Jméno: ______________________________

Příklad	1	2	3	**Celkem bodů**
Bodů	10	6	14	30
Získáno				

[10] 1. Uvažujte posloupnost distribucí $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ definovanou jako

$$f_n(x) = \frac{1}{\pi} \frac{n}{\mathrm{e}^{nx} + \mathrm{e}^{-nx}},$$

Najděte limitu

$$f = \lim_{n \to +\infty} f_n$$

této posloupnosti, aneb spočtěte

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\pi} \frac{n}{\mathrm{e}^{nx} + \mathrm{e}^{-nx}},$$

přičemž limitou se myslí limita posloupnosti ve smyslu distribucí. Přesně specifikujte v jaké smyslu je konvergence definována.

Řešení:

Chceme ukázat, že pro každou testovací funkci φ platí

$$\langle T_{f_n}, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})} \to \langle T, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})},$$

kde konvergence je nyní standardní kovergence posloupnosti reálných čísel $\langle T_{f_n}, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})}$. Každý člen posloupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ je stadardním způsobem ztotožněn s distribucí T_{f_n}, dualita $\langle T_{f_n}, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})}$ je tedy

$$\langle T_{f_n}, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})} = \int_{x=-\infty}^{+\infty} f_n(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} \frac{n}{\mathrm{e}^{nx} + \mathrm{e}^{-nx}} \varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Zbývá spočíst limitu. Nejprve si promyslíme jak se chová posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ ve smyslu *bodové limity*. (Nakreslete si obrázek.) Vidíme, že

$$\lim_{n \to +\infty} f_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\pi} \frac{n}{\mathrm{e}^{nx} + \mathrm{e}^{-nx}} = \begin{cases} +\infty, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0. \end{cases}$$

Dále si můžeme povšimnout, že každá funkce f_n je pro všechna reálná čísla kladná. Navíc vidíme, že platí

$$\int_{x=-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} \frac{n}{\mathrm{e}^{nx} + \mathrm{e}^{-nx}}\,\mathrm{d}x = 2\int_{x=0}^{+\infty} \frac{1}{\pi} \frac{n}{\mathrm{e}^{nx} + \mathrm{e}^{-nx}}\,\mathrm{d}x \leq \frac{2}{\pi} \int_{x=0}^{+\infty} n\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{\pi}\left[\mathrm{e}^{-nx}\right]_{x=0}^{+\infty} = \frac{2}{\pi},$$

což nás vede k hypotéze, že limitou posloupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ ve smyslu distribucí bude Diracova distribuce s nosičem v bodě nula. (Posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ se "koncentruje" v nule a integrál z každého člen posloupnosti je konečný, přičemž integrál lze odhadnout shora nezávisle na n.) Pokusme se tuto hypotézu ověřit. Předpokládejme, že funkce φ má nosič v intervalu $[a, b]$, pak platí

$$\int_{x=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} \frac{n}{\mathrm{e}^{nx} + \mathrm{e}^{-nx}} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x=a}^{b} \frac{1}{\pi} \frac{n}{\mathrm{e}^{nx} + \mathrm{e}^{-nx}} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} y = nx \\ \mathrm{d}y = n\mathrm{d}x \end{bmatrix} = \frac{1}{\pi} \int_{y=na}^{nb} \frac{1}{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}} \varphi\left(\frac{y}{n}\right)\,\mathrm{d}y.$$

Provedeme limitní přechod $n \to +\infty$ a výsledkem je

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{x=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} \frac{n}{\mathrm{e}^{nx} + \mathrm{e}^{-nx}} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(0) \frac{1}{\pi} \int_{y=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}y,$$

z čehož plyne, že

$$\lim_{n \to +\infty} \langle T_{f_n}, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})} = c\varphi(0) = c\left\langle T_{\delta(x-0)}, \varphi \right\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})}$$

kde c je konstanta určená vztahem

$$c =_{\mathrm{def}} \frac{1}{\pi} \int_{y=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}y.$$

Spočteme hodnotu konstanty c, jest

$$\frac{1}{\pi}\int_{y=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}y = \begin{vmatrix} z & = \mathrm{e}^x \\ \mathrm{d}z & = \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = z\ \mathrm{d}x \end{vmatrix} = \frac{1}{\pi}\int_{z=0}^{\infty}\frac{1}{z\ +\frac{1}{z}}\frac{\mathrm{d}z}{z} = \frac{1}{\pi}\int_{z=0}^{\infty}\frac{1}{z^2+1}\,\mathrm{d}z\ = \frac{1}{\pi}\left[\arctan z\ \right]_{z=0}^{+\infty} = \frac{1}{2}.$$

