5.4 Věty o střední hodnotě pro integrál

Cílem této sekce je ukázat věty o střední hodnotě pro integrál a využít je ke zkoumání existence $(N)\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}$.

Věta 5.12 (1. věta o střední hodnotě)

- Existují-li $(R)\int_a^b g(x)dx$ a $(R)\int_a^b f(x)g(x)dx$ a je-li g buď ≥ 0 nebo ≤ 0 v (a,b), pak existuje $c \in \left\langle \inf_{\langle a,b\rangle} f, \sup_{\langle a,b\rangle} f \right\rangle$ tak, že

$$(11) \qquad \int_a^b f(x)g(x)\,dx = c\int_a^b g(x)dx.$$

- Je-li navíc $f \in C(\langle a,b\rangle)$, pak existuje $\xi \in (a,b)$ tak, že

$$(12) \qquad \int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

- Speciálně, je-li $g \equiv 1$ dostáváme

$$(13) \qquad f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

průměr neboli střední hodnota funkčních hodnot f přes interval $\langle a,b\rangle$

Pozorování: Dolní Riemannův součet $s(D;f)$ pro ekvidistantní dělení je dáno vztahem

$$s(D;f) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} \inf_{x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle} f(x) = \frac{b-a}{n}\sum m_i$$

Pokud integrál na pravé straně identity (13) existuje, pak

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \doteq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i,$$ což je průměr infim přes jednotlivé intervaly dělení.

Dk věty 5.12 Protože

$$\inf_{\langle a,b\rangle} f =: \boxed{m \leq f(x) \leq M} := \sup_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)$$

tak pro $g \geq 0$ dostaneme

$$m\,g(x) \leq f(x)g(x) \leq M g(x) \qquad \forall x \in (a,b)$$

Odsud

$$(14) \qquad \underbrace{m\,(R)\int_a^b g(x)dx \leq (R)\int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\,(R)\int_a^b g(x)dx}$$

Je-li $\int_a^b g(x)dx = 0$, pak z (14) plyne, že $(R)\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$, a tvrzení platí.

Je-li $\int_a^b g(x)\,dx > 0$, tak (14) implikuje

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \le M,$$

což implikuje (11). Je-li $f \in C(\langle a,b\rangle)$ a protože $m \le f(x) \le M$ pro všechna $x \in \langle a,b\rangle$, dle Darbouxovy věty existuje $\xi \in \langle a,b\rangle$ tak, že (12) platí. Kdyby $\xi = a$ nebo $\xi = b$ pak existuje $\xi_0 \in (a,b)$ tak, že $f(\xi_0) = f(\xi)$. V opačném případě by totiž $f(x) > f(a)$ $\forall x \in (a,b\rangle$ (nebo $f(x) < f(a)$ $\forall x \in (a,b\rangle$), což vede ke sporu s (12) neboť

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx > f(a)\int_a^b g(x) \quad \text{a (12) neplatí.}$$

$\blacksquare$

$\boxed{\text{Věta 5.13}}$ (2. věta o střední hodnotě). Buď $f, g, g' \in C(\langle a,b\rangle)$ a g monotónní (tzn. $g' \ge 0$ v (a,b) nebo $g' \le 0$ v (a,b)). Potom $\exists\, \xi \in (a,b)$:

$$(15) \qquad \int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx + g(b)\int_\xi^b f(x)\,dx.$$

Tvrzení (15) platí i za slabších předpokladů: $(R)\int_a^b f(x)\,dx$ existuje, g je monotónní na $\langle a,b\rangle$. Tyto předpoklady implikují, že $(R)\int_a^b g(x)\,dx$, $(R)\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ existují. *)

(Dk) Je-li F primitivní funkce k f, pak

$$\int_a^b \underset{F(x)}{f(x)}\,\underset{g'(x)}{g(x)}\,dx = [Fg]_a^b - \int_a^b Fg' \overset{\text{V.5.12}}{\underset{\text{1.VOSH}}{=}} F(b)g(b) - F(a)g(a) - F(\xi)[g(b)-g(a)]$$

$$= g(b)[F(b)-F(\xi)] + g(a)[F(\xi)-F(a)] =$$

$$= g(a)\int_a^\xi F(s)\,ds + g(b)\int_\xi^b F(s)\,ds.$$

$\blacksquare$

<u>Příklad</u> Ukážeme, že (i) $(N)\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx < \infty$ (tzn. integrál konverguje)

ale (ii) $(N)\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx = +\infty$ (tzn. integrál diverguje).

