Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale co nejpřesněji odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte ověřit splnění předpokladů.

Jméno a příjmení: ________________________

Příklad	1	2	3	4	5	**Celkem bodů**
Bodů	8	7	7	6	7	35
Získáno						

[8] 1. Buď dán funkcionál Φ na množině $M = \left\{ y \in \mathcal{C}^1([0,1]) \,|\, y(0) = 0, y(1) = 1 - \frac{1}{e} \right\}$ předpisem

$$\Phi(y) = \int_0^1 \left(2yy' - e^x (y')^2 \right) \mathrm{d}x.$$

a) Spočtěte první Gâteaux derivaci funkcionálu Φ v bodě y ve směru h. (Tedy $\delta\Phi[y](h)$ neboli $D\Phi(y)[h]$, záleží na značení, kterému dáváte přednost.) Popište přesně v jakém prostoru funkcí leží h.

b) Napište Euler–Lagrange rovnici pro funkcionál Φ.

c) Najděte extremálu funkcionálu Φ na množině M, extremálu označte y_{ext}.

d) Spočtěte druhou Gâteaux derivaci funkcionálu Φ v bodě y ve směru h. (Tedy $\delta^2\Phi[y](h,h)$ neboli $D^2\Phi(y)[h,h]$, záleží na značení, kterému dáváte přednost.)

e) Vyčíslete druhou Gâteaux derivaci funkcionálu Φ v bodě y_{ext} ve směru h pro y_{ext}, které je řešením Euler–Lagrange rovnice pro funkcionál Φ. Ukažte, že Gâteaux derivace je v tomto bodě v libovolném směru h nekladná.

Řešení:

Spočteme Gâteaux derivaci funkcionálu $\Phi(y)$ dle definice

$$D\Phi(y)[h] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(y+th)\bigg|_{t=0}.$$

Po dosazení

$$\Phi(y+th) = \int_0^1 \left(2(y+th)(y+th)' - e^x \left((y+th)'\right)^2 \right) \mathrm{d}x,$$

derivujeme podle t a výsledkem je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(y+th) = \int_0^1 \left(2h(y+th)' + 2(y+th)h' - 2e^x (y+th)' h' \right) \mathrm{d}x$$

po dosazení $t=0$ dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(y+th)\bigg|_{t=0} = 2\int_0^1 (hy' + yh' - e^x y'h')\,\mathrm{d}x,$$

a proto

$$D\Phi(y)[h] = 2\int_0^1 (hy' + yh' - e^x y'h')\,\mathrm{d}x.$$

Po integraci *per partes*

$$2\int_0^1 \left(y' - y' + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^x y') \right) h\mathrm{d}x.$$

Eulerovy–Lagrangeovy rovnice tedy jsou

$$(e^x y')' = 0,$$

řešením výše uvedené diferenciální rovnice je zřejmě funkce

$$y = -C_0 e^{-x} + C_1,$$

integrační konstanty určíme z okrajových podmínek, má být

$$\begin{aligned} -C_0 + C_1 &= 0, \\ -\frac{C_0}{e} + C_1 &= 1 - \frac{1}{e}, \end{aligned}$$

odkud $C_0 = 1$, $C_1 = 1$ a tedy
$$y = -e^{-x} + 1.$$

Druhou derivaci funkcionálu Φ spočteme podle předpisu

$$\begin{aligned} D^2\Phi(y)[h,h] &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} D\Phi(y+th)[h]\Big|_{t=0} \\ &= 2\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_0^1 \left(h(y+th)' + (y+th)h' - e^x (y+th)'h'\right)\mathrm{d}x\right)\Big|_{t=0} \\ &= 2\int_0^1 \left(2hh' - e^x\left(h'\right)^2\right)\mathrm{d}x = -2\int_0^1 \left(e^x\left(h'\right)^2\right)\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

což je (v poslední úpravě jsme použili integraci per partes a skutečnost, že funkce h je rovná nule v krajních bodech zkoumaného intervalu) kupodivu totéž jako dle věty

> Buď Φ funkcionál zadaný předpisem
> $$\Phi(y) = \int_a^b F(x,y,y')\,\mathrm{d}x.$$
> Pak je jeho druhý diferenciál roven
> $$D^2\Phi(y)[h,h] = \int_a^b \left[P\left(h'\right)^2 + Qh^2\right]\mathrm{d}x,$$
> kde
> $$\begin{aligned} P &= \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y'}, \\ Q &= \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}\right), \end{aligned}$$