Pro každou testovací funkci φ tedy platí, že

$$\lim_{n\to+\infty}\left\langle T_{f_n},\varphi\right\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})} = \left\langle T_{\frac{1}{2}\delta(x-0)},\varphi\right\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})},$$

odkud

$$\lim_{n\to+\infty} T_{f_n} = T_{\frac{1}{2}\delta(x-0)},$$

aneb ve smyslu ditribucí

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\pi}\frac{n}{\mathrm{e}^{nx}+\mathrm{e}^{-nx}} = \frac{1}{2}\delta(x-0).$$

[6] 2. S použitím Laplaceovy transformace najděte řešení g obyčejné diferenciální rovnice

$$\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} - 6g = 0$$

na intervalu $(-1, +\infty)$ s počátečními podmínkami

$$\left. g \right|_{x=-1} = 3,$$
$$\left. \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} \right|_{x=-1} = 1.$$

(Podívejte se pozorně na jakém intervalu chceme najít řešení a v jakém bodě předepisujeme počáteční podmínky.)

Řešení:

Nejprve si uvědomíme, že namísto funkce g můžeme rovnici řešit pro funkci f, která je definovaná jako

$$f(x) =_{\mathrm{def}} g(x-1),$$

aneb

$$g(x) = f(x+1).$$

Pro funkci f je nutné vyřešit rovnici

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} - 6f = 0$$

na intervalu $(0, +\infty)$ s počátečními podmínkami

$$\left. f \right|_{x=0} = 3,$$
$$\left. \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \right|_{x=0} = 1,$$

což je standardní úloha řešitelná Laplaceovou transformací. S použitím známých vztahů pro Laplaceovu transformaci $\mathcal{L}[f] =_{\mathrm{def}} \int_{x=0}^{+\infty} f(x) \mathrm{e}^{-px} \, \mathrm{d}x$ derivace funkce

$$\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right] = p\mathcal{L}[f] - f(0),$$
$$\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}\right] = p^2\mathcal{L}[f] - pf(0) - \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(0),$$

převedeme rovnici do tvaru

$$p^2\mathcal{L}[f] - 3p - 1 + p\mathcal{L}[f] - 3 - 6\mathcal{L}[f] = 0,$$

odkud

$$\mathcal{L}[f] = \frac{3p+4}{p^2+p-6}.$$

Zbývá spočíst inverzní Laplaceovu transformaci. Výraz na pravé straně rozložíme na parciální zlomky, jest $p^2+p-6 = (p+3)(p-2)$ a standardní algebraické manipulace nás vedou k závěru, že

$$\frac{2p-8}{p^2-5p+6} = \frac{1}{p+3} + \frac{2}{p-2}.$$

Víme, že platí

$$\mathcal{L}[\mathrm{e}^{ax}] = \frac{1}{p-a},$$

což znamená, že

$$\mathcal{L}[f] = \mathcal{L}[\mathrm{e}^{-3x}] + 2\mathcal{L}[\mathrm{e}^{2x}],$$

odkud

$$f(x) = \mathrm{e}^{-3x} + 2\mathrm{e}^{2x}.$$

Řešení původně zadané rovnice je tedy

$$g(x) = \mathrm{e}^{-3(x+1)} + 2\mathrm{e}^{2(x+1)}.$$

[14] 3. Buď $a \in \mathbb{R}^+$. Na prostoru $\mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^3\right)$ řešte rovnici

$$\left(\Delta^2 - a^2\Delta + a^4\right) f = \delta(x-0),$$

kde $\delta(x-y)$ značí Diracovu distribuci v bodě y, a symbol Δ značí Laplaceův operátor

$$\Delta g =_{\mathrm{def}} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}.$$

Užíváte-li Fourierovu transformaci definovanou jako

$$\mathcal{F}[f(\boldsymbol{x})](\boldsymbol{\xi}) =_{\mathrm{def}} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{x}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{x}\bullet\boldsymbol{\xi}}\, \mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

kde d je dimenze prostoru, na kterém pracujeme, pak připomínáme, že vzorec pro Fourierovu transformaci/inverzní Fourierovu transformaci sféricky symetrické funkce v $\mathbb{R}^3$ je

$$\mathcal{F}[f(|\boldsymbol{x}|)](\boldsymbol{\xi}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{|\boldsymbol{\xi}|} \int_{r=0}^{+\infty} f(r) \sin\left(r\, |\boldsymbol{\xi}|\right) r\, \mathrm{d}r,$$

$$\mathcal{F}^{-1}[g(|\boldsymbol{\xi}|)](\boldsymbol{x}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{|\boldsymbol{x}|} \int_{\eta=0}^{+\infty} g(\eta) \sin\left(|\boldsymbol{x}|\, \eta\right) \eta\, \mathrm{d}\eta.$$

