

Aplikace variačního počtu v klasické mechanice

V klasické mechanice se pracuje s pojmem hmotného bodu, který je charakterizován hmotností m a jeho pohyb je dán trajektorií

$$\vec{x} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\vec{x} = \vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$$

přičemž $\vec{x}(0)$ udává ^{čas} známou počáteční polohu hmotného bodu $\vec{x}_0$

Q: Je možné ze znalosti dat $m, \vec{x}_0$ a T určit z nejzákladnějších principů trajektorii $\vec{x} = \vec{x}(t)$?

A: Ano, najdi řešení pohybových rovnic

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) := \frac{d}{dt}\left(m \frac{d\vec{x}}{dt}\right) = \vec{F}$$

$$\vec{x}(0) = \vec{x}_0$$

$$\frac{d\vec{x}}{dt}(0) = \vec{x}_1$$

kde $\vec{F}$ popisuje souhrn všech sil na částici působících

Kde $\vec{x}_1$ je počáteční rychlost trajektorie, kterou bych měl přidat mezi data uvažující: $m, \vec{x}_0, \vec{x}_1, T$

- Je-li síla $\vec{F}$ ve tvaru gradientu potenciální energie U , tzn.

$$\vec{F} = -\nabla U(\vec{x}) \quad (\Leftrightarrow) \quad F_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i}(\vec{x}),$$

pak ty pohybové rovnice

$$(*) \quad -\frac{d}{dt}\left(m \frac{dx_i}{dt}\right) + \frac{\partial U}{\partial x_i}(\vec{x}) = 0 \quad i=1,2,3$$

jsou podobné E-L rovnicím

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i}(t, \vec{y}, \vec{y}')\right) + \frac{\partial L}{\partial y_i}(t, \vec{y}, \vec{y}') = 0$$

Q: Je přirozené se ptát, zda všechna lze ztotožnit rovnice (*) s kritickými body nějakého funkcionálu.

Pozor! • Opětí předchozímu výsledku pracujeme s vektorovými funkcemi a systémy ODR

• Je přehlednější psát

$$\dot{x}_i \text{ místo } \frac{dx_i}{dt}$$

tak. rovnice (*) má pár tvar

$$-(m \dot{x}_i)^{\cdot} + \frac{\partial U}{\partial x_i}(\vec{x}) = 0 \quad \text{mat.}$$

$$\text{nebo } (m \dot{x}_i)^{\cdot} - \frac{\partial U}{\partial x_i}(\vec{x}) = 0 \quad \text{fyz.}$$

což chceme ztotožnit s E-L. rovnici

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right)^{\cdot} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \quad L = L(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}})$$

• A, - nebylo tak jednoduché, tak v klasické mechanice se nepracuje jen s jedním hmotným bodem, ale s N hmotnými body. Máme tedy $3N$ veličin

x_1, x_2, x_3 bod 1

x_4, x_5, x_6 bod 2

$\vdots$

$x_{3N-2}, x_{3N-1}, x_{3N}$ bod 3

Nadále

$$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_{3N-2}, x_{3N-1}, x_{3N})$$

Věta 9.7

Pohyb systému N hmotných bodů hmotností $\hat{m}_i$ v potenciálním poli $U = U(\vec{x})$ dají řešit

$$(*) \quad (m_i \dot{x}_i)^{\cdot} - \frac{\partial U(\vec{x})}{\partial x_i} = 0 \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, 3N$$

se shodují s kritickými body funkcionálu

$$E(\vec{x}) := \int_0^T L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) dt \quad \text{kde } L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = \underbrace{\left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x}_i^2 \right)}_{=: T} - U(\vec{x})$$

kde uvažujeme navíc $m_{3(i-1)+j} := \hat{m}_i \quad i = 1, \dots, N; \quad j = 1, 2, 3.$

$$m_1 = m_2 = m_3 = \hat{m}_1$$

$$m_4 = m_5 = m_6 = \hat{m}_2$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$m_{3N-2} = m_{3N-1} = m_{3N} = \hat{m}_N$$

Plati:

$$\textcircled{Dt} \delta E(\vec{x})(\vec{h}) = \sum_{i=1}^{3N} \int_0^T (m_i \dot{x}_i \dot{h}_i - \frac{\partial U}{\partial x_i} h_i) dt$$

$$\forall \vec{h} = (h_1, h_2, \dots, h_{3N})$$

$$\in C^1([0, T])^{3N}, h_i(0) = h_i(T) = 0.$$

Tedy k použití základního lemmatu variačního počtu, či jeho varianty a podmínky

$$\delta E(\vec{x})(\vec{h}) = 0 \quad \forall \vec{h}$$

dostáváme, postupnou volbou $\vec{h} = (\underbrace{0, \dots, h_i, \dots, 0}_{3N})$,

polybové rovnice (*).

Q: K čemu je tato ekvivalence dobrá?

