

LG LAPLACEOVA A POISSONOVA RCE

$$\downarrow$$

$$-\Delta u = 0$$

$$\downarrow$$

$$-\Delta u = f$$

Rce jsou uvažovány v $\mathbb{R}^d$ nebo v $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, a v druhém případě pod určitým omezením úlohu.

již víme, $\bar{u}$ F. R. když navíc má tvar:

- $\boxed{d=2}$ $\Phi(x) = -\frac{1}{2\pi} \log|x|$

logaritmický potenciál

- $\boxed{d=3}$ $\phi(x) = \frac{1}{4\pi|x|}$

Newtonův potenciál

- $\boxed{d>2}$ $\phi(x) = \frac{1}{d(d-2)|B_1(0)| |x|^{d-2}}$

Pozorujeme $\left(\frac{\partial}{\partial x_i} |x| = \frac{x_i}{|x|}\right)$, $\bar{u}$ po libovolné $d \geq 2$ platí:

- ϕ je radiální

- $|\nabla \phi(x)| \leq \frac{C}{|x|^{d-1}}$

- $|\nabla^2 \phi(x)| \leq \frac{C}{|x|^d}$

Připomeň

- $\frac{d |B_r(x)|}{d(d-2)} = |B_r(x)| r$ $x \in \mathbb{R}^d$
- $d(d-2)$... velikost/objem/míra 1-ové koule v $\mathbb{R}^d$; $d(d-2) = |B_1(0)|$

Témata

- Věty o střední hodnotě a jejich důsledky
- Greenova fce. Věta o dvojnásobném potenciálu
- $\Delta u = f$ a úlohy variace počtu. Energetické metody.

Definice

Přijmeme, že u je harmonická v $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevírací
 $\stackrel{\text{def.}}{=} u \in C^2(\Omega)$ a $-\Delta u = 0$ v Ω .

L6.1 VZORCE S PŘÍKLADY neboli

VĚTY O STŘEDNÍ HODNOTĚ

Věta 5 Je-li $u \in C^2(\Omega)$ harmonická (tzn. $\Delta u = 0$ v Ω),
 pak

$$u(x) = \int_{\partial B_r(x)} u \, dS = \int_{B_r(x)} u(y) \, dy \quad \text{pro } \forall B_r(x) \subset \Omega.$$

ⓓů Otuovme

$$\phi(r) := \int_{\partial B_r(x)} u(y) \, dS_y.$$

Pak
$$\phi(r) = \int_{\partial B_1(0)} u(x + rz) \, dS_z$$

a tedy

$$\begin{aligned} \phi'(r) &= \int_{\partial B_1(0)} \nabla u(x + rz) \cdot z \, dS_z \\ &= \int_{\partial B_r(x)} \nabla u(y) \cdot \frac{y-x}{r} \, dS_y \\ &= \int_{\partial B_r(x)} \frac{\partial u}{\partial n}(y) \, dS_y \end{aligned}$$

$$\stackrel{\text{Gauss}}{=} \frac{r}{d} \int_{B_r(x)} \Delta u(y) \, dy = 0$$

Tedy $\phi(r) = \text{const}$, a tedy uvažme $\lim_{r \rightarrow 0} \phi(r)$

$$\phi(r) = \lim_{t \rightarrow 0} \phi(t) = u(x)$$

Tak
$$\boxed{u(x) = \int_{\partial B_r(x)} u \, dS} \quad (*)$$

Dále

$$\int_{B_r(x)} u(y) \, dy = \frac{1}{\alpha(d) r^d} \int_{\partial B_r(x)} \left(\int_{\partial B_\rho(x)} u(y) \, dS_y \right) d\rho$$

$$= \frac{1}{r^d} \int_0^r \underbrace{\left(\frac{d \rho^{d-1}}{|\partial B_\rho(x)|} \int_{\partial B_\rho(x)} u(y) \, dS_y \right)}_{d \rho^{d-1} u(x) \text{ dle } (*)} d\rho = \frac{1}{r^d} \int_0^r d \rho^{d-1} d\rho u(x) = \underline{\underline{u(x)}}$$

zauči-
dimenzi.

$d \rho^{d-1} u(x)$ dle $(*)$

Q.E.D.

ze vztahu $d|B_\rho(x)| = \rho |\partial B_\rho(x)|$ plyne $|\partial B_\rho(x)| = \frac{d}{\rho} \rho^d \alpha(d) = \alpha(d) d \rho^{d-1}$

Věta 8 (Obrácená věta o střední hodnotě)

Pro $u \in C^2(\Omega)$ splňuje $u(x) = \int_{\partial B_r(x)} u(y) dS_y$,

pro $\Delta u = 0$.

