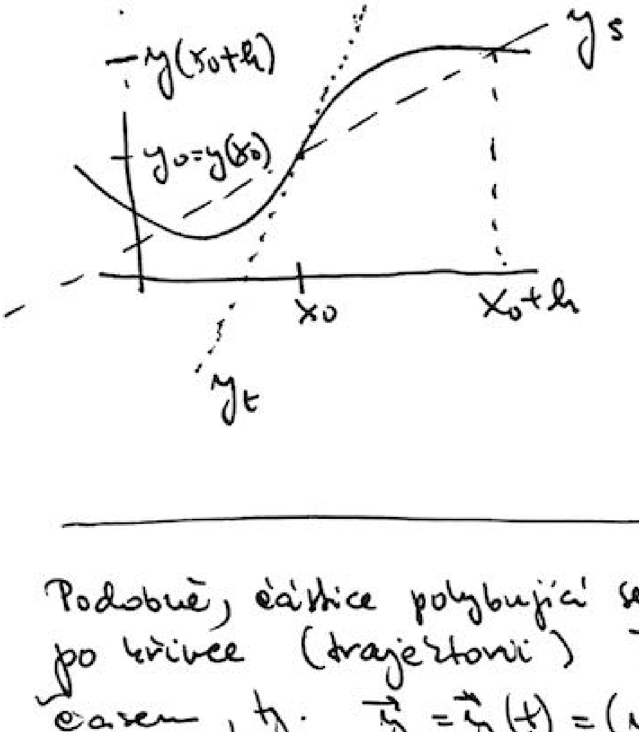
1.2. LIMITA A SPOJITOST

Definice limity tvoří základ předmětu matematická analýza. Jejímu porozumění je třeba věnovat zvýšenou pozornost. Trvalo takřka století od Newtona a Leibnize než-li matematika dospěla k přesnému uchopení a popsání pojmu limita. Pojem limity je všude kolem nás. Potřebujeme jej při sčítání nekonečných řad, pro výpočet ploch a objemů (vymezených funkcemi), pro určení tečen v bodech dané křivky, při hledání maximálních či minimálních (extremálních) hodnot, při stanovení okamžité rychlosti (zrychlení) částic či těles.

Uvažujme dvě úlohy. Mějme nejdříve křivku, která je v okolí bodu (x_0, y_0) popsána funkcí $y = y(x)$. Cílem je napsat (určit) rovnici tečny k dané křivce v bodě (x_0, y_0), viz obrázek.



Sečna (přímka) procházející body $(x_0, y(x_0))$ a $(x_0+h, y(x_0+h))$ má tvar

$$\boxed{y_s(x) = y(x_0) + \frac{y(x_0+h) - y(x_0)}{h}(x - x_0)}$$

Tečna y_t je pak dána rovnicí

$$y_t(x) = y(x_0) + k(x - x_0),$$

kde

$$k = \lim_{h \to 0} \frac{y(x_0+h) - y(x_0)}{h}.$$

Podobně, částice pohybující se po křivce (trajektorii) $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ parametrizovanou časem, tj. $\vec{y} = \vec{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), y_3(t))$ má v čase t_0 okamžitou rychlost $\vec{v}(t_0)$ danou jako limitu podílu typu

$$\frac{\text{relativní vzdálenost}}{\text{relativní čas}} = \frac{\vec{y}(t_0+\Delta) - \vec{y}(t_0)}{\Delta t}. \qquad \left[\leftarrow \text{výraz } \frac{0}{0}\right]$$

dráha/změna polohy

Tzn. $\vec{v}(t_0) = (y_1'(t_0), y_2'(t_0), y_3'(t_0)) = (\dot{y}_1(t_0), \dot{y}_2(t_0), \dot{y}_3(t_0))$

Uvažujme $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ nebo $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ (tzn. reálné a komplexní funkce reálné proměnné), přičemž případ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ lze vnímat jako speciální případ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ (neb $f(x) = (f_1(x), f_2(x)) = f_1(x) + i f_2(x)$)

Limita je číslo z $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$; v takovém případě mluvíme o <u>vlastní</u> limitě. Může se stát, že limita je rovna $+\infty$ nebo $-\infty$, nebo ∞ ($f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$). Pak mluvíme o <u>nevlastní</u> limitě.

Pojem limity je <u>lokální</u> vlastnost, tzn. týká se chování funkce v okolí jediného bodu $x_0\in\mathbb{R}^*$. Je-li $x_0\in\mathbb{R}$ mluvíme o limitě <u>ve vlastním bodě</u>, je-li $x_0=+\infty$ nebo $x_0=-\infty$ pak se jedná o limitu v <u>nevlastním bodě</u>.

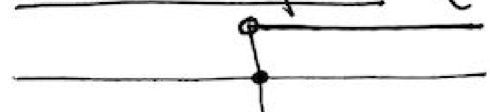
Pokud limita existuje (vlastní/nevlastní), pak je chování funkce v okolí $x_0\in\mathbb{R}^*$ kontrolované. Pokud limita nebude existovat, pak je chování funkce v okolí uvažovaného bodu podezřelé.