Funkcionál $E(\vec{x})$ můžeme zapsat ekvivalentně pomocí jediného souřadnic (připomeňme si funkcionál délky křivky $L(x) := \int_a^b [(\dot{x}_1(s))^2 + (\dot{x}_2(s))^2]^{1/2} ds = \int_a^b [\dot{r}(\varphi)^2 + r^2(\varphi)]^{1/2} d\varphi$).

Tzn. $E(\vec{x}) = E(\vec{q}) = \int_{t_1}^{t_2} L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) dt$

Paž pohyb můžeme napsat pomocí $(E-L)$ rovnice v zobecněných souřadnicích $\vec{q}$:

$$(L) \quad \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad i=1, 2, 3, \dots, 3N$$

$$L := T - U$$

q_i zobecněná souřadnice $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ zobecněná hybnost
 $\dot{q}_i$ rychlost $\frac{\partial L}{\partial q_i}$... zobecněná síla

Příkladem může být rovinný pohyb hmotného bodu v centrální poli popsaný v polárních souřadnicích:

$$(x_1, x_2) \rightarrow (q_1, q_2) \quad q_1 = r, q_2 = \varphi$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= r \cos \varphi \\ x_2 &= r \sin \varphi \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{r} \cos \varphi - r \sin \varphi \dot{\varphi} \\ \dot{x}_2 &= \dot{r} \sin \varphi + r \cos \varphi \dot{\varphi} \end{aligned}$$

$$T = \frac{1}{2} m [\dot{r}^2 + r^2 (\dot{\varphi})^2]$$

$$U = U(r)$$

$$L(r, \dot{r}, \dot{\varphi}) = T - U$$

Lagrangovy rovnice pak mají tvar

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right)' - \frac{\partial L}{\partial r} = \underbrace{(m\dot{r})' - m(\dot{\varphi})^2 r + \frac{\partial U}{\partial r}} = 0$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right)' - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = (m r^2 \dot{\varphi})' = 0 \Rightarrow \underline{r^2 m \dot{\varphi} = \text{konst.}}$$

[moment hybnosti se během pohybu nemění]

[Místo popisu pomocí rovnic v souřadnicích (x_1, x_2) můžeme použít rovnice pro souřadnice (r, φ) .]

Také víme, že pokud L není závislé explicitně na t , vždy existuje první integrál a platí

$$L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) - \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \text{konst.} \Leftrightarrow L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) - \vec{q} \cdot \vec{p} = \text{konst.}$$

Einsteinova Σ konv.

$\vec{p} := \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}}$ zobecněná hybnost.

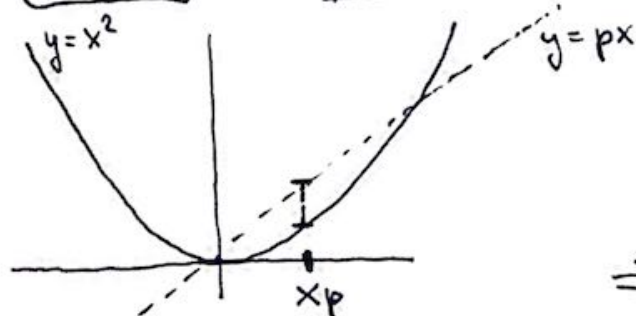
Významným obrátem/kroem je přechod od lagrangeových rovnic (L) k rovnicím Hamiltonovým (H). K tomu potřebujeme důležitý nástroj, který se nazývá Legendreova transformace.

Legendreova transformace Bud' $f \in C^2$, striktně konvexní

Pak $\text{Leg}: f(x) \mapsto g(p)$, kde $g(p) := p x(p) - f(x(p))$
a $x(p)$ je bod maxima funkce $p x - f(x)$ pro dané p .

tedy se g nazývá DUALNÍ FUNKCE

Příklad ① $f(x) = x^2$



Hledáme $\max_{x \in \mathbb{R}} (p x - f(x))$

Nutná podmínka $p - f'(x) = 0$
 $p - 2x = 0$
 $x_p = \frac{p}{2}$

$$\Rightarrow g(p) = \frac{p^2}{2} - \frac{p^2}{4} = \underline{\underline{\frac{p^2}{4}}}$$

Tedy $\text{Leg}(x^2) = \frac{p^2}{4}$ neboť $\text{Leg} : x^2 \mapsto \frac{p^2}{4}$

(2) Ukážte si sami, že

- $\text{Leg}\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{p^2}{2}$
- $\text{Leg}\left(\frac{ux^2}{2}\right) = \frac{p^2}{2u}$

(3) $f(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}, \alpha > 1$ $\Rightarrow$ Některá podmínka: $p - x^{\alpha-1} = 0 \Downarrow$

$$x = p^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

a tedy $(\text{Leg } f)(p) = g(p) = p^{1+\frac{1}{\alpha-1}} - \frac{1}{\alpha} p^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} =$

$$= \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) p^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} = \frac{p^\beta}{\beta} \quad \text{ kde } \boxed{\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha} = 1}$$

β dualní exponent k α , $\beta = \frac{\alpha}{\alpha-1}$.