Máme tedy
$$D^2\Phi(y)[h,h] = -2\int_0^1 e^x\left(h'\right)^2 \leq 0,$$
a okamžitě vidíme, že druhá derivace je nekladná v jakémkoliv bodě y a navíc nezávisí na y. (To není překvapení, funkcionál Φ je “kvadratický” v proměnné y.) Druhá derivace vyčíslená v bodě y_{ext} je

$$D^2\Phi(y_{\mathrm{ext}})[h,h] = -2\int_0^1 e^x\left(h'\right)^2.$$

[7] 2. Buď dána posloupnost funkcí

$$f_n(x) = n\left[\sin\left(x+\frac{1}{n}\right) - \sin x\right]$$

Najděte bodovou limitu f této posloupnosti v intervalu $I = [0, +\infty)$. Rozhodněte, zda posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ konverguje stejnoměrně k f na intervalu J a K, kde

1. $J = (0, +\infty)$,
2. $K = (\varepsilon, +\infty)$, kde $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ je dané kladné reálné číslo.

Řešení:

Počítejme

$$\lim_{n\to+\infty} f_n = \lim_{n\to+\infty} n\left[\sin\left(x+\frac{1}{n}\right) - \sin x\right] = \lim_{n\to+\infty} n\left[\sin x\cos\frac{1}{n} + \cos x\sin\frac{1}{n} - \sin x\right]$$

$$= \lim_{n\to+\infty} n\sin x\left(\cos\frac{1}{n} - 1\right) + \lim_{n\to+\infty} n\cos x\sin\frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sin x\frac{\cos\frac{1}{n}-1}{\frac{1}{n^2}} + \lim_{n\to+\infty}\cos x\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \cos x,$$

kde jsme využili známých limit $\lim_{s\to0}\frac{\sin s}{s} = 1$ a $\lim_{s\to0}\frac{1-\cos s}{s^2} = \frac{1}{2}$ a součtových vzorců pro funkci $\sin x$. Limitu jsme mohli počítat také s použitím Taylorova rozvoje,

$$\lim_{n\to+\infty} f_n = \lim_{n\to+\infty} n\left[\sin\left(x+\frac{1}{n}\right) - \sin x\right] = \lim_{n\to+\infty} n\left[\sin(x) + (\cos x)\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - \sin x\right]$$

$$= \lim_{n\to+\infty} n\left[(\cos x)\frac{1}{n}\right] = \cos x,$$

přičemž jsme využili Taylorův rozvoj funkce $\sin(x+h) = \sin x + (\cos x)\,h + \cdots$ v okolí bodu x. Bodová limita je tedy pro jakékoliv $x \in I$

$$\lim_{n\to+\infty} f_n = \cos x.$$

Označme si

$$f(x) =_{\text{def}} \cos(x).$$

Zbývá rozhodnout, zda na daných intervalech J a K platí $f_n \rightrightarrows f$. K zodpovězení této otázky použijeme ekvivalentní charakterizaci stejnoměrné konvergence, která říká:

> Buď $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ posloupnost reálných funkcí jedné reálné proměnné. Posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ konverguje pro $n\to+\infty$ stejnoměrně k funkci f na intervalu M, aneb
>
> $$f_n \overset{M}{\rightrightarrows} f,$$
>
> právě když pro $n\to+\infty$ platí
>
> $$\sigma_n \to 0,$$
>
> kde
>
> $$\sigma_n =_{\text{def}} \sup_{x\in M}|f_n(x) - f(x)|.$$

Zabývejme se nyní intervalem J. Pro jakékoliv $x \in J$ platí

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|n\left[\sin\left(x+\frac{1}{n}\right) - \sin x\right] - \cos x\right| = \left|n\left[\sin x\cos\frac{1}{n} + \cos x\sin\frac{1}{n} - \sin x\right] - \cos x\right|$$

$$= \left|\cos x\left(n\sin\frac{1}{n} - 1\right) + n\sin x\left(\cos\frac{1}{n} - 1\right)\right| \le |\cos x|\left|\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} - 1\right| + |\sin x|\left|\frac{1}{n}\frac{\cos\frac{1}{n}-1}{\frac{1}{n^2}}\right|$$

