L7 ROVNICE VEDENÍ TEPLA

Připomeňme, že umíme vyřešit nehomogenní Cauchyho úlohu, viz strany 16/13–15 či PDR/41–43. Víme také, že fundamentální řešení má tvar

$$\phi(t,x) = \frac{H(t)}{(4\pi t)^{d/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \qquad (H - \text{Heaviside})$$

Toto řešení, nalezené dříve pomocí Fourierovy transformace, lze nalézt také metodou samopodobnosti (self-similarity):

Buď $u = u(t,x)$ řešení evoluční rovnice $Lu = 0$. Řekneme, že $u_\lambda(t,x) := \lambda^\beta u(\lambda^\alpha t, \lambda x)$ pro $\lambda > 0$ a α, β nějaké reálné, je samopodobné řešení, pokud $Lu_\lambda = 0$.

Je jednoduché nahlédnout, že $u_\lambda(t,x) = u(\lambda^2 t, \lambda x)$ řeší rovnici vedení tepla, pokud u řeší rovnici vedení tepla. Vidíme, že čas se škáluje jinak než prostorové proměnné. Motivováni tímto pozorováním, zkusme hledat řešení rce vedení tepla ve tvaru

$$v(t,x) = \frac{1}{t^\gamma} V\left(\frac{|x|}{\sqrt{t}}\right) \qquad V : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$$

Po dosazení do $\frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = 0$ dostáváme:

$$0 = \left[-\frac{1}{2}\frac{|x|}{t^{3/2}} V'(\cdot) - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(V'(\cdot)\frac{x_i}{|x|\sqrt{t}}\right)\right]\frac{1}{t^\gamma} - \gamma\frac{V(\cdot)}{t^{\gamma+1}}$$

$$= \left[-\frac{1}{2}\frac{|x|}{t^{3/2}} V' - V''(\cdot)\frac{1}{t} - \frac{V'(\cdot)}{t^{1/2}}\left(\frac{d}{|x|} - \frac{1}{|x|}\right)\right]\frac{1}{t^\gamma} - \gamma\frac{V(\cdot)}{t^{\gamma+1}}$$

$$\Rightarrow \boxed{V''(y) + V'(y)\left(\frac{y}{2} + \frac{(d-1)}{y}\right) + \gamma V(y) = 0} \qquad y := \frac{|x|}{\sqrt{t}}$$

Vynásobme při y^{d-1} a volme $\gamma = \frac{d}{2}$, pak dostáváme

$$\boxed{\left(y^{d-1} V'(\cdot)\right)' + \frac{1}{2}\left(y^d V(\cdot)\right)' = 0}$$

Tedy

$$y^{d-1} V'(\cdot) + \frac{1}{2} y^d V(\cdot) = \text{konst.}$$

Předpokládáme: $V(y) \to 0$ a $V'(y) \to 0$ pro $|y| \to +\infty$ dostatečně rychle tak, že konst. $= 0$

Tedy

$$V'(y) + \frac{y}{2} V(y) = 0 \iff V(y) e^{\frac{y^2}{4}} = C \quad \Rightarrow \boxed{v(t,x) = \frac{C}{t^{d/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}$$

▶ $\boxed{\text{Řešení Cauchyho úlohy pro obecnou nehomogenní rci vedení tepla}}$

Uvažujme lineární evoluční PDR $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f$ v celém prostoru $\mathbb{R}^d$. Cílem je nalézt řešení tzv. Cauchyho úlohy, tedy hledám řešení rovnice v celém prostoru $\mathbb{R}^d$ s zadanou počáteční podmínkou v čase $t=0$. Tedy

<u>Cauchyho úloha pro rovnici vedení tepla</u>

nalézt $u : (0,T) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ splňující

$$(T) \quad \left[\begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & v\ (0,\infty) \times \mathbb{R}^d \\ u(0,\cdot) = u_0 & v\ \mathbb{R}^d, \end{array} \right.$$

kde $f : (0,T) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ a $u_0 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ jsou <u>data</u> jež tedy <u>daná</u> libovolně.