<u>Příklady</u> ① $f(x)=x^2$, $x\in\mathbb{R}$. Zajímá nás chování v okolí $a>0$. Pokud x se blíží k a, pak x^2 se blíží k a^2
NEBOLI: $f(x)$ je "libovolně blízko" a^2, pokud x "dostatečně blízko" a.

② $f(x)=\dfrac{x^2-a^2}{x-a}$ $D_f := \mathbb{R}\setminus\{a\}$ a $f(x)=x+a$ pokud $x\neq a$

Fce f není v a definována. To však pro pojem limity nevadí, neb zkoumáme chování v okolí a a pro x <u>blízká</u> a je $f(x)$ <u>blízká</u> $2a$.

③ $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$ <u>znaménková funkce</u> (sign fumction)
FUNCTION



V okolí $x\neq 0$ se chová funkce jako fce konstantní ($+1$ nebo -1). Chování v okolí $x=0$ je podezřelé.

④ $f(x)=\dfrac{1}{x-a}$ $D_f=\mathbb{R}\setminus\{a\}$. Pro $x\neq a$ je chování v.k.
V okolí $x=a$ je chování ještě podezřelejší.

DÚ: Zkoumejte chování posledních dvou funkcí pro x jdoucí k 0 resp. k a zprava/zleva

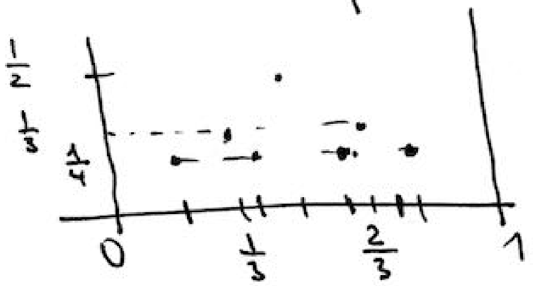
⑤ Dirichletova fce $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem

$$D(x) = \begin{cases} 0 & \text{je-li } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1 & \text{je-li } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Chování v okolí každého (tzn. libovolného) bodu je podezřelé, proč?

⑥ Riemannova funkce $R : \langle 0,1 \rangle \to \mathbb{R}$

$$R(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & x \in \mathbb{Q} \wedge x = \frac{p}{q} \quad p, q \text{ nesoudělná} \end{cases}$$



Motto: Těžko v Definici, lehko ve Větách
(Těžce na cvičišti, lehce na bojišti)

Def. (obecná definice limity) Buď $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (nebo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$). Nechť $A \in \mathbb{R}^*$ (nebo $\mathbb{C}^*$) a $x_0 \in \mathbb{R}^*$. Řekneme, že A je limitou f pro x jdoucí k x_0, píšeme $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, jestliže pro všechna $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že všechna x z prstencového δ-okolí x_0 se zobrazí do ε-ového okolí A:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \overset{df.}{=} (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\underbrace{(\forall x \in P_\delta(x_0))\ f(x) \in U_\varepsilon(A)}$$

$$\Updownarrow$$

$$f[P_\delta(x_0)] \subset U_\varepsilon(A)$$

[V definici je schována implicitně podmínka, že $P_\delta(x_0) \subset D_f$.]

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)([P_\delta(x_0) \subset D_f] \wedge [f(P_\delta(x_0)) \subset U_\varepsilon(A)])$$

[Omezíme se (až do odvolání) na vlastní limity ve vlastních bodech (pro jednoduchost a lepší pochopení)

Pak existuje přehršle ekvivalentních tvarů definice limity:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \iff (\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall x\in\mathbb{R})\,(0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon)$$

$$\iff (\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall x\in\mathbb{R})\,(0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|\le\varepsilon)$$

$$\iff (\exists \varepsilon_1>0)(\forall\, 0<\varepsilon\le\varepsilon_1)(\exists \delta>0)(\forall x\in\mathbb{R})\,(0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon)$$

$$\iff (\exists K>0)(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall x\in\mathbb{R})\,(0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<K\varepsilon)$$

Tyto tvary občas využijeme v důkazech.

$\boxed{\text{Ad Př. 2}}$ Ukažme z definice, že $\lim_{x\to a} f(x) = 2a$.
Nepřítel nám dodá $\varepsilon>0$ malé, libovolné. Po dodání je toto ε pro nás pevné. K němu hledáme $\delta>0$ tak, aby platilo
(*) $0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-2a|<\varepsilon$.
Avšak $f(x)=x+a$ pro $\forall x: 0<|x-a|<\delta$ a tak $|f(x)-2a|=|x-a|$.
Vidíme, že hledané δ lze zvolit $\delta=\varepsilon$ (a nebo číslo menší než ε) a pak (*) platí. ■

$\boxed{\text{Ad Př. 1}}$ Chceme ukázat, že $\lim_{x\to a} x^2 = a^2$ $(a>0)$ pro jednoduchost (sudá fce)
Opět obdržíme $\varepsilon>0$ nepříjemně malé, ale pevné.
Hledáme $\delta>0$ tak, aby platilo

$$x\in(a-\delta, a+\delta)\setminus\{a\} \Rightarrow x^2=f(x)\in(a^2-\varepsilon, a^2+\varepsilon)$$

