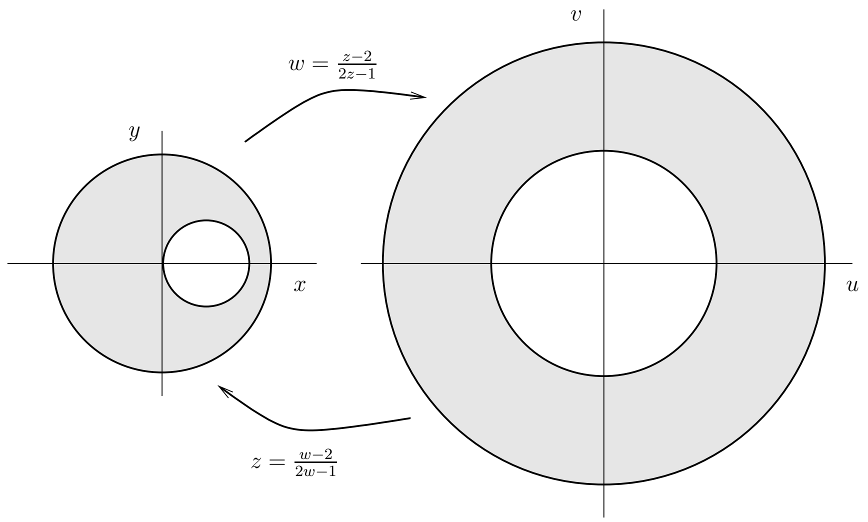
Termín pro odevzdání: čtvrtek 29. dubna 2021

Uvažujte množinu $D_{x,y}$, která je ohraničená dvě kružnicemi, viz Obrázek. Vnější kružnice je popsána rovnicí $|z| = 1$, vnitřní kružnice je popsána rovnici $\left|z - \frac{2}{5}\right| = \frac{2}{5}$. Množina $D_{x,y}$ je obrazem množiny $D_{u,v}$, která je ohraničená dvěma *soustřednými* kružnicemi $|w| = 1$ a $|w| = 2$ při zobrazení

$$z = \frac{w-2}{2w-1}. \tag{1}$$

V příkladu používáme následující konvenci pro zápis komplexních čísel, $z = x + \mathrm{i}y$ a $w = u + \mathrm{i}v$.



Obrázek 1: Zobrazení mezi množinami $D_{x,y}$ a $D_{u,v}$.

1. Ukažte, že inverzní zobrazení k (1) je dáno vztahem

$$w = \frac{z-2}{2z-1}. \tag{2}$$

2. Rozmyslete si, že tvrzení uvedené v zadání je skutečně pravdivé, to jest ukažte, že množina $D_{u,v}$ se skutečně zobrazí na $D_{x,y}$. Ukažte, že kružnice $|w| = 2$ se zobrazí na kružnici $\left|z - \frac{2}{5}\right| = \frac{2}{5}$, zatímco kružnice $|w| = 1$ se zobrazí na kružnici $|z| = 1$.

3. Na množině $D_{u,v}$ řešte Laplaceovu rovnici pro funkci $F(u,v)$,

$$\Delta_{u,v} F(u,v) = 0, \tag{3}$$
$$F(u,v)\big|_{u^2+v^2=1} = 0, \tag{4}$$
$$F(u,v)\big|_{u^2+v^2=4} = 1, \tag{5}$$

a ukažte, že řešení je dáno vztahem

$$F(u,v) = \frac{1}{2\ln 2} \ln\left(u^2 + v^2\right). \tag{6}$$

Symbol $\Delta_{u,v}$ značí Laplaceův operátor v proměnných u a v. Při řešení této úlohy by se vám mohl přijít vhod přepis Laplaceova operátoru do polárních souřadnic.

4. Na množině $D_{x,y}$ řešte Laplaceovu rovnici pro funkci $f(x,t)$,

$$\Delta_{x,y} f(x,y) = 0, \tag{7}$$
$$f(x,y)\big|_{\left|z-\frac{2}{5}\right|=\frac{2}{5}} = 1, \tag{8}$$
$$f(x,y)\big|_{|z|=1} = 0. \tag{9}$$

Měli byste dospět ke vzorci

$$f(x,y) = \frac{1}{2\ln 2} \ln \frac{(2x^2 + 2y^2 - 5x + 2)^2 + 9y^2}{\left((2x-1)^2 + 4y^2\right)^2}. \tag{10}$$

Toto je jiná technika na řešení Laplaceovy rovnice na excentrickém mezikruží než jakou jsme diskutovali na cvičení. Na cvičení jsme zvládli zobrazit *obdélník* na (skoro celé) excentrické mezikruží. Zde zobrazujeme *koncentrické mezikruží* na excentrické mezikruží. Myšlenka je ale v obou případech stejná — chceme pracovat na množině, na které lze Laplaceovu rovnici snadno řešit.