(Důkaz) Zporem. Když u nebyla harmonická, tak pro existenci $B_r(x)$ tak, že $\Delta u > 0$ v $B_r(x)$ (Bez újmy na obecnosti, u v bodě, kde $\Delta u \neq 0$ je lokálně Δu kladná). Pak volá A výpočty a dříve předchozí věty 4.6 a A předpokládá, že

$$\phi(r) = \int_{\partial B_r(x)} u(y) dS_y = u(x) \quad (\Rightarrow \phi'(r) = 0)$$

ale $0 = \phi'(r) = \frac{r}{2} \int_{\partial B_r(x)} \Delta u(y) dS_y > 0$, což dává spor. □

Věty o střední hodnotě mají obrovský význam v analýze harmonických fcní a úloze spejngel a Poissonova rovnice. Pomocí vět o střední hodnotě doložíme tyto vlastnosti:

- (1) Princip maxima/minima. Jednosměrné a plné.
- (2) Regularita řešení
- (3) Lokální odhady a termín "nejlepší" L^1 -normy.
- (4) Liouvilleova věta
- (5) Analyticitu harmonických fcní
- (6) Harmonická nerovnost.

PDR/24

G.2 Vlastnosti harmonických funkcí založených na větách o průměru

1 Věty o maximum/minimu

Věta 7 (Princip maxima / princip minima) Budi $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ a $\Delta u = 0$ v Ω .

Paž: $\blacktriangleright$ (1) $\max_{x \in \bar{\Omega}} u(x) = \max_{x \in \partial\Omega} u(x)$ a $\min_{x \in \bar{\Omega}} u(x) = \min_{x \in \partial\Omega} u(x)$
 [princip maxima] [princip minima]

$\blacktriangleright$ (2) Je-li uavíc Ω souvislé a existují $x_0 \in \Omega$ tak, $\bar{u}(x_0) = \max_{x \in \bar{\Omega}} u(x)$,
 paž u je konstantní. (tvr. SILNÝ PRINCIP MAXIMA)
 Je-li Ω souvislé a existují $x_0 \in \Omega$: $u(x_0) = \min_{x \in \bar{\Omega}} u(x)$, paž u je konstantní.
 (tvr. SILNÝ PRINCIP MINIMA).

Dů [Ad 2), maximum] Předpokládáme, $\bar{u} \exists x_0 \in \Omega$ tak, $\bar{u}(x_0) = M = \max_{x \in \bar{\Omega}} u(x)$.

Paž pro $\forall B_r(x_0) \subset \Omega$: $M = u(x_0) = \int_{B_r(x_0)} u(y) dy \leq \max_{x \in \bar{\Omega}} u(x) \int_{B_r(x_0)} 1 dy = M$

Rovnost v podružnéjch vztazích málokdy nastane jen pokud $u(y) = M \forall y \in B_r(x_0)$
 že souvislosti: $u(y) = M \forall y \in \Omega$.

[Ad 1), maximum] plyne přímo z 2). Když maximum nebylo na $\partial\Omega$,
 tak je uvnitř a paž je u konstantní a vztah platí.

[Tvrzení o minimum] plyne z dořádného analogického uvažování nebo
 přechodem k $-u$. □

Důsledek Věty 7

(1) Budi $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ splňující $\Delta u = 0$ v Ω , $u = g$ na $\partial\Omega$ a $g \geq 0$
 na $\partial\Omega$, paž $u \geq 0$ v $\bar{\Omega}$.

(2) Je-li navíc g v nějakém bodě $z_0 \in \partial\Omega$ kladná, tzn. $g(z_0) > 0$,
 paž $u > 0$ všude v Ω .

Dů [Ad (1)], plyne z Věty (7), což (1) týká se minima.

[Ad (2)], Dle (1) tohoto důsledku máme, $\bar{u} g \geq 0 \Rightarrow u \geq 0$ v Ω .