Pozoruj: $x^2<a^2+\varepsilon \iff x\in\left(-\sqrt{a^2+\varepsilon}, \sqrt{a^2+\varepsilon}\right)$
$x^2>a^2-\varepsilon \iff x\in\left(-\infty, -\sqrt{a^2-\varepsilon}\right)\cup\left(\sqrt{a^2-\varepsilon}, +\infty\right)$ NAKRESLI SI OBRÁZEK

Tedy: je-li $x\in\left(\sqrt{a^2-\varepsilon}, \sqrt{a^2+\varepsilon}\right)$ pak $x^2\in(a^2-\varepsilon, a^2+\varepsilon)$

$\Updownarrow$

(•) je-li $x\in\left(a-a+\sqrt{a^2-\varepsilon}, a-a+\sqrt{a^2+\varepsilon}\right)$, pak $x^2\in(a^2-\varepsilon, a^2+\varepsilon)$

Označme $\delta_1 := a-\sqrt{a^2-\varepsilon}$ a $\delta_2 := \sqrt{a^2+\varepsilon}-a$, pak

(•) $\iff$ je-li $x\in(a-\delta_1, a+\delta_2)$, pak $x^2\in(a^2-\varepsilon, a^2+\varepsilon)$ ■

Hledané δ volím jako $\min\{\delta_1,\delta_2\}$.

Pozn. $\min\{\delta_1,\delta_2\}=\delta_1$.

Věta 1 (o jednoznačnosti limity neboli o smysluplnosti/korektnosti definice limity)
Nechť $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ a $\exists P_\delta(x_0) \subset D_f$. Pak existuje nejvýš jedna limita f v bodě x_0.

Dk Sporem. Kdyby existovaly dvě limity A_1 a A_2, tak platí:

(a) $\lim_{x \to x_0} f(x) = A_1$

(b) $\lim_{x \to x_0} f(x) = A_2$

(c) $A_1 \neq A_2$

Položme $\varepsilon = \frac{|A_1 - A_2|}{2}$.

Pak z (a) plyne: $\exists \delta_1 > 0$ tak, že $\forall x \in P_{\delta_1}(x_0)$ $|f(x) - A_1| < \varepsilon$

A z (b) plyne: $\exists \delta_2 > 0$ —"— $\forall x \in P_{\delta_2}(x_0)$ $|f(x) - A_2| < \varepsilon$

Pro $x \in P_{\delta_1}(x_0) \cap P_{\delta_2}(x_0)$:

$$0 < |A_1 - A_2| = |A_1 \underbrace{- f(x) + f(x)}_{=0} - A_2| \leq |f(x) - A_1| + |f(x) - A_2|$$
$$< 2\varepsilon = |A_1 - A_2|,$$

a z podtrženého plyne spor. ∎

Def. (Jednostranné limity) Buď $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (nebo $\mathbb{C}$). Nechť $A \in \mathbb{R}$ (nebo $\mathbb{C}$) a $x_0 \in \mathbb{R}$. Řekneme, že A je limitou $f(x)$ pro x jdoucí k x_0 $\begin{Bmatrix} \text{zprava} \\ \text{zleva} \end{Bmatrix}$, píšeme $\begin{Bmatrix} \lim_{x \to x_0+} f(x) \\ \lim_{x \to x_0-} f(x) \end{Bmatrix}$,

jestliže pro všechna $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna

$$\begin{Bmatrix} x \in P_\delta^+(x_0) = (x_0, x_0 + \delta) \\ x \in P_\delta^-(x_0) = (x_0 - \delta, x_0) \end{Bmatrix} \text{ platí } |f(x) - A| < \varepsilon$$

Symbolicky:

$$\lim_{x \to x_0 \pm} f(x) = A \overset{\text{df.}}{\equiv} (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in P_\delta^\pm(x_0))(|f(x) - A| < \varepsilon)$$

$\boxed{\text{Ad Př. 3}}$ $\lim_{x \to 0+} \operatorname{sgn} x = 1$ a $\lim_{x \to 0-} \operatorname{sgn} = -1$, což snadno ověříte z definice fce sgn a z definice jednostranné limity.

Q: Existuje $\lim_{x \to 0} \operatorname{sgn} x$?

Odpověď dává (mimojiné) následující věta.

Věta 2 Platí: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \iff \left(\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)=A\right) \wedge \left(\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)=A\right)$

Slovy: limita $f(x)$ pro $x\to x_0$ existuje a rovná se A právě když existují jednostranné limity $f(x)$ pro $x\to x_0+$ a pro $x\to x_0-$ a rovnají se A.

Dk $\boxed{\Rightarrow}$ je jednodušší. ROZMYSLETE.