*) Na ně lze užít pro $g \ge 0$, g klesající funkci g s $g(b) = 0$. Tak druhý člen v (15) vypadne.
(předefinovat)

Řešení $\boxed{\text{Ad (i)}}$ Protože $\frac{\sin x}{x} \in C((0,+\infty))$, tak existuje dle Věty 5.8 primitivní funkce k $\frac{\sin x}{x}$ na $(0,+\infty)$. Označme ji F (nelze ji nalézt analyticky). Protože lze dodefinovat $\frac{\sin x}{x}$ spojitě v bodě 0 hodnotou 1, tak $(N)\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx < +\infty$. Pro $(N)\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ platí:

$$(N)\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{k\to+\infty} F(k) - F(1) = \lim_{k\to+\infty} \int_1^k \frac{\sin x}{x}\,dx .$$

Dle věty o integraci per-partes dostáváme:

$$\int_1^k \frac{\sin x}{x}\,dx = \left[-\frac{\cos x}{x}\right]_1^k - \int_1^k \frac{\cos x}{x^2}\,dx = \cos 1 - \underbrace{\frac{\cos k}{k}}_{\substack{k\to\infty \\ \downarrow \\ 0}} - \int_1^k \frac{\cos x}{x^2}\,dx$$

$$\sin x \xrightarrow{\int} -\cos x, \qquad \frac{1}{x} \xrightarrow{d} -\frac{1}{x^2}$$

Protože $|\cos x| \le 1$ v $\mathbb{R}$, tak $\left|\int_1^k \frac{\cos x}{x^2}\,dx\right| \le 1 \int_1^k \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^k = 1 - \frac{1}{k} < +\infty$,

tak $\int_1^k \frac{\sin x}{x}\,dx < +\infty$. $\boxed{\text{Tedy } (N)\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx < +\infty.}$

$\boxed{\text{Ad (ii)}}$ Uvažujme $L(k) := \int_1^k \frac{|\sin x|}{x}\,dx$. Pak platí: $k_1 \le k_2 \Rightarrow L(k_1) \le L(k_2)$. Tedy $L(k)$ je neklesající, a $\lim_{k\to+\infty} L(k)$ existuje vždy a je buď vlastní ($\in \mathbb{R}^+$) nebo $+\infty$. Ukážeme, že $\lim_{k\to+\infty} L(k) = +\infty$.

$$\int_1^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x} \ge \int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x} = \sum_{i=2}^{n} \int_{(i-1)\pi}^{i\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \ge \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i\pi} \underbrace{\int_0^\pi \sin x}_{2}$$

$$= \frac{2}{\pi} \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i} \ge \frac{2}{\pi} \int_2^{n+1} \frac{1}{x}\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\ln(n+1) - \ln 2\right) \to +\infty \text{ pro } n \to +\infty.$$

Při nerovnostech jsme využili skutečnost, že

$$\int_2^{n+1} \frac{1}{x}\,dx = \sum_{i=2}^{n} \int_i^{i+1} \frac{1}{x}\,dx \le \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i}. \qquad \blacksquare$$

Další strana 5/19 se liší od této (strany) v použití 2. věty o střední hodnotě a Bolzano-Cauchyho podmínky namísto věty o integraci per-partes.

Řešení $\boxed{\text{Ad (i)}}$ Protože $\frac{\sin x}{x} \in C((0,+\infty))$, tak existuje dle V.5.8 primitivní funkce k $\frac{\sin x}{x}$ na $(0,+\infty)$. Označme ji F (nelze ji nalézt analyticky). Navíc lze v 0 dodefinovat $\frac{\sin x}{x}$ spojitě hodnotou 1 a tak $(N)\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx < \infty$ a pro $(N)\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}$ platí:

$$(N)\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{k\to+\infty} F(k) - F(1)$$
$$= \lim_{k\to+\infty} \int_1^k \frac{\sin x}{x}\,dx$$

[Dle 2. věty o střední hodnotě dostáváme:

$$\int_1^k \frac{\sin x}{x}\,dx \underset{g(x)=\frac{1}{x}}{=} g(1)\int_1^{\xi} \sin x\,dx + g(k)\int_{\xi}^{k} \sin x\,dx$$
$$= \cos\xi - \cos 1 + \frac{1}{k}(\cos\xi - \cos k),$$

což implikuje

$$\int_1^k \frac{\sin x}{x}\,dx \leq 3 \quad \text{a také} \quad |F(k_1) - F(k_2)| = \left|\int_{k_1}^{k_2} \frac{\sin x}{x}\,dx\right| \overset{\text{2.VOSH}}{\leq} 2\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right) \to 0$$

a dle B.C.-podmínky $\lim_{k\to+\infty} F(k)$ existuje vlastní.

