Jméno a příjmení: ______________________________

Příklad	1	2	3	**Celkem bodů**
Body	9	12	9	30
Získáno				

[9] 1. (a) Zadefinujte prostor $L^2(\mathbb{R})$ a uveďte význačné vlastnosti, které tento prostor má.
(b) Zaveďte Fourierovu transformaci $\mathcal{F}[f]$ pro $f \in L^2(\mathbb{R})$. Konstrukci přesně popište. Pojmy a vztahy, na kterých je konstrukce založena, uveďte také.
(c) Ukažte a dokažte, jak lze Fourierovu transformaci funkcí z prostoru $L^2(\mathbb{R})$ počítat.

[12] 2. (a) Uvedte podrobně definici pojmu *distribuce*.
(b) Rozhodněte, zda pro $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^d$ a $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, jsou následující zobrazení distribuce:

- $\varphi \to \int_\Omega u\mathbf{b} \cdot \nabla\varphi \, dx$,
- $\varphi \to \int_\Omega u\varphi\mathbf{b} \cdot \nabla\varphi \, dx$,
- $\varphi \to \sum_{i=1}^N \varphi(x_i)$, kde $x_i \in \Omega$, $i = 1, \dots, N$.

(c) Buď T distribuce. Uveďte definici α-té derivace T, kde $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ je multiindex. Vysvětlete, proč se definuje derivace distribucí právě tímto způsobem?
(d) Buď $0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$ a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^d$. Objasněte, co znamená, že $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ řeší rovnici

$$-\Delta u + \mathbf{b} \cdot \nabla u = \frac{1}{2}\delta(x - 0) \tag{1}$$

ve smyslu distribucí. Zde $\delta(x-0)$ značí Dirakovu disribuci s nosičem v bodě 0. Jakou identitu u přesně splňuje?
(d) Nechť u řeší rovnici (1). Jaký tvar má pak řešení (neboli co je řešení) rovnice

$$-\Delta u + \mathbf{b} \cdot \nabla u = f \,, \tag{2}$$

kde $f : \Omega \to \mathbb{R}$ je daná integrovatelná funkce.

[9] 3. (a) Zformulujte a dokažte větu o třech potenciálech.
(b) Hledejte řešení Dirichletovy úlohy pro Laplaceovu rovnici pomocí věty o třech potenciálech metodou Greenovy funkce. Vysvětlete, co je Greenova funkce a proč lze pomocí této funkce nalézt řešení Dirichletovy úlohy pro Laplaceovu rovnici. Jakou úlohu Greenova funkce řeší?