$\boxed{\Leftarrow}$ $\varepsilon>0$ dáno, hledám δ. Z existence jednostranných limit však víme, že k danému $\varepsilon>0$ existují $\delta_1>0$ a $\delta_2>0$ tak, že

- $x\in(x_0,x_0+\delta_1) \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon$
- $x\in(x_0-\delta_2,x_0) \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon$

Pro $\delta:=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ máme: $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\setminus\{x_0\} \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon$,
Q.E.D. ■

$\boxed{\text{Ad Př. 3}}$ Ačkoliv $\lim\limits_{x\to 0+}\operatorname{sgn} x$ a $\lim\limits_{x\to 0-}\operatorname{sgn} x$ existují, tak $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sgn} x$ neexistuje, neboť $\lim\limits_{x\to 0+}\operatorname{sgn} x \neq \lim\limits_{x\to 0-}\operatorname{sgn} x$. ■

Vidíme, že limita fce vždy nemusí existovat. Výrok "limita $f(x)$ pro $x\to x_0$ existuje" znamená: $(\exists A\in\underset{\mathbb{R}}{\mathbb{C}})(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in P_\delta(x_0))(f(x)\in U_\varepsilon(A))$

Negací získáme výrok "limita $f(x)$ pro $x\to x_0$ neexistuje", který má tvar:

$$(*)\qquad (\forall A\in\underset{\mathbb{R}}{\mathbb{C}})(\exists\varepsilon>0)(\forall\delta>0)(\exists x\in P_\delta(x_0))\ \boxed{f(x)\notin U_\varepsilon(A)} \vee (x\notin D_f)$$

$\boxed{\text{Ad Př. 5}}$ Ukažme, že $\lim\limits_{x\to 1/2} D(x)$ neexistuje (neexistují ani $\lim\limits_{x\to 1/2\pm} D(x)$).

Použijeme $(*)$.

Pro $A\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, zvolme $\varepsilon<\min\{|A|,|A-1|\}$. Pak dokonce pro $\forall x\in\mathbb{R}$ platí $f(x)\notin U_\varepsilon(A)$ (neboť $f(x)=0$ nebo $f(x)=1$).
Je-li $A=\{0\}$ nebo $A=1$, pak zvolme $\varepsilon\in(0,\frac12)$. Je-li $A=0$, pak v libovolném $P_\delta(\frac12)$ leží $x_r\in\mathbb{Q}$ pro které však $f(x_r)=1\notin U_\varepsilon(0)$. Podobně, je-li $A=1$, pak v libovolném $P_\delta(\frac12)$ leží iracionální číslo $x_{ir}\in P_\delta(\frac12)$ pro které $f(x_{ir})=0\notin U_\varepsilon(1)$.

$\boxed{\text{Ad Př. 6}}$ Q: Existuje $\lim\limits_{x\to 1/2} R(x)$?

Řešitelé mohou odevzdat zpracované čitelné řešení přednášejícímu.

Věta 3 (Jak počítat limitu komplexní fce) Buď $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. $[f(x) = f_1(x) + i f_2(x)]$

Platí: $\lim_{x\to x_0} f(x) = A_1 + iA_2 \iff \left(\lim_{x\to x_0} f_1(x) = A_1\right) \wedge \left(\lim_{x\to x_0} f_2(x) = A_2\right)$

Dk $\boxed{\Rightarrow}$ $\varepsilon > 0$ dáno.

Víme: $(\exists \delta > 0)(\forall x \in P_\delta(x_0))$ $\underbrace{|(f_1(x) - A_1) + i(f_2(x) - A_2)|_{\mathbb{C}}}_{= |f(x) - A|_{\mathbb{C}}} < \varepsilon$

Tvrzení plyne ze skutečnosti

$$\left.\begin{matrix}|z_1| \\ |z_2|\end{matrix}\right\} \leq \sqrt{z_1^2 + z_2^2} = |z|_{\mathbb{C}}$$, což implikuje $|f_1(x) - A_1| < \varepsilon$, $|f_2(x) - A_2| < \varepsilon$

$\boxed{\Leftarrow}$ Nyní potřebujeme odhadnout $|f(x) - A|_{\mathbb{C}}$ pomocí $|f_1(x) - A_1|$ a $|f_2(x) - A_2|$.

Avšak

$$\begin{aligned}|f(x) - A|_{\mathbb{C}} &= |(f_1(x) - A_1) + i(f_2(x) - A_2)|_{\mathbb{C}} \\ &\leq |(f_1(x) - A_1)|_{\mathbb{C}} + |i(f_2(x) - A_2)|_{\mathbb{C}} \\ &= |f_1(x) - A_1| + |f_2(x) - A_2|\end{aligned}$$ ∎

Proč tato nerovnost stačí k důkazu implikace?

Věta 4 Buď $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ a $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$. Pak $\lim |f(x)|_{\mathbb{C}} = A$

Dk plyne z nerovnosti $\left| |f(x)|_{\mathbb{C}} - |A|_{\mathbb{C}} \right| \leq |f(x) - A|_{\mathbb{C}}$ ∎

viz Tvrzení 12 a 14.