$$\le \left|\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} - 1\right| + \left|\frac{1}{n}\frac{\cos\frac{1}{n}-1}{\frac{1}{n^2}}\right|,$$

odkud plyne, že

$$0 \le \lim_{n\to+\infty}\sigma_n \le \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} - 1\right| + \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{1}{n}\frac{\cos\frac{1}{n}-1}{\frac{1}{n^2}}\right| = 0,$$

kde jsme opět využili známé limity pro goniometrické funkce. Podle zmíněné věty je tedy na intervalu J konvergence *stejnoměrná*. Jelikož platí $K \subset J$, okamžitě vidíme, že konvergence je *stejnoměrná* i na intervalu K.

[7] 3. Spočtěte

$$I(a) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax} \frac{1-\cos x}{x} \, \mathrm{d}x,$$

kde $a \in \mathbb{R}^+$ je libovolné ale pevné kladné reálné číslo. *Postupy použité při řešení je nutné pečlivě zdůvodnit!*

Řešení:

Počítejme nejprve formálně bez ověření korektnosti prováděných operací (záměna derivace a integrálu). Jest

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}a} = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial a}\left(\mathrm{e}^{-ax}\frac{1-\cos x}{x}\right) \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} (\cos x - 1)\, \mathrm{e}^{-ax} \, \mathrm{d}x,$$

což je integrál, který umíme přímo spočíst. Jest

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax} \, \mathrm{d}x = \left[-\frac{\mathrm{e}^{-ax}}{a}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{a}.$$

Integrál $\int_0^{+\infty} \cos x \, \mathrm{e}^{-ax} \, \mathrm{d}x$ spočteme klasickým postupem,

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \cos x \, \mathrm{e}^{-ax} \, \mathrm{d}x &= \begin{vmatrix} u = \cos x & u' = -\sin x \\ v' = \mathrm{e}^{-ax} & v = -\frac{\mathrm{e}^{-ax}}{a} \end{vmatrix} = \left[-\cos x \frac{\mathrm{e}^{-ax}}{a}\right]_0^{+\infty} - \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} \sin x \, \mathrm{e}^{-ax} \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{a} - \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} \sin x \, \mathrm{e}^{-ax} \, \mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = \sin x & u' = \cos x \\ v' = \mathrm{e}^{-ax} & v = -\frac{\mathrm{e}^{-ax}}{a} \end{vmatrix} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a}\left(\left[-\sin x \frac{\mathrm{e}^{-ax}}{a}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} \cos x \, \mathrm{e}^{-ax} \, \mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2}\int_0^{+\infty} \cos x \, \mathrm{e}^{-ax} \, \mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

odkud plyne, že

$$\int_0^{+\infty} \cos x \, \mathrm{e}^{-ax} \, \mathrm{d}x = \frac{a}{a^2+1}.$$

Celkem proto

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}a} = \frac{a}{1+a^2} - \frac{1}{a}.$$

Diferenciální rovnici pro funkci I snadno vyřešíme přímou integrací,

$$I = \frac{1}{2}\ln\left(1+a^2\right) - \ln a + C,$$

kde C je integrační konstanta.

Zbývá určit hodnotu integrační konstanty. To provedem pomocí limit $a \to +\infty$. Z právě odvozeného vztahu plyne

$$\lim_{a\to+\infty} I = \lim_{a\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+a^2}{a^2}\right) + C\right) = C.$$

Přímým výpočtem ovšem získáme (pokud lze zaměnit limitu a integrál)

$$\lim_{a\to+\infty} I = \lim_{a\to+\infty}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax}\frac{1-\cos x}{x} \, \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \lim_{a\to+\infty} \mathrm{e}^{-ax}\frac{1-\cos x}{x} \, \mathrm{d}x = 0.$$

Integrační konstanta je tedy rovna nule, a platí

$$I = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+a^2}{a^2}\right).$$

Zbývá ověřit platnost formálně provedených operací. Nejprve se budeme zaobírat záměnou limity a integrálu, k tomu poslouží věta:

Buď $f(x,b) : I \times J \to \mathbb{R}$, kde $I \subset \mathbb{R}$ a $J \subset \mathbb{R}$. Nechť platí

- Funkce $f(x,b)$ jakožto funkce proměnné b je diferencovatelná pro skoro všechna $x \in I$.
- Funkce $f(x,b)$ jakožto funkce proměnné x je lebesgueovsky měřitelná pro všechna $b \in J$.
- Existuje lebesgueovsky integrovatelná funkce $g : I \to \mathbb{R}$ taková, že pro skoro všechna $b \in J$ platí $\left|\frac{\partial}{\partial b} f(x,b)\right| \le g(x)$.

