Termín pro odevzdání: čtvrtek 20. května 2021

1. Rozhodněte (a přesně odůvodněte), zda zobrazení $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definována předpisem

   1. $\langle T, \varphi \rangle := \varphi^3(0)$,
   2. $\langle T, \varphi \rangle := \sum_{n=1}^{\infty} \varphi^{(n)}(n)$,

   jsou distribuce.

Řešení:

• Zobrazení T definované předpisem $\langle T, \varphi \rangle := \varphi^3(0)$ není distribuce, neboť T není lineární: pro $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ se $\langle T, \alpha\varphi \rangle = \alpha^3 \varphi^3(0)$ nerovná $\alpha\langle T, \varphi \rangle = \alpha\varphi^3(0)$.

• Zobrazení T definované předpisem $\langle T, \varphi \rangle := \sum_{n=1}^{\infty} \varphi^{(n)}(n)$ je distribuce, neboť

- $\boxed{\langle T, \varphi \rangle \in \mathbb{R} \text{ pro všechna } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).}$ Pro libovolné, pevné $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ existuje $K > 0$ tak, že $\operatorname{supp} \varphi \subset \langle -K, K \rangle$ a tedy od jistého n_0 je $\varphi(n) = 0$ a také $\varphi^{(n)}(n) = 0$. Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi^{(n)}(n)$ má nejvýše n_0 nenulových sčítanců a tak $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi^{(n)}(n) \in \mathbb{R}$.

- $\boxed{T \text{ je lineární.}}$ Plyne z vět o limitě a derivování součtu z prvního semestru:

$$\begin{aligned}\langle T, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 \rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2]^{(n)}(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\alpha\varphi_1^{(n)}(n) + \beta\varphi_2^{(n)}(n)\right] = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_1^{(n)}(n) + \beta \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_2^{(n)}(n) \\ &= \alpha\langle T, \varphi_1 \rangle + \beta\langle T, \varphi_2 \rangle\end{aligned}$$

- $\boxed{T \text{ je spojitý.}}$ Máme ukázat, že pokud $\varphi_k \to 0$ v $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ pro $k \to \infty$, pak $\langle T, \varphi_k \rangle \to 0$ pro $k \to \infty$. Z předpokladu $\varphi_k \to 0$ v $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ však plyne existence $K > 0$ tak, že všechny φ_k jsou nulové vně $\langle -K, K \rangle$. Navíc pro všechna $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ posloupnosti $\varphi_k^{(m)}$ konvergují stejnoměrně k nule v $\langle -K, K \rangle$. Tedy existuje n_0 tak, že $n_0 \le K < n_0 + 1$

$$\langle T, \varphi_k \rangle = \sum_{n=1}^{n_0} \varphi_k^{(n)}(n) = \varphi_k(0) + \varphi_k'(1) + \cdots + \varphi_k^{(n_0)}(n_0)$$

a z výše uvedených stejnoměrných konvergencí plynou, pro $k \to \infty$, bodové konvergence k nule pro posloupnosti $\{\varphi_k^{(n)}(n)\}_{k=1}^{\infty}$, $n = 0, \ldots, n_0$.

2. 1. Ukažte, že $f(x) := \log|x| \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.
   2. Tedy $f(x) = \log|x|$ generuje regulární distribuci T_f. Ukažte, že pro její derivaci ve smyslu distribucí platí:

$$(T_f)' = T_{\text{v.p.}\frac{1}{x}} \text{ v } \mathcal{D}'(\mathbb{R}),$$

kde distribuce na pravé straně byla definována a studována na přednášce.

Řešení:

• Funkce $\log|x|$ je sudá. Na $(0,\infty)$ je funkce $x\log x - x$ primitivní funkce k $\log x$. Pro libovolný interval $\langle \varepsilon, K\rangle \subset (0,\infty)$, kde $0 < \varepsilon < 1 < K$, platí:

$$\int_\varepsilon^K |\log x|\,dx = -\int_\varepsilon^1 \log x\,dx + \int_1^K \log x\,dx = K\log K - K + 2 + \varepsilon\log\varepsilon - \varepsilon \to K\log K - K + 2 \text{ pro } \varepsilon \to 0.$$

Tedy $f \in L^1(\langle -K, K\rangle)$ pro libovolné $K > 0$.

• Dle definice distributivní derivace (derivace ve smyslu distribucí) máme

$$\begin{aligned}
\langle (\log|x|)', \varphi\rangle &= -\int_{\mathbb{R}} \log|x|\,\varphi'(x)\,dx \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0+, R\to+\infty}\left[\int_{-R}^{-\varepsilon} \log(-x)\,\varphi'(x)\,dx + \int_\varepsilon^R (\log x\,\varphi'(x)\,dx\right] \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0+, R\to+\infty}\left[-\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx - \int_\varepsilon^R \frac{\varphi(x)}{x}\,dx\right] - \lim_{\varepsilon\to 0+}\left[[\log(-x)\,\varphi(x)]_{-K}^{-\varepsilon} + [\log(x)\,\varphi(x)]_\varepsilon^K\right] \\
&= \langle T_{\text{v.p.}\frac{1}{x}}, \varphi\rangle - \lim_{\varepsilon\to 0+}(\log\varepsilon\,\varphi(-\varepsilon) - \log\varepsilon\,\varphi(\varepsilon)) \\
&= \langle T_{\text{v.p.}\frac{1}{x}}, \varphi\rangle + \lim_{\varepsilon\to 0+}(\log\varepsilon\,(\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)) \\
&= \langle T_{\text{v.p.}\frac{1}{x}}, \varphi\rangle + \lim_{\varepsilon\to 0+} 2\varepsilon\log\varepsilon\,\varphi'(\xi) \qquad (\xi \in (-\varepsilon, \varepsilon)) \\
&= \langle T_{\text{v.p.}\frac{1}{x}}, \varphi\rangle,
\end{aligned}$$

kde jsme využili postupně integrace per partes, definici $T_{\text{v.p.}\frac{1}{x}}$, skutečnosti, že φ je nulová vně $\langle -K, K\rangle$ a Lagrangeovu větu o střední hodnotě.