Tedy $(N)\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} < +\infty$.]

$\boxed{\text{Ad (ii)}}$ Uvažujme $L(k) := \int_1^k \frac{|\sin x|}{x} \Rightarrow \left[k_1 \leq k_2 \Rightarrow L(k_1) \leq L(k_2)\right]$

Tedy $L(k)$ je neklesající a $\lim_{k\to+\infty} L(k)$ existuje vždy buď vlastní nebo $+\infty$. Ukážeme, že $\lim_{k\to+\infty} L(k) = +\infty$.

$$\int_1^{m\pi} \frac{|\sin x|}{x} \geq \int_{\pi}^{m\pi} \frac{|\sin x|}{x} = \sum_{i=2}^{m} \int_{(i-1)\pi}^{i\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \geq \sum_{i=2}^{m} \frac{1}{i\pi} \int_0^{\pi} \sin x$$

$$= \frac{2}{\pi}\sum_{i=2}^{m} \frac{1}{i} \geq \frac{2}{\pi}\int_2^{m+1} \frac{1}{x}\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\ln(m+1) - \ln 2\right) \xrightarrow{m\to+\infty} +\infty,$$

kde jsme využili skutečnost, že

$$\int_2^{m+1} \frac{1}{x}\,dx = \sum_{i=2}^{m} \int_i^{i+1} \frac{1}{x}\,dx \leq \sum_{i=2}^{m} \frac{1}{i}$$

$\boxed{m!\text{, jeho odhad a rozšíření na funkci Gamma } \Gamma}$

Nejdříve se zaměříme na odhad $\boxed{m!}$, přičemž použijeme kroky používané výše při odhadu (N) $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx = +\infty$.

Zavedeme nejdříve dvě posloupnosti

$$\boxed{H_m := \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k}} \quad \text{a} \quad \boxed{L_m := \sum_{k=1}^{m} \ln k = \sum_{k=2}^{m} \ln k.}$$

Pozorujme:

(✿) $$\boxed{m! = e^{L_m}}$$ ← TO JE SNADNÉ, ALE UŽITEČNÉ.

Nyní ukážeme: $(\forall n \in \mathbb{N})$

(i) $\ln(m+1) \le H_m \le 1 + \ln m$

(ii) $m \ln m - m + \frac{\ln m}{2} + \frac{7}{8} \le L_m \le m \ln m - m + 1 + \frac{\ln m}{2}$

Druhý vztah nám pak dá, s využitím (✿), odhady (dolní i horní) na $m!$. Vskutku, z (ii) plyne

$$\exp\left(m\ln m - m + \frac{\ln m}{2} + \frac{7}{8}\right) \le m! \le \exp\left(m \ln m - m + 1 + \frac{\ln m}{2}\right)$$

$\Downarrow$

$$m^m e^{-m} \sqrt{m}\, e^{7/8} \le m! \le m^m e^{-m} \sqrt{m}\, e$$

$\Downarrow$

$$\boxed{\underset{2{,}399}{e^{7/8}} \le \frac{m!}{\left(\frac{m}{e}\right)^m \sqrt{m}} \le \underset{2{,}718}{e}}$$

Lepší (přesnější) informaci poskytuje Stirlingův vzorec:

$$m! = (1+\Theta_m)\sqrt{2\pi m}\left(\frac{m}{e}\right)^m \qquad \sqrt{2\pi} \doteq 2{,}507$$

Zbývá ověřit odhady (i) a (ii).

$\boxed{\text{Dk (i)}}$ Vyjdeme ze vztahu

$$\frac{1}{k+1} \le \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \le \frac{1}{k}, \qquad \leftarrow \text{OVĚŘTE}$$

který využijeme 2x v následujícím výpočtu:

$$\ln(m+1) = \int_1^{m+1} \frac{dx}{x} = \sum_{k=1}^{m} \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \le \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} = H_m = 1 + \sum_{k=2}^{m} \frac{1}{k}$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k+1} \le 1 + \sum_{k=1}^{m-1} \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} = 1 + \int_1^m \frac{dx}{x} = 1 + \ln m \qquad \square$$

známá finta: nejdříve zavedu $m = k-1$ a pak toto m označím k

a podtržené dává tvrzení.