- Existuje $b_0 \in J$ tak, že funkce $f(x, b_0)$ jakožto funkce proměnné x je lebesgueovsky integrovatelná na I.

Pak je pro každé $b \in J$ funkce $f(x, b)$, jakožto funkce x, lebesguovsky integrovatelná na I, funkce

$$F(b) = \int_I f(x, b)\mathrm{d}x$$

je diferencovatelná na I a platí

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}b} = \int_I \frac{\partial}{\partial b} f(x, b)\mathrm{d}x.$$

V našem případě je $I = \mathbb{R}^+$ a $J = (\varepsilon, +\infty)$, kde ε je libovolné kladné reálné číslo, a

$$f(x, a) = \mathrm{e}^{-ax}\frac{1 - \cos x}{x}.$$

Diferencovatelnost funkce $f(x, a)$ vůči proměnné a je zřejmá, měřitelnost vůči proměnné x je zjevná ze spojitosti vůči proměnné x.

Zbývá zjistit, zda existuje $a_0 \in J = (\varepsilon, +\infty)$ takové, že funkce $f(x, a)$ je lebesgueovsky integrovatelná na $I = \mathbb{R}^+$. To je ovšem snadné. Předně funkci $f(x, a)$ lze spojitě dodefinovat v nule,

$$f(x, a)|_{x=0} = \lim_{x \to 0+} \mathrm{e}^{-ax}\frac{1 - \cos x}{x} = 0.$$

Lebesgueovská integrovatelnost $f(x, a)$ na intervalu $(0, K)$, kde $K \in \mathbb{R}^+$, je tedy zřejmá ze spojitosti $f(x, a)$ na intervalu $[0, K]$. Zbývá vyšetřit chování "v nekonečnu". Na intervalu $(2, +\infty)$ platí odhad

$$\left|\mathrm{e}^{-ax}\frac{1 - \cos x}{x}\right| \leq 2\mathrm{e}^{-ax},$$

kde na pravé straně stojí lebesgueovsky integrovatelná funkce na $\mathbb{R}^+$. Hledané $a_0 \in J = (\varepsilon, +\infty)$ je tedy libovolné číslo z požadovaného intervalu.

Posledním krokem je nalezení majoranty pro derivaci. Derivace $\frac{\partial}{\partial a} f(x, a)$ je dána vztahem

$$\frac{\partial}{\partial a} f(x, a) = (\cos x - 1)\,\mathrm{e}^{-ax},$$

a hledaný odhad pro $a \in (\varepsilon, +\infty)$ je

$$\left|(\cos x - 1)\,\mathrm{e}^{-ax}\right| \leq 2\mathrm{e}^{-ax} \leq 2\mathrm{e}^{-\varepsilon x},$$

kde na pravé straně zjevně stojí lebesgueovsky integrovatelná funkce na $\mathbb{R}^+$.

Záměnu limity a integrálu odůvodníme například podle Lebesgueovy věty, která říká:

Nechť platí:

- Posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ je posloupnost měřitelných funkcí na množině M.
- Posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ konverguje pro skoro všechna $x \in M$ k funkci f, aneb pro skoro všechna $x \in M$ platí $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$.
- Existuje lebesgueovsky integrovatelná funkce g, taková, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ pro skoro všechna $x \in M$ platí $|f_n(x)| \leq g(x)$.

Pak platí:

- Funkce f lebesgueovsky integrovatelná funkce na množině M.
- Lze zaměnit limitu a integrál,

$$\lim_{n \to +\infty} \int_M f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_M \lim_{n \to +\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_M f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Funkce g se nazývá integrovatelná majoranta funkce f.

