

Řešení vybraných úloh 8. sada

1.a) Najděte maximální řešení ODR

$$(1) \quad y' \cos x - y \sin x = \cos^2 x.$$

Řešení: Vidíme, že rovnice (1) degeneruje v bodech, kde $\cos x = 0$. Na intervalech, kde je $\cos x \neq 0$, můžeme vydělit rovnici funkcí $\cos x$. Dostaneme

$$(2) \quad y' - y \tan x = \cos x, \quad x \in \left(\frac{-\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Dále

$$- \int \tan x \, dx = - \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = \ln |\cos x| + c.$$

Integrační faktor rovnice (1) je tedy $e^{\ln |\cos x|} = |\cos x|$. Abychom se nemuseli zabývat znaménkem¹ $\cos x$ na $(\frac{-\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, kde $k \in \mathbb{Z}$ je pevně zvolené, tak vynásobíme rovnici (2) funkcí $\text{sign}(\cos x)|\cos x| = \cos x$. Dostaneme

$$(3) \quad (y \cos x)' = y' \cos x - y \sin x = \cos^2 x.$$

Tím jsme sice dospěli k původní rovnici (1), ale na druhou stranu jsme vyjádřili levou stranu jakožto derivaci funkce $y \cos x$, a to bylo naším cílem. Dále

$$\int \cos^2 x \, dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} \, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + d, \quad d \in \mathbb{R}.$$

Tudíž z (3) plyne

$$(4) \quad y(x) = \frac{1}{\cos x} \left(\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + d \right) = \frac{x + 2d}{2 \cos x} + \frac{\sin x}{2}, \quad x \in \left(\frac{-\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Je patrné, že funkci y nelze pro žádné d spojitě rozšířit na žádný větší otevřený interval obsahující $(\frac{-\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Tedy (4) jsou všechna maximální řešení (1).

1.g) Najděte maximální řešení rovnice

$$(5) \quad y' \sin 2x = 2(y + \cos x),$$

které je omezené pro $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$.

Řešení: Podobně jako v příkladu 1.a), rovnice (5) degeneruje v bodech, kde $\sin 2x = 0$. Na intervalech, kde $\sin 2x \neq 0$, můžeme touto funkcí vydělit a dostaneme novou rovnici

$$(6) \quad y' - \frac{2y}{\sin 2x} = \frac{2 \cos x}{\sin 2x} = \frac{1}{\sin x}, \quad x \in \left(\frac{k\pi}{2}, \frac{(k+1)\pi}{2}\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Dále integrací spočteme

$$- \int \frac{2 \, dx}{\sin 2x} = \ln \left| \frac{\cos x}{\sin x} \right| + c = \ln |\cot x| + c.$$

Integrační faktor rovnice (1) je tedy $e^{\ln |\cot x|} = |\cot x|$. Abychom se nemuseli zabývat znaménkem $\cot x$ na $x \in (\frac{k\pi}{2}, \frac{(k+1)\pi}{2})$, kde $k \in \mathbb{Z}$ je pevně zvolené, tak vynásobíme rovnici (6) funkcí $\text{sign}(\cot x)|\cot x| = \cot x$. Dostaneme

$$(y \cot x)' = y' \cot x - \frac{1}{\sin^2 x} y = \frac{\cos x}{\sin^2 x}.$$

Dále

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} \, dx = -\frac{1}{\sin x} + d, \quad d \in \mathbb{R}.$$

Tudíž

$$(7) \quad y(x) = \tan x \left(d - \frac{1}{\sin x} \right) = d \tan x - \frac{1}{\cos x} = \frac{d \sin x - 1}{\cos x}$$

řeší (6) na $x \in (\frac{k\pi}{2}, \frac{(k+1)\pi}{2})$, $k \in \mathbb{Z}$.

¹Všimněte si, že $\cos x$ nemění znaménko na $(\frac{-\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Jestliže položíme $d = 1$, pak (7) je omezená na prstencovém okolí $\frac{\pi}{2}$, dokonce platí

$$(8) \quad \frac{\sin x - 1}{\cos x} = \frac{\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}}, \quad x \in \left(\frac{k\pi}{2}, \frac{(k+1)\pi}{2} \right), \quad k \in \mathbb{Z},$$

a pravá strana rovnosti v (8) je nekonečně diferencovatelná funkce na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$. Je navíc jasné, že pro žádnou jinou hodnotu d není (7) omezená na prstencovém okolí $\frac{\pi}{2}$. Navíc funkce

$$(9) \quad \frac{\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right)$$

řeší (5). Jelikož tuto funkci nelze spojitě rozšířit na žádný větší interval, je (9) o maximální řešení (5), které je omezená na prstencovém okolí $\frac{\pi}{2}$.

2.c) Nalezněte obecná řešení rovnice

$$(10) \quad y'' - y = 2e^x - x^2.$$

Řešení: Kořeny charakteristické rovnice

$$\lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$$

jsou $\lambda = \pm 1$. Obecné řešení příslušné homogenní rovnice má tedy tvar

$$y_h(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Nyní najdeme partikulární řešení nehomogenní rovnice (10). Nejprve studejme řešení rovnice

$$(11) \quad y'' - y = 2e^x.$$

Ta má pravou stranu ve speciálním tvaru. Jelikož e^x je řešením homogenní rovnice (neboli 1 je kořen charakteristické rovnice), řešení (11) můžeme hledat ve tvaru $y_{p1}(x) = a x e^x$, $a \in \mathbb{R}$. Dosazením do levé strany (11) zjistíme, že

$$(a x e^x)'' - a x e^x = (a e^x + a x e^x)' - a x e^x = (2a e^x + a x e^x) - a x e^x = 2a e^x,$$

tudíž $a = 1$.

Zbývá najít partikulární řešení y_{p2} rovnice

$$(12) \quad y'' - y = -x^2.$$

Pravá strana nemá speciální tvar. Řešení budeme hledat metodou variace konstant, tj. řešení (12) hledáme ve tvaru $y_{p2}(x) = u(x)e^x + v(x)e^{-x}$, kde $u(x), v(x)$ jsou neznámé funkce, o kterých navíc předpokládáme, že

$$u'(x)e^x + v'(x)e^{-x} = 0.$$

Pak u, v řeší soustavu diferenciálních rovnic

$$(13) \quad \begin{aligned} u'(x)e^x + v'(x)e^{-x} &= 0, \\ u'(x)e^x - v'(x)e^{-x} &= -x^2, \end{aligned}$$

kterou můžeme pomocí matic přepsat jako

$$\begin{pmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'(x) \\ v'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -x^2 \end{pmatrix}.$$

Determinant matice 2×2 je -2 , Cramerovo pravidlo tedy dává

$$\begin{aligned} u'(x) &= -\frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} 0 & e^{-x} \\ -x^2 & -e^{-x} \end{pmatrix} = \frac{-1}{2} x^2 e^{-x} \\ v'(x) &= -\frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ e^x & -x^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} x^2 e^x. \end{aligned}$$

Integrací dostaneme (integrační konstanty můžeme volit libovolně, např. 0)

$$u(x) = e^{-x} \left(\frac{x^2}{2} + x + 1 \right), \quad v(x) = e^x \left(\frac{x^2}{2} - x + 1 \right),$$

a tedy

$$y_{p2}(x) = u(x)e^x + v(x)e^{-x} = x^2 + 2.$$

Celkově je tedy každé řešení (10) tvaru

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + x e^x + x^2 + 2, \quad x \in \mathbb{R}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$