$\boxed{\text{Dk (ii)}}$ Vyjdeme ze vztahu: $\int \ln x = x \ln x - x$ a

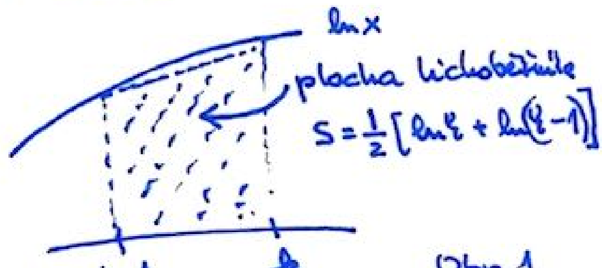
$$(*) \qquad m \ln m - m + 1 = \left[x \ln x - x\right]_1^m = \int_1^m \ln x \, dx = \sum_{k=2}^{m} \int_{k-1}^{k} \ln x \, dx$$

Poslední integrál v (*) odhadneme nejdříve zdola a potom seshora.

Dolní odhad, viz Obr. 1.:

$$\int_{k-1}^{k} \ln x \, dx \ge \frac{\ln k + \ln(k-1)}{2}, \text{ což dává}$$

$$\downarrow \quad \sum_{k=2}^{m} \int_{k-1}^{k} \ln x \, dx \ge L_m - \frac{\ln m}{2}$$



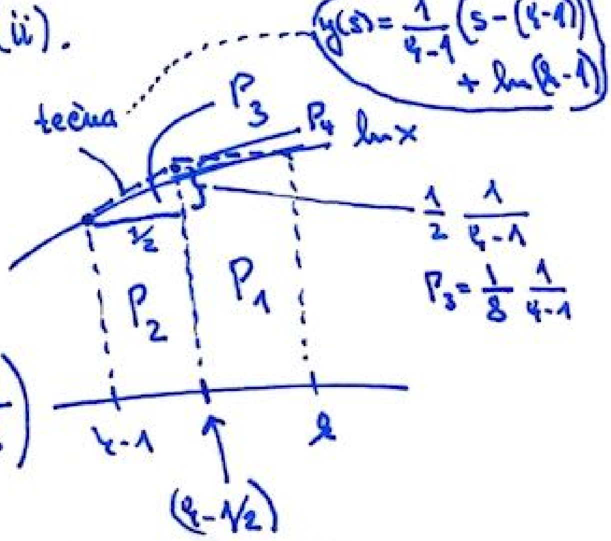
Obr. 1

Odsud a z (*) plyne druhá nerovnost v (ii).

Horní odhad, viz Obr. 2

$$\int_{k-1}^{k} \ln x \, dx \le P_1 + P_2 + P_3 - P_4 = \frac{\ln k}{2} + \frac{\ln(k-1)}{2} + \frac{1}{2(k-1)} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{2k} \cdot \frac{1}{4}. \quad \text{Odsud}$$

$$\downarrow \quad \sum_{k=2}^{m} \int_{k-1}^{k} \ln x \le \sum_{k=2}^{m} \frac{\ln k + \ln(k-1)}{2} + \frac{1}{8} \sum_{k=2}^{m} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)$$



Odsud, z (*) a z definice L_m:

$$m \ln m - m + 1 \le L_m - \frac{\ln m}{2} + \frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{m}\right) \le L_m - \frac{\ln m}{2} + \frac{1}{8},$$

což dává (ii). ■

$\boxed{\text{Gamma funkce}}$ je definována předpisem

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt \quad , \text{kde } x > 0.$$

Platí:

(i) $\mathcal{D}_\Gamma = (0, +\infty)$

(ii) $\Gamma(1) = 1$ ← OVĚŘTE

(iii) $\Gamma(m+1) = m! = m\Gamma(m)$ ← OVĚŘTE INTEGRACÍ PER PARTES

(iv) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ ← —‖—

(v) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ ← UŽIJTE SUBSTITUCI $\sqrt{t} = z$ A UŽIJTE VZTAH $\int_0^\infty e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

(vi) $\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2m)!}{m!} \frac{\sqrt{\pi}}{4^m}$

↑ POMOCÍ INTEGRACE PER PARTES A (v).