Úloha (T) je lineární (Proč?) a lze ji získat z rovnice bilancující energii v termodynamice kontinua:

$$\frac{\partial e}{\partial t} + v \cdot \nabla e = \mathbb{T} \cdot \frac{(\nabla v + (\nabla v)^T)}{2} - \operatorname{div} \vec{q} + r$$

za předpokladu, že těleso je v klidu a tak rychlost $\vec{v} = 0$ a vnitřní energie e je úměrná teplotě u (tj. $e = c_v u$, kde $c_v > 0$ je měrné teplo při konstantním objemu) a tepelný tok $\vec{q}$ je nepřímo úměrný gradientu teploty (tj. $\vec{q} = -\kappa \nabla u$, kde $\kappa > 0$ je koeficient tepelné vodivosti). Pak

$$c_v \frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \Delta u = r,$$

kde r je daný objemový zdroj (radiace). [Symbol $\mathbb{T}$ uvedený výše představuje tensor napětí.]

Předpokládejme, že pro $\forall\, \tau > 0$ je $f(\tau,\cdot) \in \mathcal{S}$ a také $u_0 \in \mathcal{S}$. Hledáme řešení splňující (T) tak, aby

$$u(t,\cdot) \in \mathcal{S} \quad \text{pro } t > 0.$$

Řešení budeme hledat tak, že na rovnici vedení tepla aplikujeme Four. transformaci, tj. násobím rovnici $e^{-2\pi i x \cdot s}$ integruji přes $\mathbb{R}^d$ vzhledem <u>x</u>. Dostáváme:
(Čas t je nyní pro nás parametr.)

$$(\hat{T})\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \hat{u}}{\partial t}(t,s) + (2\pi)^2|s|^2\,\hat{u}(t,s) = \hat{f}(t,s) & \text{v } (0,\infty)\times\mathbb{R}^d \\ \hat{u}(0,s) = \hat{u}_0(s) & \text{v } \mathbb{R}^d \end{cases}$$

Zdánlivě jsme si příliš nepolepšili. Opak je však pravdou. V $(\hat{T})$ již nemáme Laplaceův operátor a na $(\hat{T})_1$ se lze dívat jako na ODR pro $\hat{u}$, kde proměnná je čas a $s\in\mathbb{R}^d$ je parametr. Rovnici $(\hat{T})$ vyřešíme integračním faktorem $e^{(2\pi)^2|s|^2 t}$, tj. $(\hat{T})_1$ vynásobíme a dostaneme

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\hat{u}(t,s)\, e^{(2\pi)^2|s|^2 t}\right) = \hat{f}(t,s)\, e^{(2\pi)^2|s|^2 t}$$

Integrací přes čas od 0 do t a s použitím $(\hat{T})_2$ dostáváme

$$\hat{u}(t,s)\, e^{(2\pi)^2|s|^2 t} - \hat{u}_0(s) = \int_0^t \hat{f}(\tau,s)\, e^{(2\pi)^2|s|^2\tau}\, d\tau,$$

což po vynásobení $e^{-(2\pi)^2|s|^2 t}$ vede k vztahu

$$(*)\qquad \hat{u}(t,s) = \hat{u}_0(s)\, e^{-(2\pi)^2|s|^2 t} + \int_0^t \hat{f}(\tau,s)\, e^{-(2\pi)^2|s|^2(t-\tau)}\, d\tau$$

V tomto okamžiku jsme našli řešení úlohy, ale to řešení máme popsané v obrazu Fourierovy transformace. Potřebujeme tedy aplikovat na $(*)$ inverzní Four. transf. Pokud platí Fourierova inverzní věta (což předpokládáme), tak na levé straně $(*)$ dostaneme u. Napravo máme součiny, které chceme dostat do tvaru součinu dvou Fourierových transformací a pak použijeme výsledek, že Four. transformace konvoluce je součin Four. transformací jednotlivých funkcí.