Když však $u(x_0) = 0$ v nějakém bodě $x_0 \in \Omega$, paž dle Věty 7,

$u \equiv \text{const.}$, tzn. $(u \equiv 0 \text{ v } \bar{\Omega})$ což je v protikladu s tím že $u(z_0) = g(z_0) > 0$
 pro $z_0 \in \partial\Omega$. □

Důsledkem principu maxima/minima je věta o jedinečnosti:

Věta 8 Budi $g \in C(\partial\Omega)$, $f \in C(\Omega)$. Paž existují nejvýš jedno řešení
 úlohy $\{-\Delta u = f \text{ v } \Omega, u = g \text{ na } \partial\Omega\}$. □

Dů a) pomocí Věty 7. Když existovala dvě řešení u_1, u_2 , paž pro $w := u_1 - u_2$
 platí: $-\Delta w = 0$ v Ω , $w = 0$ na $\partial\Omega$ a dle Věty 7,
 w málož maximum a minimum na $\partial\Omega$. Tedy $w \equiv 0$, a tak $u_1 \equiv u_2$.

b) Energietheorie methoden

Probleme $w := u_1 - u_2$ gilt $-\Delta w = 0$ in Ω , $w = 0$ auf $\partial\Omega$, also

$$0 = - \int_{\Omega} \Delta w \cdot w \, dx = \int_{\Omega} |\nabla w|^2 \, dx \Rightarrow \nabla w \equiv 0 \text{ in } \Omega$$

$\uparrow$
 Gauss

$$\Rightarrow w \equiv \text{const}$$

$$w = 0 \text{ auf } \partial\Omega \Rightarrow w \equiv 0.$$

□

2. Modulo

Vēta 9. (o regularitē) Nēdē $\mu \in C(\Omega)$ gēlīgē

$$u(x) = \int_{\partial B_r(x)} u(y) \, dS_y = \int_{B_r(x)} u(y) \, dy \quad \forall B_r(x) \subset \Omega,$$

Par $\mu \in C^\infty(\Omega)$.

(Dē) Būdē $\varepsilon > 0$ dēms. Otrēc $\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega; \text{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$.

Pro $x \in \Omega_\varepsilon$: $\mu^\varepsilon := w_\varepsilon * \mu$ kēdē $w_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^d} w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$

$$w \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$$

$$w \equiv 0 \text{ auf } (-1, 1)$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} w_\varepsilon(y) \, dy = 1$$

w arīnē jēn
ne radīdēnēst 1 + jē
 w jē radīdēnē

Uzēdēnē $\bar{\mu}$

$$\mu^\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon).$$

$$\mu = \mu^\varepsilon \text{ in } \Omega_\varepsilon$$

$$\underline{\underline{\mu^\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^d} \int_{B_\varepsilon(x)} w\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) \mu(y) \, dy}}$$

w jē radīdēnē,
arīnē jēn
ne φ

$$= \frac{1}{\varepsilon^d} \int_0^\varepsilon w\left(\frac{\rho}{\varepsilon}\right) \left(\int_{\partial B_\rho(x)} \mu(y) \, dS_y \right) d\rho$$

$$= \frac{\mu(x)}{\varepsilon^d} \int_0^\varepsilon |\partial B_\rho(x)| w\left(\frac{\rho}{\varepsilon}\right) d\rho$$

vēta o
prīmērnē:

$$\mu(x) |\partial B_\rho(x)| = \int_{\partial B_\rho(x)} \mu(y) \, dS_y$$

$$= \mu(x) \frac{1}{\varepsilon^d} \int_0^\varepsilon \left(\int_{\partial B_\rho(x)} dS_y \right) w\left(\frac{\rho}{\varepsilon}\right) d\rho$$

$$= \mu(x) \underbrace{\int_{B_\varepsilon(x)} w_\varepsilon(y) \, dy}_{=1} = \underline{\underline{\mu(x)}}$$

w radīdēnē

□

13) Lokální odhady

přesné odhady derivátů harmonických funkcí

Věta 10 ² *Jeli $u \in C^2(\Omega)$: $\Delta u = 0$ v Ω . ^{*} $\forall B_\rho(x_0) \subset \Omega \quad \forall d: |\alpha| = k$*

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{C_k}{\rho^{d+k}} \|u\|_{L^1(B_\rho(x_0))}$$

Ověřme

$$C_0 = \frac{1}{\alpha(d)}, \quad C_k = \frac{(2^{d+1} d^k)^k}{\alpha(d)} \quad (k = 1, \dots)$$

Dě Indukcí $k=0$ $u(x_0) = \int_{B_\rho(x_0)} u(y) dy \leq \|u\|_{L^1(B_\rho(x_0))} \frac{1}{\alpha(d) \rho^d}$