Dk) Provedeme jen (i). Ostatní sami dle návodu.

$\boxed{\text{Ad (i)}}$ $$\Gamma(x) = \int_0^1 t^{x-1} e^{-t}\, dt + \int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

Na $(0,1)$ užijeme $0 \le e^{-t} \le 1$, zatímco na $(1, +\infty)$ je $\left|t^{x-1} e^{-t/2}\right| \le C$

OVĚŘTE, PROČ?

Tedy

$$\Gamma(x) \le \int_0^1 t^{x-1}\, dt + C \int_1^{+\infty} e^{-t/2}\, dt$$

$$= \left[\frac{t^x}{x}\right]_0^1 + C\left[-2e^{-t/2}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{x} + 2Ce^{-1/2} < +\infty. \quad \blacksquare$$

Q: Proč není Γ definována pro $x = 0$?

Dva dodatky: (D1) Zbytek Taylorova polynomu v integrálním tvaru.

(D2) π je iracionální číslo.

$\boxed{D1}$ Zbytek $R_{n+1}(x) := f(x) - T_n^{f,x_0}(x)$ umíme napsat v Lagrangeově či Cauchyho tvaru. Nyní jej pomocí integrace per partes vyjádříme ve tvaru integrálu.

$\boxed{\text{Tvrzení}}$ Buď $x_0 \in \mathbb{R}$, $x > x_0$, a $f \in C^{n+1}(\langle a, x \rangle)$. Pak

$$R_{n+1}(x) = f(x) - P_n^{f,x_0}(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \, dt.$$

(Dk) Provedeme indukcí (lze však i přímo n-krát použitím per partes).

Pro $\boxed{n=0}$ $\quad R_1(x) = f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt.$ ✓

Pro $\boxed{n=1}$ $\quad R_2(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt - f'(x_0)(x-x_0)$

$$\overset{\text{per partes}}{=} \int_{x_0}^{x} \underset{\substack{\downarrow \int \\ t}}{1} \; \underset{\substack{\downarrow d \\ f''(t)}}{f'(t)}\,dt - f'(x_0)(x-x_0) = \left[t f'(t)\right]_{x_0}^{x} - f'(x_0)(x-x_0) - \int_{x_0}^{x} t f''(t)\,dt$$

$$= x f'(x) - x_0 f'(x_0) - f'(x_0)x + f'(x_0)x_0 - \int_{x_0}^{x} t f''(t)\,dt = x \int_{x_0}^{x} f''(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} t f''(t)\,dt$$

$$= \int_{x_0}^{x} (x-t) f''(t)\,dt \text{, q.e.d.}$$

Předpokládejme, že vztah platí pro $\boxed{n}$. Dokažme jej pro $\boxed{n+1}$. Pak

$$R_{n+1}(x) = \underbrace{f(x) - P_{n-1}^{f,x_0}(x)}_{R_n(x)} - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x} \underset{\substack{\downarrow d \\ f^{(n+1)}(t)}}{f^{(n)}(t)} \; \underset{\substack{\downarrow \int \\ -\frac{(x-t)^n}{n}}}{(x-t)^{n-1}}\,dt - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\left[f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^n}{n}\right]_{x_0}^{x} + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$= \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt.$$

∎

$\boxed{\text{Tvrzení D2}}$ $\pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (π je iracionální)

Dk Sporem. Nechť π je racionální, tzn. $\exists\, p \in \mathbb{N},\, q \in \mathbb{N} : \pi = \frac{p}{q}$.

Definujme funkci $\underbrace{f(x) := \frac{1}{n!} x^n (p-qx)^n}$. Pak vidíme:

(1) • f je polynom stupně $2n$

(2) • f lze psát ve tvaru $\underbrace{f(x) = \frac{1}{n!} \sum_{k=n}^{2n} c_k x^k}$, kde $c_k \in \mathbb{Z}$ ← celá čísla

(3) • odsud plyne $f^{(k)}(0) = 0 \quad \forall k < n$

$$f^{(k)}(0) = \frac{k!}{n!} c_k \in \mathbb{Z} \text{ pro } k \geq n$$

(4) • $f\left(\frac{p}{q} - x\right) = \frac{1}{n!} \left(\frac{p-qx}{q}\right)^n \left(p - q\left(\frac{p-qx}{q}\right)\right)^n = \frac{(p-qx)^n}{n!\, q^n} q^n x^n = f(x)$

a tedy $f(\pi - x) = f(x) \overset{(3)}{\Longrightarrow} f^{(k)}(\pi) \in \mathbb{Z}$ pro $0 \leq k \leq 2n$.