Řešení:

Úlohu vyřešíme s pomocí Fourierovy transformace. Použijeme-li výše uvedenou definici Fourierovy transformace, a známé vzorce pro Fourierovu transformaci derivace a Fourierovu transformaci Diracovy distribuce, vidíme, že Fourierova transformace zadané rovnice je

$$\left(|\boldsymbol{\xi}|^4 + a^2 |\boldsymbol{\xi}|^2 + a^4\right) \mathcal{F}[f](\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}.$$

Pro hledanou funkci f tedy platí

$$f(\boldsymbol{x}) = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\left(|\boldsymbol{\xi}|^4 + a^2 |\boldsymbol{\xi}|^2 + a^4\right)}\right].$$

Zbývá spočíst inverzní Fourierovu transformaci. Povšimneme si, že hledáme inverzní Fourierovu transformaci sféricky symetrické funkce, a použijeme vzorec uvedený v zadání příkladu. Jest tedy

$$f(\boldsymbol{x}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{|\boldsymbol{x}|} \int_{\eta=0}^{+\infty} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} (\eta^4 + a^2\eta^2 + a^4)} \sin\left(|\boldsymbol{x}|\, \eta\right) \eta\, \mathrm{d}\eta.$$

Integrál spočteme technikou známou z teorie funckí komplexní proměnné. Integrand je sudá funkce proměnné η, proto platí

$$\begin{aligned}\int_{\eta=0}^{+\infty} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} (\eta^4 + a^2\eta^2 + a^4)} \sin\left(|\boldsymbol{x}|\, \eta\right) \eta\, \mathrm{d}\eta &= \frac{1}{2} \int_{\eta=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} (\eta^4 + a^2\eta^2 + a^4)} \sin\left(|\boldsymbol{x}|\, \eta\right) \eta\, \mathrm{d}\eta \\ &= \frac{1}{2} \Im \left\{ \int_{\eta=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} (\eta^4 + a^2\eta^2 + a^4)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}|\boldsymbol{x}|\eta} \eta\, \mathrm{d}\eta \right\},\end{aligned}$$

kde $\Im$ značí imaginární část příslušného výrazu. Označme si

$$I =_{\mathrm{def}} \int_{\eta=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} (\eta^4 + a^2\eta^2 + a^4)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}|\boldsymbol{x}|\eta} \eta\, \mathrm{d}\eta.$$

Integrujeme-li komplexní funkci

$$g(z) =_{\mathrm{def}} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} (z^4 + a^2 z^2 + a^4)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}|\boldsymbol{x}|z} z\ ,$$

podél kruhového oblouku o poloměru R v horní polorovině, to jest podél křivky $\boldsymbol{\gamma}_R = \{z \in \mathbb{C},\ z = s,\ s \in (-R, R)\} \cup \left\{z \in \mathbb{C},\ z = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi},\ \varphi \in (0, \pi)\right\}$, dostaneme

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\boldsymbol{\gamma}_R} g(z)\, \mathrm{d}z = I + \lim_{R\to+\infty} \int_{\varphi=0}^{\pi} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \left(\left(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right)^4 + a^2 \left(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right)^2 + a^4\right)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}|\boldsymbol{x}|\left(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right)} \left(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right)^2 \mathrm{i}\, \mathrm{d}\varphi.$$

Z Jordanova lemmatu plyne, že druhý integrál na pravé straně je v limitě vymizí, a je proto

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R} g(z)\,\mathrm{d}z \;= I.$$

Podle reziduové věty ovšem také platí

$$\int_{\gamma_R} g(z)\mathrm{d}z \;= 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{res}_{z_s\in\mathrm{int}\gamma_R}\, g(z).$$

Kde z_s jsou singularity funkce g. Funkce g má singularity v kořenech polynomu $z^4+a^2z^2+a^4$. Kořeny polynomu $\zeta^2+a^2\zeta+a^4$ jsou

$$\zeta_{1,2}=\frac{a^2}{2}\left(-1\pm\mathrm{i}\sqrt{3}\right)=\begin{cases}a^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2}{3}\pi},\\ a^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}},\end{cases}$$

což znamená, že kořeny polynomu $z^4+a^2z^2+a^4$, které leží v horní komplexní polorovině jsou

$$z_{s_{1,2}}=\begin{cases}a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}},\\ a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5}{6}\pi}.\end{cases}$$