Definice Buď $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ a $A \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že

f je omezená na A $\equiv (\exists K > 0)(\forall x \in A)\ |f(x)|_{\mathbb{C}} \leq K$

(všechny funkční hodnoty $f(x)$ pro $x \in A$ leží v kouli o poloměru K)

Následující dvě věty říkají, zhruba řečeno, že pokud má f v x_0 limitu, pak se chová v okolí x_0 kulturně.

Věta 5 Nechť $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ má v x_0 limitu, pak existuje $P_\delta(x_0)$ tak, že f je omezená na $P_\delta(x_0)$. Neboli

$\lim_{x\to x_0} f(x) = A_{\in \mathbb{C}} \Rightarrow (\exists K > 0)(\exists P_\delta(x_0))(\forall x \in P_\delta(x_0))\ |f(x)|_{\mathbb{C}} \leq K$.

Dk K $\varepsilon = 1$ $\exists P_\delta(x_0)$ tak, že $\forall x \in P_\delta(x_0)$ $|f(x) - A|_{\mathbb{C}} < 1$. Pak

$$|f(x)|_{\mathbb{C}} = |\underbrace{f(x) - A} + A|_{\mathbb{C}} \underset{\Delta\text{-ner.}}{\leq} |f(x) - A|_{\mathbb{C}} + |A|_{\mathbb{C}} < |A|_{\mathbb{C}} + 1 =: K,$$

což dává tvrzení. ∎

Věta 6 Buď $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ a nechť $\lim_{x\to x_0} f(x) = A \neq 0$. Pak existuje $P_\delta(x_0)$: $\forall x \in P_\delta(x_0)$ je $|f(x)|_{\mathbb{C}} \geq \frac{|A|_{\mathbb{C}}}{2} > 0$.

Dk: K $\varepsilon = \frac{|A|}{2}$ $(\exists \delta > 0)(\forall x \in P_\delta(x_0))$ je $|f(x) - A|_{\mathbb{C}} < \frac{|A|_{\mathbb{C}}}{2}$.

Avšak, $|f(x) - A|_{\mathbb{C}} \geq \big||f(x)|_{\mathbb{C}} - |A|_{\mathbb{C}}\big| = \pm\left(|f(x)|_{\mathbb{C}} - |A|_{\mathbb{C}}\right)$ speciálně

$$|f(x) - A|_{\mathbb{C}} \geq |A|_{\mathbb{C}} - |f(x)|_{\mathbb{C}}$$

Odtud
$$|f(x)| \geq |A|_{\mathbb{C}} - |f(x) - A|_{\mathbb{C}} \geq |A|_{\mathbb{C}} - \frac{|A|_{\mathbb{C}}}{2} = \frac{|A|_{\mathbb{C}}}{2}. \quad \blacksquare$$

Věta 7 (o limitě $+, -, \cdot, \div$) Buď $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ a $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ a $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$.
Pak platí:

(α) $\lim_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$

(β) $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = AB$

(γ) Je-li $B \neq 0$, pak $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$.

[Tvrzení (α), (β), (γ) obsahují dvě informace: (i) limity součtu, rozdílu, součinu a podílu existují, a (ii) víme i čemu se rovnají.

Dk $\boxed{\text{Ad } (\alpha)}$
$$|f(x) + g(x) - (A+B)| \leq \underbrace{|f(x) - A|}_{\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|g(x) - B|}_{\frac{\varepsilon}{2}}$$

$\boxed{\text{Ad } (\beta)}$
$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - AB| &= |f(x)(g(x) - B) + (f(x) - A)B| \\ &\leq |f(x)(g(x) - B)| + |(f(x) - A)B| \\ &\leq \underbrace{|f(x)|}_{\leq K} \underbrace{|g(x) - B|}_{\frac{\varepsilon}{2K}} + \underbrace{|f(x) - A|}_{\frac{\varepsilon}{2|B|}} |B| < \varepsilon \end{aligned}$$

dle V5 $\rightarrow \leq K$; $\frac{\varepsilon}{2K}$ (z $\lim g(x) = B$); $\frac{\varepsilon}{2|B|}$ (z $\lim f(x) = A$)

$x \in P_{\delta_1}(x_0)$ $\quad x \in P_{\delta_2}(x_0)$ $\quad x \in P_{\delta_3}(x_0)$

$\boxed{\text{Ad } (\gamma)}$ Dle (β) stačí ukázat:
$$\lim_{x\to x_0} g(x) = B \neq 0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{B}$$

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}\right|_{\mathbb{C}} = \left|\frac{g(x) - B}{g(x)B}\right|_{\mathbb{C}} = \frac{|g(x) - B|_{\mathbb{C}}}{|g(x)|_{\mathbb{C}} |B|_{\mathbb{C}}} \leq \frac{2}{|B|_{\mathbb{C}}^2} \underbrace{|g(x) - B|_{\mathbb{C}}}_{< \frac{\varepsilon |B|_{\mathbb{C}}^2}{2}} < \varepsilon.$$

Dle V6 totiž víme, že $|g(x)|_{\mathbb{C}} \geq \frac{|B|_{\mathbb{C}}}{2}$ na jistém okolí x_0