Dále definujme

$$\boxed{F(x) := f(x) - f''(x) + f^{(4)}(x) - \dots + (-1)^n f^{(2n)}(x)}$$

Pak dle (3), (4): $\boxed{F(0),\, F(\pi) \in \mathbb{Z}.}$

Navíc: $\left(F'(x) \sin x - F(x) \cos x\right)' = F''(x) \sin x + F(x) \sin x = f(x) \sin x$,

což implikuje

(*) $\boxed{\int_0^\pi f(x) \sin x \, dx} = \left[F'(x) \sin x - F(x) \cos x\right]_0^\pi = F(\pi) + F(0) \in \mathbb{Z}.$

Avšak $f(x) > 0$ na $(0, \pi)$, $f \in C^\infty(0, \pi)$, $f(0) = 0$, $f(\pi) = f\left(\frac{p}{q}\right) = 0$.

a $\max\limits_{x \in \langle 0, \pi \rangle} f(x) = f\left(\frac{p}{2q}\right) = \frac{1}{n!} \left(\frac{p}{2q}\right)^n \left(\frac{p}{2}\right)^n < \frac{1}{n!} \pi^n p^n$

PROČ ?

Tedy $0 \leq f(x) \sin x < \frac{1}{n!} \pi^n p^n \Rightarrow \left[0 < \int_0^\pi f(x) \sin x \, dx < \frac{\pi}{n!} \pi^n a^n < 1\right]$

pro n dostatečně velké (víme $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$)

což dává spor s (*).

∎

Kapitolu o Newtonově a Riemannově integrálu zakončíme následující fyzikální úlohou, kterou budeme řešit nejdříve "newtonsky" a pak "riemannovsky".

Úloha Uvažujme tyč konstantního průřezu A délky $b-a$. Nechť $\varrho(x)$ označuje hustotu tyče v $x \in (a,b)$ a $m(x)$ je hmotnost části tyče od konce a k bodu x. Je-li $\varrho(x) = \varrho_0 > 0$ pro $\forall\, x \in (a,b)$, pak celková hmotnost tyče $M = \varrho_0 A(b-a)$. Náš úkol je zjistit hmotnost tyče pro ϱ nekonstantní.

Řešení (a) Pro $a < x < y < b$, je $m(y) - m(x)$ hmotnost tyče mezi body x a y a tedy

$$\frac{m(y)-m(x)}{(y-x)A}$$ je průměrná hustota tyče mezi x a y.

Přechodem k $\lim\limits_{y \to x}$ dostaneme

$$m'(x) = \lim_{y \to x} \frac{m(y)-m(x)}{y-x} = A\varrho(x)$$ tj. A násobek hustoty v bodě x.

Odsud

$$M = m(b) - m(a) = A \int_a^b \varrho(x)\,dx = A\left[R\right]_a^b,$$ kde R je prim. fce k ϱ na (a,b).

Toto bylo řešení ve smyslu Newtonova int.

(b) Rozdělme tyč na n-dílků $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ a stanovme na každém intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$, $i = 1, \dots, n$, "střední" hodnotu hustoty $\overline{\varrho}_i$ ($\overline{\varrho}_i$ může být $\sup\limits_{x \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle} \varrho(x)$, $\inf\limits_{x \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle} \varrho(x)$, $\frac{\varrho(x_i) + \varrho(x_{i-1})}{2}$, či hodnota $\varrho(\xi)$ v jakémkoliv bodě $\xi \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$.)

Pak lze předpokládat, že pro $m_i := \overline{\varrho}_i A(x_i - x_{i-1})$ a pro dostatečně velké n bude platit

$$M \doteq \sum_{i=1}^{n} m_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \overline{\varrho}_i A(x_i - x_{i-1})}_{= \sigma_n(\varrho)}$$

Bude-li $\lim\limits_{n \to \infty} \sigma_n(\varrho)$ existovat, pak nazveme tuto limitu (Riemannův) integrál $A\varrho(x)$ od a do b, tj. $M = (R)\int_a^b A\varrho(x)\,dx$.

▨