Jméno a příjmení: ______________________________

Příklad	1	2	3	Celkem bodů
Bodů	8	8	8	24
Získáno				

[8] 1. Buď $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ daná prostá funkce, zobrazující (a, b) na $(A, B) \subset \mathbb{R}$.

- [1] Uveďte definici pojmu f *je prostá na* (a, b).
- [1,5] Uveďte definici funkce f^{-1}, inverzní funkce k funkci f.
- [1,5] Proč je k definici f^{-1} nutné předpokládat, že f je prostá na (a, b).
- [2] Zformulujte větu o spojitosti a derivování inverzní funkce, včetně vzorečku pro derivaci f^{-1}.
- [2] Uvažujte funkci "sekans" definovanou předpisem

$$\sec(x) := \frac{1}{\cos x} \quad \text{pro } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Vysvětlete, proč existuje k funkci sekans funkce inverzní (označme ji arcsec) a vypočtěte dle vámi uvedené věty její derivaci. K zjednodušení by měl stačit vztah $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Řešení

[1b] Def. $f : (a,b) \to (A,B)$ je prostá $\stackrel{df.}{\equiv}$ $\forall x_1, x_2 \in (a,b) : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

[1,5b] Def. $f : (a,b) \xrightarrow{na} (A,B)$ prostá. Pak zobrazení $f^{-1} : (A,B) \xrightarrow{na} (a,b)$ definované pro $y \in (A,B)$ tak, že $\boxed{f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y}$ se nazývá inverzní zobrazení

[1b] [0,5b] na $D_{f^{-1}}$ resp. $R_{f^{-1}}$.

[1,5] • Aby pro dané y existovalo (nejvýš) jedno x, tj. aby f^{-1} bylo zobrazení (funkce) tak, je nutné, aby f byla prostá. Kdyby existovaly x_1, x_2 různé tak, že platí pro nějaké $y \in (A,B)$

$f^{-1}(y) = x_1$ a $f^{-1}(y) = x_2$, pak dle definice

$y = f(x_1) = f(x_2)$ ale to je ve sporu s prostotou f.

[2b] • $\boxed{\text{Formulace A}}$ Buď $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ taková, že $f'(x) > 0$ $\forall x \in (a,b)$ [nebo $f'(x) < 0$]

Pak $\exists f^{-1} : (f(a), f(b)) \xrightarrow{na} (a,b)$ rostoucí, spojitá a pro $\forall y \in (f(a), f(b))$

platí $$\boxed{[f^{-1}]'(y) = \frac{1}{f'(x)\big|_{x = f^{-1}(y)}}} \quad (*)$$

• $\boxed{\text{Formulace B}}$ Buď $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taková, že

- $\exists\, \alpha, \beta_1, \beta_2 > 0 : f : (x - \alpha, x + \alpha) \xrightarrow{na} (f(x) - \beta_1, f(x) + \beta_2)$ prostá
- existuje $f'(x) \neq 0$
- f^{-1} je spojitá v $y = f(x)$

Pak existuje $(f^{-1})'(y)$ kde $y = f(x)$ a platí (*)

- $\sec x : (0, \frac{\pi}{2}) \xrightarrow{na} (1, +\infty)$ prostě nebol

- $\sec' x = \dfrac{-1 \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} > 0$ na $(0, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow$ sec je rostoucí, spojitá

  $H_{\sec x} = (1, +\infty)$.

- Dle věty o derivování inverzní funkce platí pro

  arcsec : $(1, +\infty) \xrightarrow{na} (0, \frac{\pi}{2})$ prostě

$$(\operatorname{arcsec})'(y) = \frac{1}{\sec'(x)}\Bigg|_{x = \operatorname{arcsec} y} = \frac{\cos^2 x}{\sin x}\Bigg|_{x = \operatorname{arcsec} y} =$$

$$= \frac{\cos^2 x}{\sqrt{1 - \cos^2 x}}\Bigg|_{x = \operatorname{arcsec} y} = \frac{1}{\sec^2 x \sqrt{1 - \frac{1}{\sec^2 x}}}\Bigg|_{x = \operatorname{arcsec}} =$$

$$\cos x = \frac{1}{\sec x}$$

$$= \frac{1}{\sec x \sqrt{\sec^2 x - 1}}\Bigg|_{x = \operatorname{arcsec} y} = \underline{\underline{\frac{1}{y\sqrt{y^2 - 1}}}}$$

[26]

[8] 2. [1] • Zadefinujte pojem primitivní funkce F k dané funkci $f : (a, b) \to \mathbb{R}$.