A existence $\lim g(x) = B$. $\blacksquare$

Příklad Z konstrukce fcí $x^m, \frac{1}{x^m}$ pozorujeme, že z vlastnosti

$\lim\limits_{x\to a} x = a$ (zkuste si snadno dokázat/ověřit z definice)

ve spojení s větou o limitě součinu plyne

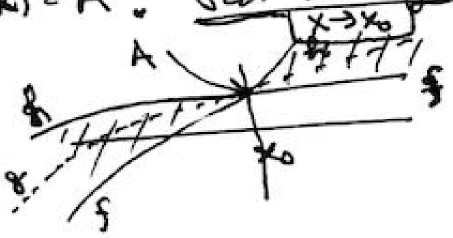
$$\lim_{x\to a} x^2 = \lim_{x\to a} x\cdot x = \lim_{x\to a} x \lim_{x\to a} x = a\cdot a = a^2 \quad \text{a obecněji}$$

$$\lim_{x\to a} x^m = a^m \quad \text{a} \quad \lim_{\substack{x\to a\\ a\neq 0}} x^{-m} = \frac{1}{a^m}.$$

Věta 8 (sendvičové tvrzení o dvou strážnících) Buď $x_0\in\mathbb{R}$ a $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ takové, že

$$f(x) \le g(x) \le h(x) \qquad \forall x\in P_\delta(x_0)$$

Nechť $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ a $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A$. Pak $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$.



Q: Proč jsou zobrazení f,g,h do $\mathbb{R}$ (a nikoliv do $\mathbb{C}$)?

Dk: Víme

$$A-\varepsilon \le f(x) \le A+\varepsilon \qquad \forall x\in P_{\Delta_1}(x_0)$$
$$A-\varepsilon \le h(x) \le A+\varepsilon \qquad \forall x\in P_{\Delta_2}(x_0)$$

Pro $x\in P_\delta(x_0)\cap P_{\Delta_1}(x_0)\cap P_{\Delta_2}(x_0)$:

$$A-\varepsilon \le f(x) \le g(x) \le h(x) \le A+\varepsilon \Rightarrow |g(x)-A|<\varepsilon \qquad \blacksquare$$

$\boxed{\text{Př. 6}}$ Víme, že $\lim\limits_{x\to x_0} D(x)$ neexistuje pro libovolné x_0. Avšak

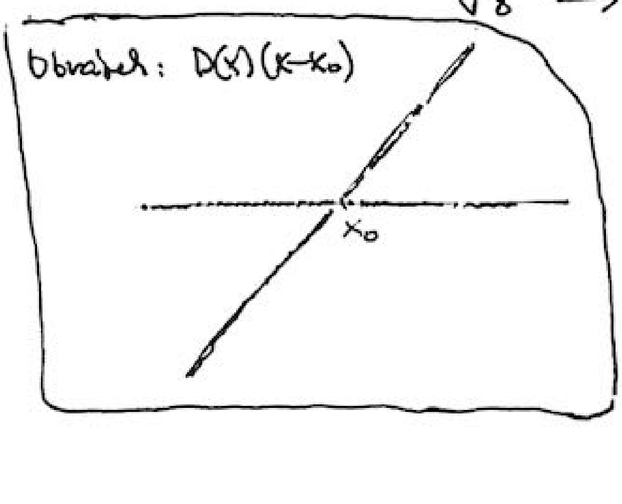
$$\lim_{x\to x_0} D(x)(x-x_0) = 0.$$

Vskutku:

$$-|x-x_0| \le D(x)(x-x_0) \le |x-x_0|$$

pro $x\to x_0$: $\quad -|x-x_0| \downarrow 0, \quad |x-x_0| \downarrow 0$

$$\text{V8} \Longrightarrow \lim_{x\to x_0} D(x)(x-x_0) = 0.$$



Uvažujme $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a $g: \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ $(\mathbb{R})$. Nechť
$\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ a $\lim_{y\to A} g(y) = B$.
Následující příklad ukazuje, že tyto předpoklady ještě nestačují
aby $\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = B$.

<u>Příklad 7</u> Buď $f(x) = D(x)(x-x_0)$ a $g(y) = \begin{cases} 1 & \text{pro } y=0 \\ y^2 & \text{pro } y\neq 0 \end{cases}$

Pak $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ a $\lim_{y\to 0} g(y) = 0$

ale $\lim_{x\to x_0} (g\circ f)(x)$ <u>neexistuje</u> neboť v libovolném $P_\delta(x_0)$

- existují body, kde $g(f(x)) = 1$ $(x\in\mathbb{Q})$
- existují body, kde $g(f(x)) = (x-x_0)^2$ $(x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$

Q: K zamyšlení: která fce to kazí? g nebo f?

<u>Věta 9</u> (1. věta o limitě složené fce) Nechť $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a $g: \mathbb{R}\to\mathbb{C}$.
<u>Nechť</u>: (i) $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$; (ii) $\lim_{y\to A} g(y) = B$ a (iii) $(\exists P_{\delta^*}(x_0))(\forall x\in P_{\delta^*}(x_0))$ $f(x)\neq A$

Pak $\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = B$

Dk Chceme ukázat, že
$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in P_\delta(x_0))\ g(f(x))\in U_\varepsilon(B)$.