Kořeny jsou jednonásobné, z čehož plyne, že singularity $g(z)$ v horní polorovině jsou jednonásobnými póly. Z residuové věty tedy zjistíme, že platí

$$\int_{\gamma_R} g(z)\mathrm{d}z \;= 2\pi\mathrm{i}\left(\mathrm{res}_{z=a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\left(z^4+a^2z^2+a^4\right)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}|\boldsymbol{x}|z}z\;+\mathrm{res}_{z=a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2}{3}\pi}}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\left(z^4+a^2z^2+a^4\right)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}|\boldsymbol{x}|z}z\right).$$

Spočteme residua

$$\mathrm{res}_{z=a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}\frac{1}{(z^4+a^2z^2+a^4)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}|\boldsymbol{x}|z}z \;=\frac{1}{4z^3+2a^2z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}|\boldsymbol{x}|z}z\,\bigg|_{z=a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}=\frac{1}{4z^2+2a^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}|\boldsymbol{x}|z}\bigg|_{z=a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}$$

přičemž jsme použili lemma o výpočtu residua v jednonásobném pólu. Obdobně

$$\mathrm{res}_{z=a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5}{6}\pi}}\frac{1}{(z^4+a^2z^2+a^4)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}|\boldsymbol{x}|z}z \;=\frac{1}{4z^2+2a^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}|\boldsymbol{x}|z}\bigg|_{z=a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5}{6}\pi}}.$$

Celkem tedy

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{x})=\mathcal{F}^{-1}&\left[\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\left(|\boldsymbol{\xi}|^4+a^2|\boldsymbol{\xi}|^2+a^4\right)}\right]\\&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{|\boldsymbol{x}|}\frac{1}{2}\Im\left\{2\pi\mathrm{i}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{1}{4z^2+2a^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}|\boldsymbol{x}|z}\bigg|_{z=a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}+\frac{1}{4z^2+2a^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}|\boldsymbol{x}|z}\bigg|_{z=a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5}{6}\pi}}\right)\right\}.\end{aligned}$$

Zbývá explicitně spočíst pravou stranu. Uvědomíme si, že $a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5}{6}\pi}=-\overline{a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}$, kde $\overline{z}$ značí komplexně sdružené číslo k komplexnímu číslu z, z čehož plyne, že

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{4z^2+2a^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}|\boldsymbol{x}|z}\bigg|_{z=a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}+\frac{1}{4z^2+2a^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}|\boldsymbol{x}|z}\bigg|_{z=a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5}{6}\pi}}\right)&=\frac{1}{4z^2+2a^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}|\boldsymbol{x}|z}\bigg|_{z=a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}+\overline{\frac{1}{4z^2+2a^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}|\boldsymbol{x}|z}\bigg|_{z=a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}}\\&=\Re\left\{\frac{1}{4z^2+2a^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}|\boldsymbol{x}|z}\bigg|_{z=a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}\right\},\end{aligned}$$

kde $\Re$ značí reálnou část příslušného komplexního čísla. (Uvědomte si, že pokud by součet residuí *nebyl* reálné číslo, pak by zpětná Fourierova transformace vedla na komplexní funkci.) Vrátíme se zpět k vzorci pro zpětnou Fourierovu transformaci a vidíme, že

$$f(\boldsymbol{x})=\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\left(|\boldsymbol{\xi}|^4+a^2|\boldsymbol{\xi}|^2+a^4\right)}\right]=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{|\boldsymbol{x}|}\Re\left\{\frac{1}{4z^2+2a^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}|\boldsymbol{x}|z}\bigg|_{z=a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}\right\}.$$

Spočteme reálnou část

$$\begin{aligned}\Re\left\{\frac{1}{4z^2+2a^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}|\boldsymbol{x}|z}\bigg|_{z=a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}\right\}&=\frac{1}{2a^2}\Re\left\{\frac{1}{2z^2+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}a|\boldsymbol{x}|z}\bigg|_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)}\right\}=\frac{1}{2a^2}\Re\left\{\frac{1}{\frac{\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2}{2}+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{a|\boldsymbol{x}|}{2}\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)}\right\}\\&=\frac{1}{a^2}\Re\left\{\frac{1}{\mathrm{i}\sqrt{3}}\mathrm{e}^{-\frac{a|\boldsymbol{x}|\sqrt{3}}{2}+\mathrm{i}\frac{a|\boldsymbol{x}|}{2}}\right\}=\frac{1}{a^2\sqrt{3}}\mathrm{e}^{-\frac{a|\boldsymbol{x}|\sqrt{3}}{2}}\sin\left(\frac{a|\boldsymbol{x}|}{2}\right),\end{aligned}$$

což znamená, že řešením úlohy je funkce

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2\pi a^2 \sqrt{3}} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{a|\boldsymbol{x}|\sqrt{3}}{2}} \sin\left(\frac{a|\boldsymbol{x}|}{2}\right)}{|\boldsymbol{x}|}.$$