lim f_n = \lim_{n\to\infty} \int f_n$

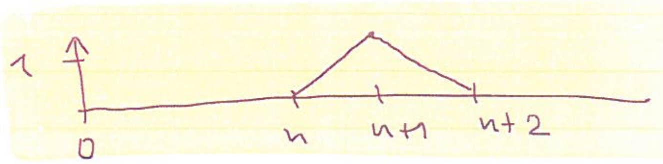
neboť

$$0 = \int \lim f_n < \lim \int f_n = 2a$$

Dle Fatuova lemmatu $0 \in L$, což je fajn, ale závěr neplatí: NEMÁM MAJORANTU ani MONOTÓNII

③ Únik hmoty do nekonečna

Buď f_n jako na obrázku:



Pak $0 \le f_n \to 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ $\qquad 0 = \int \lim f_n < \lim \int f_n = 1$

$\int f_n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Obecnější komentář:

OSCILACE, KONCENTRACE A ROZPTYL (DISPERSE) V NEKONEČNÉM PROSTORU jsou zajímavé komplikované jevy, kdy je třeba dávat pozor na zachovávání vlastností. Dalším důvodem jsou SKOKOVÉ NESPOJITOSTI (RÁZOVÉ VLNY).

nečiní komplikace u integrace

④ $f_n = -\frac{1}{n}$ a $f_n \nearrow 0$ v $\mathbb{R}$, ale NEPLATÍ $\lim \int f_n = \int \lim f_n$

neboť $f_n \notin L$.

⑤ Pomocí Leviho věty pro řady můžeme elegantně spočítat $\int_0^\infty \frac{x}{e^x - 1}$

Platí:

$$\int_0^\infty \frac{x}{e^x-1} = \int_0^\infty \frac{x e^{-x}}{1-e^{-x}} = \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty x e^{-nx} \overset{\text{Levi}}{=} \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty \underset{\downarrow\, 1}{x}\, \underset{\downarrow\, \frac{-e^{-nx}}{n}}{e^{-nx}}$$

$$\underset{\text{per partes}}{=} \sum_{n=1}^\infty \left[\frac{-x e^{-nx}}{n} - \frac{e^{-nx}}{n^2} \right]_0^\infty = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} < \infty .$$

Použití Leviho věty plyne z pozorování:

$$\int \sum_{n=1}^{k} x e^{-nx} \le \sum_{1}^{k} \int_0^\infty x e^{-nx} = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2} < +\infty .$$