Legendrova transformace konvexní funkce je strictně konvexní fce.
Má tedy smysl: $\boxed{\text{Leg}(\text{Leg } f)}$ $\forall f$ strictně konvexní

Platí: $\boxed{\text{Leg}(\text{Leg } f) = f}$

Legendrova transformace lze definovat i pro $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$
 C^2 splňující $d^2 f(x; h, h) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \quad \forall h \in \mathbb{R}^d$.

$\text{Leg} : f(x) \mapsto g(p)$ kde $g(p) := p \cdot x(p) - f(x(p))$
 $x(p) = \max_x (x \cdot p - f(x))$
 tzn. pro $x(p)$ má tran $\rightarrow \boxed{p = \nabla f(x(p))}$

Bud' $L: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R}^{3N} \rightarrow \mathbb{R}$ striktně konvexní vzhledem k $\dot{q}$
 $L \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R}^{3N})$ $\vec{q}$ $\dot{\vec{q}}$ tm. $\frac{\partial^2 L(t, \vec{q}, \dot{\vec{q}})}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} p_i p_j \geq \alpha |\mathbf{p}|_{\mathbb{R}^{3N}}^2$
 $\forall \mathbf{p} \in \mathbb{R}^{3N}$

$$(L) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dot{\vec{p}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{q}} \quad \wedge \quad \vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \end{array} \right]$$

Věta 9.8. Za daných předpokladů platí: $(L) \Leftrightarrow (H)$, kde

$$(H) \quad \begin{array}{l} \dot{\vec{p}} = - \frac{\partial H}{\partial \vec{q}} \\ \dot{\vec{q}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} \end{array}$$

$$a \quad H(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) = \text{Leg}(L_{t, \mathbf{p}}(\dot{\mathbf{q}}))(\mathbf{p}) = \vec{p} \cdot \dot{\vec{q}} - L(t, \vec{q}, \dot{\vec{q}})$$

De) Dle definice Legendrovy transformace a dle definice H
 plyne po $\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}}$ (podmínka na extrém)

a po ∇H platí jidnat

$$\nabla H = \left(\frac{\partial H}{\partial t}, \frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_{3N}}, \frac{\partial H}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial q_{3N}} \right)$$

ale také (z nové strany: definice H)

$$\nabla H = \left(-\frac{\partial L}{\partial t}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{3N}, -\frac{\partial L}{\partial q_1}, \dots, -\frac{\partial L}{\partial q_{3N}} \right)$$

Platí-li (L) , viz vzorečky před Větou, tak dostáváme

$$\dot{\vec{p}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{q}} = - \frac{\partial H}{\partial \vec{q}} \quad a \quad \dot{\vec{q}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} \quad a \quad \text{podobné vztahy jsou Hamiltonovy rovnice.}$$

Naopak, platí-li (H) , dostaneme stejnými argumenty (L) . ▣

a ještě důkaz

Důležitá poznámka: V předchozí větě $L = T - U$ nehrál žádnou roli. Věta 9.8 je tak obecnou větou variačního počtu.

Věta má významné důsledky.

Důsledek 1

Platí

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

neboli pokud H není závislá

explicitně na t , pak $\frac{dH}{dt} = 0$, což implikuje $H = \text{const.}$

(nemění se s časem).

$$\textcircled{Dk} \quad \frac{dH}{dt} = \left(\sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \sum_i \underbrace{\left\{ -\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} \right\}}_{=0} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

(H)

Definice Jsou-li f, g dvě funkce závislé na $t, \vec{p}, \vec{q}$, pak Poissonova závorka $\{f, g\}$ funkcí f a g je definována předpisem

$$\{f, g\} := \sum_{i=1}^k \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right)$$

$$\vec{p} = (p_1, \dots, p_k), \vec{q} = (q_1, \dots, q_k)$$

Motivace Je-li $f(t, \vec{p}, \vec{q})$ a H je Hamiltonián splňující (H),

$$\text{pak} \quad \frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^k \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\stackrel{(H)}{=} \sum_{i=1}^k \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial f}{\partial t} \quad \square$$

DŮSLEDK

Je-li $L = T - U$, kde $T := \sum_{i,j=1}^{3N} a_{ij}(t, \vec{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j$ a $U = U(t, q_1, \dots, q_{3N})$

$$a_{ij} = a_{ji}$$

pak lze upravit, že

$$\boxed{H = T + U}$$

$$\textcircled{Dk} \quad H = \vec{p} \cdot \dot{\vec{q}} - L(t, \vec{q}, \dot{\vec{q}}) = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L$$

(H) $\Leftrightarrow$ (L)

$$= \sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = \underset{\text{struktura } T}{2T} - T + U = T + U.$$

$$\text{Je-li totiž } f(x) = \sum_{i=1}^k a_{ij} x_i x_j \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_s} = \sum_j (a_{ij} x_i \delta_{js} + a_{ij} \delta_{js} x_j) = \sum_j (a_{is} x_i + a_{sj} x_j) = 2 \sum_{i=1}^k a_{is} x_i$$

a