Přitom víme:
(1) $(\forall\varepsilon>0)(\exists\Delta>0)(\forall y\in P_\Delta(A))\ g(y)\in U_\varepsilon(B)$
(2) $(\forall\Delta>0)(\exists\tilde\delta>0)(\forall x\in P_{\tilde\delta}(x_0))\ f(x)\in U_\Delta(A)$
(3) $(\exists\delta^*>0)(\forall x\in P_{\delta^*}(x_0))\ f(x)\neq A$

Z (2) a (3) ihned plyne volbou $\delta := \min\{\tilde\delta, \delta^*\}$
(4) $(\forall\Delta>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in P_\delta(x_0))\ f(x)\in P_\Delta(A)$

což ve spojení s (1) dává výrok, který jsme chtěli ukázat. ∎

Věta 9 naznačuje, že problematická funkce je funkce f a že je třeba se vyvarovat situacím, kdy f má v libovolně malém okolí x_0 body, které se zobrazují fcí f do A. To je však také proto, že z předpokladů Věty 9 neplyne žádná informace o chování fce g v bodě A.
Nyní si ukážeme, jaká vlastnost g v bodě A stačí k tomu aby $\boxed{\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)}$ aniž bychom požadovali předpoklad (iii) Věty 9.

Podíváme-li se na podmínky (1) a (2) v důkazu předchozí věty, vidíme, že problém, proč podmínky (i) a (ii) nestačí na existenci $\lim_{x\to x_0} g(f(x))$, spočívá v tom, že

- y v (1) lze brát jen z prstencového okolí A

zatímco

- f(x) v (2) patří do úplného okolí A

To jsme v předchozí větě ošetřili existencí okolí x_0, jehož body se nemohly zobrazit do A zobrazením f.
Problém lze však ošetřit i jinak (a tato varianta bude pro nás častokrát vhodnější). Můžeme totiž požadovat, aby hodnoty g(y) pro úplné okolí bodu A patřily do $U_\varepsilon(B)$, neboli aby také $g(A) \in U_\varepsilon(B)$ (pro $\forall \varepsilon>0$). To však znamená, že $g(A)=B$, neboli místo (ii) budeme požadovat

$$\lim_{y\to A} g(y) = g(A)$$

což říká, že (nejenže) $\lim_{y\to A} g(y)$ existuje, ale navíc se tato limita rovná $g(A)$. Této vlastnosti se říká spojitost g v bodě A.
Z našich úvah plyne tedy:
Věta 10 (2. věta o limitě složené funkce) Nechť $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a $g: \mathbb{R}\to\mathbb{C}$. Nechť (i) $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ a (ii) $\lim_{y\to A} g(y) = g(A)$ (tj. g je spojitá v A). Pak

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(A) = g\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right).$$

Dk. Chceme ukázat: $(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall x\in P_\delta(x_0))\ |g(f(x))-g(A)|<\varepsilon$

Přitom z (ii) plyne (*) $(\forall \varepsilon>0)(\exists \Delta>0)(\forall y\in U_\Delta(x_0))\ |g(y)-g(A)|<\varepsilon$

a z (i) plyne (**) $(\forall \Delta>0)(\exists \delta>0)(\forall x\in P_\delta(x_0))\ (f(x)\in U_\Delta(x_0))$,

což dává tvrzení neboť k danému $\varepsilon>0$, najdu z (*) $\Delta>0$ tak, že (*) platí. K tomuto $\Delta>0$, aplikuji (**) a najdu $\delta>0$ tak, že (**) platí. Tzn. pro $x\in P_\delta(x_0)$ jsou $f(x)\in U_\Delta(x_0)$ a dle (*) musí platit pro $y=f(x)$ $|g(f(x))-g(A)|<\varepsilon$.

$\boxed{\text{Ad Příklad 7}}$ Buď $f(x)=D(x)(x-x_0)$ a nechť nyní $g(y)=y^2$ $\forall y\in\mathbb{R}$.

Víme, že $\lim_{y\to 0} g(y)=0=g(0)$ a tak $\lim_{x\to x_0} g(f(x))=g(\lim_{x\to x_0} f(x))$
$=g(0)=0.$

Def. (SPOJITOST FUNKCE V BODĚ x_0) Buď $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ a $x_0\in\mathbb{R}$.
Řekneme, že f je spojitá v x_0 $\overset{\text{df}}{\equiv}$ $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ tzn.

$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x: |x-x_0|<\delta)(|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon)$

$\Updownarrow$

$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in U_\delta(x_0))(f(x)\in U_\varepsilon(f(x_0)))$

$\boxed{\text{Příklady}}$

(a) $f(x)=x$ či $f(x)=kx$ $(k\in\mathbb{R})$ jsou spojité v každém $x\in\mathbb{R}$

(b) $f(x)=C\in\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$ je — " — — " —.