Snadno si z Příkladu 3*) ověříme, že — volíme $\lambda = 4t$

$$e^{-4\pi^2 t|s|^2} = \mathcal{F}_s\left[\frac{1}{(4\pi t)^{d/2}}\, e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\right]$$

Definujme

$$\boxed{G(t,x) = G_t(x) := \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}}\, e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}$$

čas t má roli parametru, proto dvojí značení

Viz kapitola 16, NOFY162.

Pak (*) přepíšeme do tvaru

$$(*)_{mod} \qquad \hat u(t,s) = \hat u_0(s)\,\widehat{G_t(x)}(s) + \int_0^t \hat f_\tau(s)\,\widehat{G_{t-\tau}}(s)\,d\tau$$

z věty 1.2 (ii), pak $(*)_{mod}$ přepíšeme do tvaru

$$\hat u(t,s) = \widehat{u_0 * G_t}(s) + \int_0^t \widehat{f(\tau,\cdot) * G_{t-\tau}(\cdot)}(s)\,d\tau$$

Aplikací Inverzní Fourierovy transformace nakonec dostaneme

$$(\check{R}) \qquad \boxed{u(t,x) = (u_0 * G_t)(x) + \int_0^t \big(f(\tau,\cdot) * G_{t-\tau}\big)(x)\,d\tau}$$

což je hledané řešení pro libovolné u_0 a f.

Dosadíme-li explicitní vzorec pro G_t, dostaneme

$$\boxed{u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} u_0(y)\,\frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{d/2}}\,dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} f(\tau,y)\,\frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-\tau)}}}{(4\pi(t-\tau))^{d/2}}\,dy\,d\tau}$$

Gaussián G_t se také nazývá Fundamentální řeš. rovnice vedení tepla. Má několik význačných vlastností (viz následující) Lemma a řeší $\left[\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \text{ s } u(0,\cdot) = \delta_0\right]$ jak vidíme později.

Diracova distribuce v poč.

Lemma (Důležité vlastnosti Gaussiánu G_t)

(1) $\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[G_t]] = G_t$

(2) $G_t \geq 0$

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty} G_t(x)\,dx = 1$ (rozdělení 1)

(4) $\lim_{t\to 0+} G_t(x) = 0$ if $x \neq 0$ (konvergence je stejnoměrná na $|x| \geq \varepsilon$ pro $\forall \varepsilon > 0$)

(5) $\lim_{t\to 0+} G_t * u_0 = u_0$ (NABÝVÁNÍ POČ. PODMÍNKY ŘEŠENÍM ($\check{R}$*))

Dk (1)–(4) si proveďte sami pomocí Př. 3, cvičení!

Ad (5) Platí

$$z = \frac{y-x}{2\sqrt{t}} \iff y_i = x_i + 2\sqrt{t}\,z_i$$

$$(G_t * u_0)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}}\,e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\,u_0(y)\,dy = \frac{1}{(\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|z|^2}\,u_0(x+2\sqrt{t}z)\,dz$$

záměnou $\lim_{t\to 0}$ a $\int_{\mathbb{R}^d}$, pomocí Lebesgueovy věty, dokážeme tvrzení. ∎

$\frac{\partial v}{\partial t} - \Delta u = 0$

Pro řešení tepelné rovnice platí podobné vlastnosti jako pro harmonické funkce, ale teorie je komplikovanější, jak technicky, tak z pohledu důkazů jednotlivých tvrzení. Uvedeme si některá tvrzení bez důkazu a poté dvě věty o (dopředné a zpětné) jednoznačnosti dokázané energetickými metodami.

$$Q_T := (0,T] \times \Omega, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^d \quad \text{časoprostorový válec}$$

$$\Sigma_T = \underbrace{(0,T] \times \partial\Omega}_{\text{plášť válce}} \cup \underbrace{\{0\} \times \Omega}_{\text{podstava}}$$

