NOFY161, ZS 2020-2021 Teoretická část zkouškové písemné práce 12. února 2021

Jméno a příjmení: ______________________________

Příklad	1	2	3	4	**Celkem bodů**
Body	6	6	6	6	24
Získáno					

[6] 1. Buď $f_n : (a,b) \to \mathbb{R}$, $n = 1, \ldots, \infty$, kde $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

Zadefinujte tyto pojmy

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje bodově v (a,b).

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ splňuje Bolzano-Cauchyho podmínku pro nějaké $x \in (a,b)$.

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně v (a,b).

(iv) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ splňuje předpoklady Weierstrassovy věty (Weierstrassova testu).

Rozhodněte (a odůvodněte), zda platí:

1. (ii) $\implies$ (i).
2. (iv) $\implies$ (i).
3. (iii) $\implies$ $\sup_{x\in(a,b)} |f_n(x)| \to 0$ pro $n \to \infty$.

[6] 2. Zadefinujte pojmy (dle přednášené Daniellovy konstrukce Lebesgueova integrálu):

1. měřitelná funkce
2. (lebesgueovsky) měřitelná množina
3. Lebesgueova míra měřitelné množiny

- Jakou strukturu/vlastnosti má množina (lebesgueovsky) měřitelných množin?
- Dokažte, že Lebesgueova míra skutečně splňuje vlastnosti míry.
- Je Lebesgueova míra pravděpodobnostní míra? Proč?

[6] 3.

1. Zadefinujte pojem regulární plocha S parametrizovaná zobrazením $\mathbf{\Phi} = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) : (a, b) \times (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^3$.
2. Pro pevný, ale libovolný bod plochy $z \in S$, zadefinujte vektory $\mathbf{t}^1(z)$, $\mathbf{t}^2(z)$ generující tečnou nadrovinu (tečný prostor) k S v uvažovaném bodě z.
3. Pomocí vektorů $\mathbf{t}^1(z)$, $\mathbf{t}^2(z)$ zaveďte (zadefinujte) normálový vektor $\mathbf{n}(z)$ k S v uvažovaném bodě z.
4. Zadefinujte plošný integrál prvního druhu $\int_S f\, dS$
5. Zadefinujte pojem Gramova matice a vysvětlete, jak tento pojem souvisí s plošným integrálem prvního druhu a s normálovým vektorem $\mathbf{n}$ k S

[6] 4. Buď $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ daná 2π-periodická funkce, splňující $f \in L^2((0, 2\pi))$.

1. Uveďte definici klasické Fourierovy řady funkce f.
2. Co lze říci o bodové konvergenci této řady za výše uvedených předpokladů?
3. Co lze říci o konvergenci řady Fourierovských koeficientů?
4. Co lze říci o bodové konvergenci této řady, je-li f spojitá a po částech C^1?
5. Co lze říci o konvergenci řady Fourierovských koeficientů, je-li f spojitá a po částech C^1? Dokažte.