[3] • Vysvětlete, proč je primitivní funkce F spojitá v každém bodě $x_0 \in (a, b)$. Pokud využijete k vysvětlení nějaké tvrzení, tak tvrzení dokažte.

[1,5] • Zformulujte větu o (ne)jednoznačnosti primitivní funkce.

[2,5] • Větu o (ne)jednoznačnosti primitivní funkce dokažte.

· Řešení

[1] · F je PF k f na $(a,b) \stackrel{def.}{\equiv} F'(x) = f(x)$ pro $\forall x \in (a,b)$

[1] · Platí: ~~...~~ existuje-li pro $F:(a,b) \to \mathbb{R}$ derivace v x_0, pak je F spojitá v ~~x_0~~ x_0 neboť existuje

$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}$ a tedy $\exists M>0$ taková

[1]

[1] $\left|\dfrac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}\right| \leq M$ na $P_\delta(x_0) \Rightarrow |F(x)-F(x_0)| \leq M|x-x_0|$,

což dává spojitost přímo z definice (k danému $\varepsilon>0$ vol $\delta>0$ např. $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$).

· Věta o (ne)jednoznačnosti PF

[1,5] ① · Je-li F PF k f na (a,b), pak $F+C$ je PF k f na (a,b), $C \in \mathbb{R}$

(Dk) $(F+C)' = F' + C' = f + 0 = f$

[2,5] ② · Jsou-li F, G PF k f na (a,b), pak $\exists C \in \mathbb{R}$ taková

$F(x) = G(x) + C \quad \forall x \in (a,b)$.

(Dk) Chceme ukázat pro $H := F - G$ splňující $H'(x) = 0 \ \forall x \in (a,b)$ tvrzení $H(x) = C \in \mathbb{R} \ \forall x \in (a,b)$.

To plyne z LVOSH: zafixuji $x_0 \in (a,b)$ a uvažuji pro $x \neq x_0$ $\dfrac{H(x)-H(x_0)}{x-x_0}$. Tento podíl se rovná $H'(\xi) = 0$ dle LVOSH a předp.

Tedy $\forall x \in (a,b)$ platí $H(x) = H(x_0)$

Využívám tvrzení: Existuje-li $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}$, ~~...~~ pak ~~...~~ $\exists \delta > 0$ taková f je na $P_\delta(x)$ omezená.

(Dk) Definice lim s $\varepsilon = 1$ a $|f(x)| \leq |f(x) - A| + |A| = 1 + |A|$.

[8] 3. [1]• Pro danou posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadefinujte pojem *posloupnosti vybranné* z posloupnosti $\{a_n\}$.

[2]• Zformulujte Weirstrassovou větu pro omezenou posloupnost.

[2]• Zformulujte přesně tvrzení o globálních extrémech pro spojité funkce.

[3]• Tvrzení dokažte.

• [1] Buď $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dáno. Nechť $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Pak $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ je posloupnost vybraná z $\{a_n\}$.

• [2] $\boxed{\text{Weierstrass}}$ Buď $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ omezená. Pak ∃ posloupnost vybraná z $\{a_n\}$, která je konvergentní, tzn. $\exists \{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a nějaké $A \in \mathbb{R}$ tak, že $a_{n_k} \to a$ pro $k \to +\infty$ $\left(\lim_{k\to+\infty} a_{n_k} = a\right)$.

• [2] $\boxed{\text{Věta}}$ Buď f spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a,b\rangle$. Pak $\exists\, x_{MIN}$ a $x_{MAX} \in \langle a,b\rangle$ ve kterých f nabývá globálního maxima a minima, tzn. $\forall x \in \langle a,b\rangle$ platí

$$f(x_{MIN}) \le f(x) \le f(x_{MAX})$$

Dk [3] • Buď $S = \sup_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)$ (v $\mathbb{R}^*$ vždy existuje)

• Uvaž $S - \frac{1}{n}$ pro $n \in \mathbb{N}$ (nebo uvaž n je-li $S = +\infty$)

z definice suprema

Pak nutně existuje $x_n \in \langle a,b\rangle$ tak, že (nebo $f(x_n) > n$)

$$S - \frac{1}{n} \le f(x_n) < S$$

• Z Weierstrassovy věty aplikované na $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ omezené ∃ x_0, které A věty o limitním přechodu v nerovnostech, splňuje $x_0 \in \langle a,b\rangle$, tak, že

$$x_{n_k} \to x_0 \quad (k \to +\infty)$$

• Ze spojitosti (à la Heine):

$$f(x_{n_k}) \to f(x_0) \quad (k \to \infty)$$

• Ale také $f(x_{n_k}) \to S$. Odsud $S = f(x_0)$. Q.E.D.