Věta o střední hodnotě platí, ale vzorec je komplikovaný. Souvislost s

$$(\circledcirc) \qquad u(x) = \fint_{B_\rho(x)} u(y)\,dy$$

je následující (pro jednoduchost v $d=3$)

Fundamentální řeš. $-\Delta u = 0$ je $\frac{1}{4\pi|y-x|} =: \phi(y-x)$

Vztah $(\circledcirc)$ lze zapsat:

$$(\circledcirc\circledcirc) \qquad u(x) = \frac{1}{|B_\rho(x)|} \int_{\{y;\, \phi(y-x) > \frac{1}{4\pi\rho}\}} u(y)\,dy = \frac{1}{|B_1(0)|\rho^d} \int_{\{y;\, \phi(y-x) > \frac{1}{4\pi\rho}\}} u(y)\,dy$$

Tento vztah již bude mít analogii pro $\frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = 0$.

Tvrzení 7.1 Buď $u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in C(\overline{Q_T})$. Pak pro $t \in (0,T]$ a $x \in \Omega$:

Věta o průměru

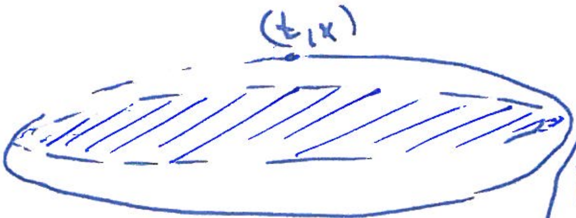
$$\boxed{u(t,x) = \frac{1}{4\rho^d} \iint_{E_\rho(t,x)} u(y,s) \frac{|x-y|^2}{(t-s)^2}\,dy\,ds \qquad \forall E_\rho(t,x) \subset Q_T}$$

kde

$$E_\rho(t,x) := \left\{ (s,y) \in \mathbb{R}^{d+1} \;\middle|\; s \le t,\ \phi(t-s, x-y) \ge \frac{1}{\rho^d} \right\}$$

tepelná koule.

$$\phi(t-s, x-y) := \frac{H(t-s)}{4\pi(t-s)^{d/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}}$$



Opět jako v eliptickém případě v dvě dimenze měří, neboť čas se škáluje jako 2 prostorové proměnné

Pozor! t může být T

Tvrzení 7.2 Buď $u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in C(\overline{Q_T})$ řešení $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0$ v Q_T.

(1) Pak
$$\max_{\overline{Q_T}} u = \max_{\Sigma_T} u$$

(2) Je-li navíc Ω souvislá a $\exists\, (t^0, x^0) \in Q_T$ tak, že
$$u(t^0, x^0) = \max_{\overline{Q_T}} u$$
pak u je konstantní v $\overline{Q_{t_0}}$.

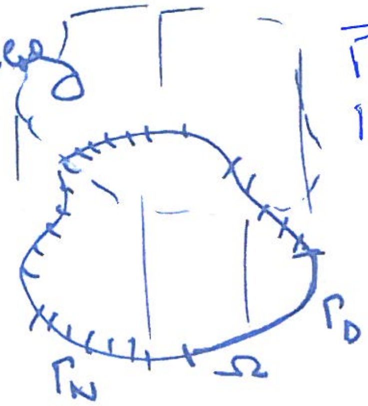
Odtud opět plyne pozorování, že rychlost šíření zápachu (víme tepla) je nekonečná.

Je-li $u \in C^1([0,T], C^2(\Omega)) \cap C(\overline{Q_T})$ taková, že řeší
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 & \text{v } Q_T \\ u = 0 & \text{na } (0,T)\times\partial\Omega \\ u = u_0 & \text{na } \{0\}\times\Omega \end{cases}$$
a $u_0 \geq 0$, pak $u > 0$ všude v Q_T je-li $u_0 > 0$ někde v Ω. [Platí-li opak, tj. u v nějakém $(t^0, x^0) \in (0,T)\times\Omega$ je 0, pak dle principu minima $u \equiv 0$ v $(0,t^0)\times\Omega$ a rovněž ↯ $u_0 > 0$]

▶ Platí tvrzení o lokálních odhadech, hladkosti a analytičnosti řešení.