C ↖ konstanta

Obojí je jednoduché ověřit přímo z definice spojitosti. ⌋

Definice spojitosti vyžaduje (implikuje):
(1) f je definována v x_0
(2) $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existuje a je vlastní
(3) tato $\lim_{x\to x_0} f(x)$ se rovná $f(x_0)$

Navíc (2) vyžaduje, aby f byla definována na okolí x_0.

Neboli:
- není-li f definována v x_0 $\Rightarrow$ f není spojitá v x_0
- jsou-li $\lim_{x\to x_0+} f(x)$, $\lim_{x\to x_0-} f(x_0)$ různé nebo nevlastní
  $\Rightarrow$ f není spojitá v x_0
- je-li $\lim_{x\to x_0} f(x)$ různá od $f(x_0)$
  $\Rightarrow$ f není spojitá v x_0.

Příklady

c) Protože $f(x)=x^2$ je sudá, a $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \underset{f(a)}{\overset{\shortparallel}{a^2}}$, tak x^2 je spojitá v každém $x\in\mathbb{R}$.

d) $f(x) = \dfrac{x^2-a^2}{x-a}$ v $\mathbb{R}\setminus\{a\}$ není v a spojitá

e) $$f(x) \overset{df}{=} \begin{cases} \dfrac{x^2-a^2}{x-a} & x \neq a \\ 2a & x = a \end{cases}$$ je spojitá v každém $x\in\mathbb{R}$.

zatímco
$$f(x) \overset{df}{=} \begin{cases} \dfrac{x^2-a^2}{x-a} & x \neq a \\ \ell & x = a \end{cases}$$
kde $\ell \neq 2a$. není spojitá v a.

f) • Dirichletova fce není spojitá v žádném $x\in\mathbb{R}$.

• $x \mapsto (x-x_0)D(x)$ je spojitá v x_0
není spojitá ($\Leftrightarrow$ je nespojitá) v $\forall x\in\mathbb{R}$ $x\neq x_0$.

g) Platí: $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} R(x) = 0 \quad \text{pro } \forall x_0 \in (0,1)}$

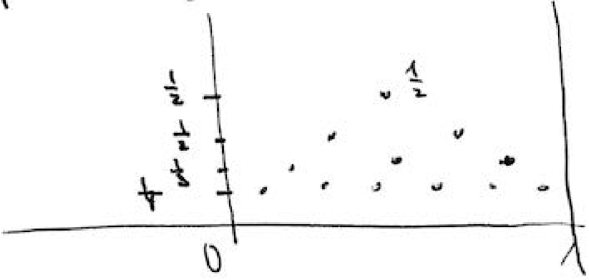
Odtud Riemannova fce je spojitá $\forall x \in (0,1)\setminus \mathbb{Q}|_{(0,1)}$
je nespojitá $\forall x\in \mathbb{Q}|_{(0,1)}$.

$\boxed{\text{Dk } \square}$ Buď $x_0\in(0,1)$ lib. a $\varepsilon>0$ lib., pevné.
Hledáme $\delta>0$ tak, že $\forall x\in P_\delta(x_0)$ bude $|\underset{R(x)}{\overset{\shortparallel}{R(x)}}|<\varepsilon$

Avšak k danému $\varepsilon>0$ $\exists\, m\in\mathbb{N}$: $m>\frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \varepsilon > \frac{1}{m}$

Pak však jen pro konečný počet bodů x_i platí $R(x_i)\geq\varepsilon$.
Počet bodů závisí na ε, označme jej $N(\varepsilon)$*). Definujme
$$\delta = \min\{|x_0-x_i|;\ i\in\{1,\dots,N(\varepsilon)\}\}.$$
Pak určitě pro $x\in P_\delta(x_0)$ platí $R(x)<\varepsilon$. ▯

*) Určitě $N(\varepsilon) < m^2$, viz obrázek.



Věta 11 Nechť $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ a $g: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ jsou spojité v $x_0 \in \mathbb{R}$. Pak fce $\boxed{f \pm g, fg}$ jsou spojité v x_0. Je-li navíc $g(x_0) \neq 0$, pak fce $\boxed{\frac{f}{g}}$ je spojitá v x_0.
Konečně, je-li $f: \mathbb{R} \to \underline{\underline{\mathbb{R}}}$ a $g: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ a je-li f spojitá v x_0 a g spojité v $f(x_0)$, pak $\boxed{g \circ f}$ je spojitá v x_0.

Dk. . . Plyne z Věty 7 a Věty 10.

Příklady ① Pro $n \in \mathbb{N}$: $P_n(x) \stackrel{df.}{=} a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

kde $a_i \in \mathbb{C}$.

Pak P_n se nazývá polynom nejvýše n-tého stupně.
Je-li $a_n \neq 0$, pak P_n je polynom stupně n.

Z Věty 11 a předchozích úvah plyne P_n je spojitá fce v každém $x \in \mathbb{R}$.

② Buďte $P_n: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ a $Q_m: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dva polynomy.
Pak $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ se nazývá racionální fce definovaná na $D_R := \{x \in \mathbb{R}; Q_m(x) \neq 0\}$

a dle Věty 10 a Př① je R spojitá v $x \in D_R$.