$k=1$ *Poznamenejme, $\bar{u} \quad \frac{\partial u}{\partial x_i}$ také $\Delta \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = 0$ v Ω .*

Tedy dle věty 0 ϕ :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_0) \right| &= \left| \int_{B_{\frac{\rho}{2}}(x_0)} \frac{\partial u}{\partial x_i} dy \right| \\ &= \left| \frac{2^d}{\alpha(d) \rho^d} \int_{B_{\frac{\rho}{2}}(x_0)} \frac{\partial u}{\partial x_i} dy \right| \\ &\stackrel{\text{Gauss}}{=} \left| \frac{2^d}{\alpha(d) \rho^d} \int_{\partial B_{\frac{\rho}{2}}(x_0)} u v_i dS_y \right| \end{aligned}$$

$$\leq \frac{2}{\rho} d \|u\|_{L^\infty(\partial B_{\frac{\rho}{2}}(x_0))}$$

Jeli: $x \in \partial B_{\frac{\rho}{2}}(x_0)$, Pak $B_{\frac{\rho}{2}}(x) \subset B_\rho(x_0)$ a tak dle případu $k=0$

$$|u(x)| \leq \frac{2^d}{\alpha(d) \rho^d} \|u\|_{L^1(B_\rho(x_0))} \Rightarrow \|u\|_{L^\infty(\partial B_{\frac{\rho}{2}}(x_0))} \leq \frac{2^d}{\alpha(d) \rho^d} \|u\|_{L^1(B_\rho(x_0))}$$

Tedy

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_0) \right| \leq \frac{2^d d}{\alpha(d) \rho^{d+1}} \|u\|_{L^1(B_\rho(x_0))} \quad (i=1, \dots, d)$$

což dáváme tvar pro $|\alpha| = k = 1$.

$k \geq 2$ indukci (vypočítáno) □

^{*} Dle věty 9 jít máme, $\bar{u}$ jeli $\mu \in C^2(\Omega)$, pak $u \in C^\infty(\Omega)$.

[4] Liouvilleova věta - NEEXISTUJÍ netriviální omezené harmonické funkce v $\mathbb{R}^d$.

Věta 11 Bud u harmonická a omezená v $\mathbb{R}^d$.
 Pak $u \equiv \text{konst.}$

Důk. Bud $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $\rho > 0$. Pak

$$|\nabla u(x_0)| \leq \frac{2^{d+1}d}{\alpha(d)\rho^{d+1}} \int_{B_\rho(x_0)} |u(y)| dy$$

$$\leq \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \frac{2^{d+1}d}{\rho} \rightarrow 0 \text{ po } \rho \rightarrow +\infty.$$

Tedy $\nabla u \equiv 0$ v $\mathbb{R}^d$, což implikuje $u \equiv \text{konst.}$ $\square$

Věta 11* Je-li $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$ a komp. množin. Pak, pro $d \geq 3$,

každé omezené řešení $-\Delta u = f$ má tvar

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{\Phi(x-y)}_{\text{Fund. ř.}} f(y) dy + \underbrace{C}_{\text{konst.}} \quad (x \in \mathbb{R}^d)$$

Důk. Protože $\phi(x) \rightarrow 0$ po $|x| \rightarrow \infty$ pro $d \geq 3$, tak $\tilde{u}(x) := \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x-y) f(y) dy$ řeší $-\Delta u = f$ v $\mathbb{R}^d$. Je-li u jiné omezené řešení, pak $w := u - \tilde{u}$ je konstanta, dle Liouvilleovy věty. $\square$

* V $d=2$, může být $\tilde{u}$ neomezené, neboť $\Phi(x) = -\frac{1}{2\pi} \ln|x| \rightarrow -\infty$ po $|x| \rightarrow +\infty$.

[5] Analyticitva = rozvíjitelnost do mocninové řady

Věta 12 Je-li u harmonická v Ω , pak je analytická v Ω .

Důk. Cíl: Po lib. $x_0 \in \Omega$ postavit na okolí x_0 konvergentní mocninovou řadu.

Bud $\rho := \frac{1}{4} \text{dist}(x_0, \partial\Omega)$. Pak $M := \frac{1}{\alpha(d)\rho^d} \|u\|_{L^1(B_{2\rho}(x_0))} < +\infty$.