▶ Jednoznačnost počáteční a okrajové úlohy

$$(*) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & \text{v } (0,T)\times\Omega \\ u = u_D & \text{na } (0,T)\times\Gamma_D \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = u_N & \text{na } (0,T)\times\Gamma_N \\ u = u_0 & \text{v } \{0\}\times\Omega \end{cases}$$



$\overline{\Gamma_D \cup \Gamma_N} = \partial\Omega$
$\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$

Věta 7.3 (JEDNOZNAČNOST) Buď $u \in C(\overline{Q_T})$ se spojitými prvními a druhými derivacemi řešení (*). Pak toto řešení je jediné!

Dk: Kdyby existovaly dvě řeš. u^1, u^2, pak $w := u^1 - u^2$ splňuje homogenní tepelnou rci s nulovými daty, pak
$$0 = \int_\Omega \left(\frac{\partial w}{\partial t} - \Delta w\right) w \, dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|_2^2 + \int_\Omega |\nabla w|^2 dx.$$
Integrací přes čas od 0 do t:
$$\to \|w(t)\|_2^2 + 2\int_0^t \int_\Omega |\nabla w|^2 dx\, ds = 0 = \|w(0)\|_2^2 \Rightarrow w(t) \equiv 0 \quad \forall t > 0.$$
☐

$\boxed{\text{Věta 4.19}}$ (Zpětná jednoznačnost) Nechť u_1 a $u_2 \in \mathcal{C}^2(\overline{Q_T})$ ŘeŠ

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \quad v\ (0,T)\times\Omega$$
$$u = u_D \quad na\ (0,T)\times\partial\Omega$$

a

$$u_1(x,T) = u_2(x,T) \quad (\forall x\in\Omega)$$

Pak

$$u_1 \equiv u_2 \quad v\ Q_T.$$

Dk • Označ $w := u_1 - u_2$ a $e(t) = \|w(t)\|_2^2$

přípravné práce

Pak $\dot e(t) = -2\|\nabla w\|_2^2$ a $\ddot e(t) = -4\int_\Omega \nabla w\cdot\nabla w_t = 4\int_\Omega \Delta w\, w_t$

$$= 4\|\Delta w\|_2^2$$

Protože $w=0$ na $\partial\Omega$

$$\int|\nabla w|^2 = -\int w\Delta w \le \|w\|_2\|\Delta w\|_2$$

Tedy

$$\underline{(\dot e(t))^2} = 4\|\nabla w\|_2^4 \le 4\|w\|_2^2\|\Delta w\|_2^2 = \underline{e(t)\,\ddot e(t)}$$

- Pokud $e(t)=0$ pro $t\in[0,T]$, pak jsme hotovi. V opačném případě existuje $[t_1,t_2]\subset[0,T]$ a $e(t)>0$ pro $t_1<t<t_2$
- Def. $f(t) = \log e(t)$. Pak $\dot f(t) = \frac{\dot e(t)}{e(t)}$ a

$$\ddot f(t) = \frac{\ddot e(t)e(t) - (\dot e(t))^2}{(e(t))^2} \ge 0.$$ Tak f je konvexní na (t_1,t_2)

$$f((1-\lambda)t_1+\lambda t) \le (1-\lambda)f(t_1) + \lambda f(t)$$

Z definice f a s využitím vlastností logaritmu a exponenciály:

$$e((1-\lambda)t_1+\lambda t) \le [e(t_1)]^{1-\lambda}[e(t)]^{\lambda} \qquad \forall t\in[t_1,t_2)$$

tedy po limitě $t\to t_2-$.

$$e((1-\lambda)t_1+\lambda t_2) \le [e(t_1)]^{1-\lambda}[e(t_2)]^{\lambda}$$

což vede ke sporu neboť $e(t_2)=0$ a $e((1-\lambda)t_1+\lambda t_2)$ by mělo být kladné ∎