Množina M je v našem případě $(0, +\infty)$, posloupnost f_n tvoří funkce

$$f_n = \mathrm{e}^{-a_n x} \frac{1 - \cos x}{x},$$

kde a_n je nějaká posloupnost pro kterou platí $\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty$, přičemž můžme bez újmy na obecnosti uvažovat pouze posloupnost, kde platí $a_n \leq a_{n+1}$. Platí

$$|f_n| = \left| \mathrm{e}^{-a_n x} \frac{1 - \cos x}{x} \right| = \mathrm{e}^{-a_1 x} \left| \frac{1 - \cos x}{x} \right|,$$

kde na pravé straně stojí lebesgueovsky integrovatelná funkce. (Použijeme stejnou argumentaci jako při vyšetřování platnosti předpokladů věty o záměně limity a integrálu.) Lze tedy zaměnit limitu $\lim_{a \to +\infty}$ a integrál. (Použili jsme Lebesgueovu větu pro posloupnosti, což je ale vzhledem k Heineho větě totéž jako kdybychom zkoumali limitu funkce.)

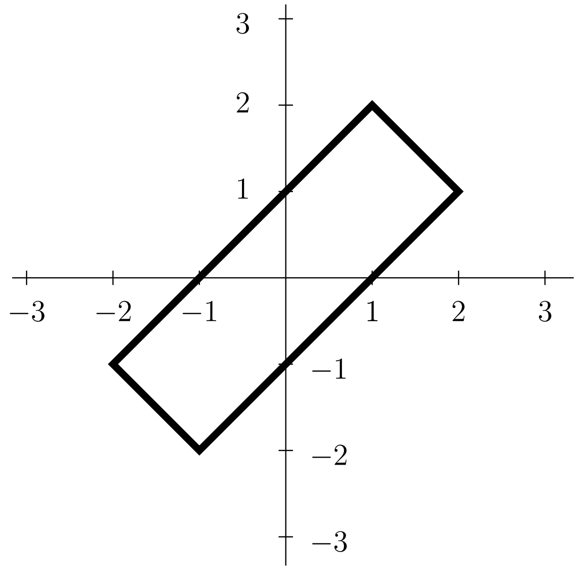
[6] 4. Buď f spojitá funkce *jedné* reálné proměnné $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, a buď Ω množina v $\mathbb{R}^2$ načrtnutá na Obrázku 1. (Množina Ω je obdélník s vrcholy v bodech $[1, 2]$, $[2, 1]$, $[-1, -2]$ a $[-2, -1]$.)

a) Spočtěte plošný obsah množiny Ω.

b) Ukažte, že platí

$$\int_\Omega f(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{w=-3}^{3} f(w)\,\mathrm{d}w,$$

kde dvojice x a y značí standardní souřadnice v $\mathbb{R}^2$.



Obrázek 1: Množina Ω.

Řešení:

Nejprve spočteme plošný obsah. Jelikož je množina Ω obdélník, je výpočet plošného obsahu snadný, potřebuje pouze znát délky stran. Delší strana obdélníku má délku $3\sqrt{2}$, kratší strana obdélníku má délku $\sqrt{2}$, plošný obsah je tedy

$$S_\Omega = 6.$$

(Formální výpočet přes integrál by proběhl volbou $f =_{\mathrm{def}} 1$, ve vzorci, který máme dokázat.) Tato úvaha mimo jiné naznačuje, že pro výpočty bude obdélník vhodné otočit (rozuměj použít vhodnou parametrizaci) tak, aby jeho strany byly rovnoběžné se souřadnicovými osami.

Zvolme si tedy novou sadu proměnných u a v, které jsou vůči původním proměnným x a y v následujícím vztahu

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(u+v),$$
$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}(u-v).$$

Tento vztah otáčí souřadnicové osy tak, jak potřebujeme. Skutečnost, že se jedná o otočení souřadnicových os snadno nahlédneme z následujícího

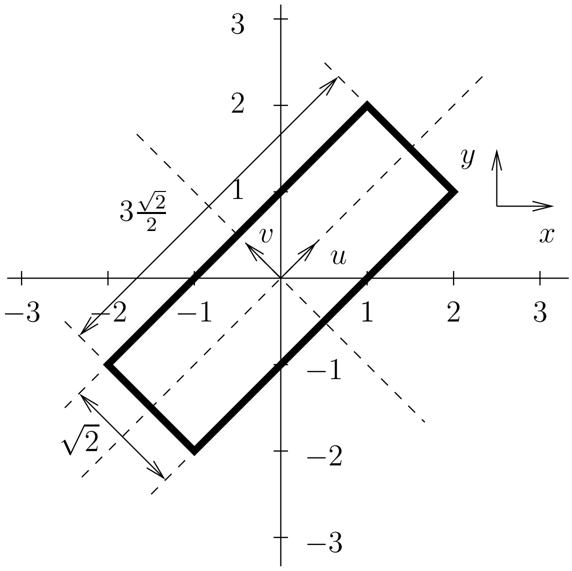
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\Bigg|_{\alpha=\frac{\pi}{4}} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}.$$