Prostě $B_\rho(x) \subset B_{2\rho}(x_0) \subset \Omega$ pro $\forall x \in B_\rho(x_0)$, tak že
 věty 10

$$\|D^\alpha u\|_{L^\infty(B_\rho(x_0))} \leq \left(\frac{2^{d+1} d}{\rho}\right)^{|\alpha|} |\alpha|^{|\alpha|} M$$

Prostě $\frac{e^{\rho^2}}{\rho!} < e^\rho \Rightarrow |\alpha|^{|\alpha|} \leq e^{|\alpha|} |\alpha|!$

De Multinomial věty

$$d^k = \underbrace{(1 + \dots + 1)}_{d \text{ krát}}^k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!}$$

nebo

$$|\alpha|! \leq d^{|\alpha|} \alpha!$$

Tedy

$$\|D^\alpha u\|_{L^\infty(B_\rho(x_0))} \leq CM \frac{(2^{d+1} d^2 e)^{|\alpha|}}{\rho^{|\alpha|}} \alpha!$$

Taylorova řada pro u v x_0 má tvar $\sum \frac{D^\alpha u(x_0)}{\alpha!} (x-x_0)^\alpha$
 Ukažeme, že řada konverguje pokud $|x-x_0| < \frac{\rho}{2^{d+2} d^3 e}$

Zbývá R_N splnit

$$R_N(x) = u(x) - \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{|\alpha|=k} \frac{D^\alpha u(x_0) (x-x_0)^\alpha}{\alpha!} = \sum_{|\alpha|=N} \frac{D^\alpha u(x_0 + t(x-x_0)) (x-x_0)^\alpha}{\alpha!}$$

$t \in (0,1)$

$$|R_N(x)| \leq CM \sum_{|\alpha|=N} \frac{(2^{d+1} d^2 e)^N}{\rho^N} \frac{\rho^N}{(2^{d+2} d^3 e)^N} = CM \sum_{|\alpha|=N} \frac{1}{2^N d^N}$$

$$\leq CM d^N \frac{1}{2^N d^N} = \frac{CM}{2^N} \rightarrow 0 \text{ pro } N \rightarrow \infty. \quad \square$$

Dodatek:

$$(x_1 + \dots + x_d)^k = \sum_{|\alpha|=k} \binom{k}{\alpha} x^\alpha$$

$$\binom{|\alpha|}{\alpha} = \frac{|\alpha|!}{\alpha_1! \dots \alpha_d!} \quad |x^\alpha| = x_1^{\alpha_1} \dots x_d^{\alpha_d}$$

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$$

16) Harnackova nerovnosť

(súvislou oblasťou)

Věta 13 (Harnackova $\leq$). Pre každou $V \subset V \subset \Omega$
 (V otvorená, menšia- Ω otvorená) $\exists C$ (závisí jen na V)
 tak, že

$$\sup_V u \leq C \inf_V u$$

$\forall u$ harmonické v Ω
nesáporná

Potomou se říká

$$\frac{1}{C} u(y) \leq u(x) \leq C u(y) \quad \forall x, y \in V$$

tu. hodnoty nepropadají harmonickým fci pro malé hodnoty
 indukované: protože V má vzdálenost od hranice, je prostor pro zprůměrování
 hodnot uvnitř.

(Dě) Před $\varrho := \frac{1}{4} \text{dist}(V, \partial\Omega)$. zvol. $x, y \in V: |x-y| < \varrho$.

$$\text{Poté } u(x) = \int_{B_{\varrho/2}(x)} u \, dz \stackrel{u \geq 0}{\geq} \frac{1}{\alpha(d) 2^d \varrho^d} \int_{B_{\varrho/2}(y)} u \, dz = \frac{1}{2^d} \int_{B_{\varrho/2}(y)} u \, dz$$

$$= \frac{1}{2^d} u(y)$$

$$\text{Tedy: } \forall x, y \in V: |x-y| < \varrho \quad \boxed{\frac{1}{2^d} u(y) \leq u(x) \leq 2^d u(y)}$$

Proč V je souvislá, $\bar{V}$ kompaktní, lze použít V
 konečný řádek $\{B_i\}_{i=1}^N$ o poloměrech $\frac{\varrho}{2}$ a $B_i \cap B_{i-1} \neq \emptyset$
 $i=2, \dots, N$.

$$\text{Také } u(x) \geq \frac{1}{2^d (N+1)} u(y) \quad \forall x, y \in V$$