Parametrizace množiny Ω je tedy $\mathbf{x} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{u})$, aneb

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{\Phi}\left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}(u+v) \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(u-v) \end{bmatrix}.$$

Integrál inerpretujeme jako plošný integrál, $\int_\Omega f(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_\Omega f(x+y)\,\mathrm{d}s$. Spočteme element plochy

$$\mathrm{d}s = \sqrt{g}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$



Obrázek 2: Množina Ω.

kde

$$g = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u} \bullet \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u} & \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u} \bullet \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial v} \\ \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u} \bullet \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial v} & \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial v} \bullet \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial v} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1,$$

kde jsme využili $\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ a $\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial v} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Skutečnost, že $\sqrt{g} = 1$ aneb $\mathrm{d}s = \mathrm{d}u\mathrm{d}v$ není žádným překvapením. (Transformace $\mathbf{\Phi}$ je otočení, zachovává tedy velikost plochy.) Zbývá dopočítat meze pro integraci, zjevně je

$$u \in \left(-3\frac{\sqrt{2}}{2}, 3\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$
$$v \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

(Prohlédněte si obrázek.) Celkem tedy

$$\int_\Omega f(x+y)\,\mathrm{d}s = \int_{u=-3\frac{\sqrt{2}}{2}}^{3\frac{\sqrt{2}}{2}} \int_{v=-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f\left(u\sqrt{2}\right) \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \sqrt{2} \int_{u=-3\frac{\sqrt{2}}{2}}^{3\frac{\sqrt{2}}{2}} f\left(u\sqrt{2}\right) \mathrm{d}u = \begin{vmatrix} w = u\sqrt{2} \\ \mathrm{d}w = \sqrt{2}\mathrm{d}u \end{vmatrix} = \int_{w=-3}^{3} f(w)\,\mathrm{d}w,$$

což jsme chtěli ukázat.

Uvedenou parametrizaci lze také chápat jako použítí věty o substituci pro Lebesgueův integrál v $\mathbb{R}^2$, dospěli bychom samozřejmě ke stejnému výsledku. Navíc se můžeme přesvědčit, že pokud volíme $f =_{\mathrm{def}} 1$, aneb pokud počítáme plošný obsah, tak je

$$\int_\Omega \mathrm{d}s = \int_{w=-3}^{3} \mathrm{d}w = 6,$$

což se kupodivu shoduje s výsledkem získaným prostou úvahou v první části příkladu.

[7] 5. Uvažujte funkci $f(x) = |\sin x|$ na $\mathbb{R}$.

a) Načrtněte graf funkce f.

b) Najděte Fourierovu řadu funkce f. (Funkci uvažujte s periodou 2π.)

c) Diskutujte konvergenci nalezené Fourierovy řady. Určete zda Fourierova řada konverguje k funkci f ve smyslu konvergence v L^2, ve smyslu bodové konvergence a ve smyslu stejnoměrné konvergence.

d) Ukažte, že pro $x \in [0, \pi]$ platí

$$\frac{\pi}{4}(\cos x - 1) + \frac{x}{2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(2kx)}{(2k-1)(2k)(2k+1)}$$

a najděte součet číselné řady

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(4k-3)(4k-2)(4k-1)}.$$

Řešení:

Spočteme Fourierovy koeficienty a_k, b_k, abychom mohli funkci f rozvinout do Fourierovy řady

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx.$$

Sinové koeficienty jsou nulové (neboť funkce je sudá), kosinové koeficienty spočteme podle vzorců

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \mathrm{d}x,$$
$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \mathrm{d}x.$$

Je tedy (využíváme vzorce $\cos x \sin y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) - \sin(x-y))$)

$$\pi a_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \mathrm{d}x = 2 \int_0^{\pi} \sin x \mathrm{d}x = 2[-\cos x]_0^{\pi} = 4$$

a

$$\begin{aligned}
\pi a_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \mathrm{d}x &= -\int_{-\pi}^{0} \sin x \cos kx \mathrm{d}x + \int_0^{\pi} \sin x \cos kx \mathrm{d}x \\
&= 2 \int_0^{\pi} \sin x \cos kx \mathrm{d}x = 2 \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \left(\sin((k+1)x) - \sin((k-1)x)\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi} \sin((k+1)x) \mathrm{d}x - \int_0^{\pi} \sin((k-1)x) \mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{\cos(k+1)x}{k+1}\right]_0^{\pi} - \left[-\frac{\cos(k-1)x}{k-1}\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{(-1)^k}{k+1} + \frac{1}{k+1} - \frac{(-1)^k}{k-1} - \frac{1}{k-1} = \begin{cases} 0, & k = 2l-1, l \in \mathbb{N}, \\ -\frac{4}{(k-1)(k+1)} = -\frac{4}{k^2-1}, & k = 2l, l \in \mathbb{N}. \end{cases}
\end{aligned}$$

(Předpokládáme samozřejmě, že $k \neq 1$, v tomto případě je ale integrace snadná – integrál je roven nule.)
Celkem tudíž

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{1}{(2l+1)(2l-1)} \cos 2lx.$$

Funkce f je spojitá a po částech spojitě diferencovatelná. (Ve smyslu diskutovaném na přednášce to jest včetně existence vlastních limit v krajních bodech jednotlivých intervalů.) Splňuje proto předpoklady kritéria pro konvergenci Fourierových řad, které říká:

Buď $f \in \mathcal{P}(2\pi)$ a buď funkce f dále po částech spojitá a spojitě diferencovatelná na $\mathbb{R}$, potom platí

$$\forall x \in \mathbb{R} : \lim_{n \to +\infty} s_n(x) = \frac{1}{2} \left(\lim_{\xi \to x+} f(\xi) + \lim_{\xi \to x-} f(\xi) \right)$$

Je-li navíc $I \subset (a,b)$ uzavřený interval a $f \in \mathcal{C}([a,b])$, pak

$$s_n \overset{I}{\rightrightarrows} f.$$

Funkce je zřejmě v $L^2((-\pi,\pi))$ a splňuje tedy předpoklady Carlesonovy věty o skoro všude konvergenci, která říká:

Buď $f \in \mathcal{P}(2\pi)$ a buď $f \in L^p((a,a+2\pi))$, $p \in (1,+\infty)$, pak platí

$$s_n \overset{L^p}{\to} f,$$
$$s_n(x) \to f(x) \text{ skoro všude.}$$

Což už ale stejně víme z předchozího.

Na libovoném omezeném intervalu (tedy i na $[0,\pi]$) je konvergence Fourierovy řady k funkci f stejnoměrná a na intervalu $[0,\pi]$ tedy platí

$$\sin x = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{1}{(2l+1)(2l-1)} \cos 2lx.$$

Integrací uvedeného vztahu (na pravé straně integrujeme člen po členu – stejnoměrná konvergence) dostaneme

$$-\cos x + C = \frac{2}{\pi} x - \frac{4}{\pi} \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{1}{(2l+1)(2l)(2l-1)} \sin 2lx,$$

pro $x = 0$ se rovnost redukuje na $-1 + C = 0$ odkud dostaneme $C = 1$, celkem tedy

$$\frac{\pi}{4}(\cos x - 1) + \frac{x}{2} = \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{1}{(2l+1)(2l)(2l-1)} \sin 2lx,$$

což jsme chtěli dokázat. Dosazením $x = \frac{\pi}{4}$ do vztahu

$$\frac{\pi}{4}(\cos x - 1) + \frac{x}{2} = \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{1}{(2l+1)(2l)(2l-1)} \sin 2lx,$$

dostaneme

$$\frac{\pi}{4}\left(\cos\frac{\pi}{4} - 1\right) + \frac{\pi}{8} = \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{\sin(l\frac{\pi}{2})}{(2l+1)(2l)(2l-1)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(4k-3)(4k-2)(4k-1)},$$

aneb

$$\frac{\pi}{8}\left(\sqrt{2} - 1\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(4k-3)(4k-2)(4k-1)},$$

což jsme chtěli ukázat.