NOFY151, ZS 2019-2020 | Početní část zkouškové písemné práce | 7. února 2020

Jméno: ______________________

Příklad	1	2	3	4	Celkem bodů
Bodů	8	8	12	8	36
Získáno					

[8] 1. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{(\pi-2x)^2}$$

1. l'Hospitalovým pravidlem (ověřte předpoklady),
2. jinak, tj. aniž byste l'Hospitalova pravidla použili.

Nezapomeňte explicitně zmínit věty, případně základní limity, které při výpočtu použijete.

Řešení a bodování

① $\boxed{\sin\frac{\pi}{2}=1 \Rightarrow \ln\sin\frac{\pi}{2}=0 \quad \& \quad (\pi-2x)^2\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}=0} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} f(x):=\ln\sin x \\ g(x):=(\pi-2x)^2 \end{array}}$ jsou

[2b] $\boxed{\text{spojité v } \frac{\pi}{2} \text{ a } f(\tfrac{\pi}{2})=g(\tfrac{\pi}{2})=0.}$

OVĚŘENÍ PŘEDPOKLADŮ L'HOSP. VĚTY

$f'(x)=\frac{\cos x}{\sin x}$ a $g'(x)=\underbrace{-4(\pi-2x)}_{\neq 0 \text{ v } P_\delta(\frac{\pi}{2})}$ a $-\frac{1}{4}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\pi-2x}$ je typu $\left(\frac{0}{0}\right)$

$+\frac{1}{4}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{-2} = \underline{\underline{-\frac{1}{8}}}$, kde jsme využili větu o limitě součinu. Tedy dle l'H:

[2b] SPRÁVNÝ VÝPOČET

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos x}{-4(\pi-2x)}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x} = -\frac{1}{4}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\pi-2x} \overset{l'H}{=} -\frac{1}{8}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1} = \underline{\underline{-\frac{1}{8}}}$$

② $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2} \underset{\boxed{y=x-\frac{\pi}{2}}}{=} \lim_{y\to 0}\frac{\ln\sin(y+\frac{\pi}{2})}{4y^2} \underset{\text{součtový vzorec}}{=} \lim_{y\to 0}\frac{\ln\cos y}{4y^2}$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{y\to 0}\frac{\ln\cos y}{\cos y-1}\,\frac{\cos y-1}{y^2}$$

[2b] VÝPOČET

$$= -\frac{1}{4}\lim_{y\to 0}\frac{\ln\cos y}{\cos y-1}\underbrace{\lim_{y\to 0+}\frac{1-\cos y}{y^2}}_{=1/2} = -\frac{1}{8}$$

$$\lim_{z\to 1}\frac{\ln z}{z-1}=1$$

[2b] ARITMETIKA LIMIT, ZÁKLADNÍ LIMITY

[8] 2. Uvažujte funkci

$$f(x) = \frac{1}{4 + 3\cos x}$$

1. Určete interval, kde je funkce f spojitá.
2. Na intervalu $(-\pi, 3\pi)$ nalezněte primitivní funkci k f.

Řešení

[1b] $\boxed{\text{Ad 1.}}$ $3\cos x \in [-3,3]$ pro $x \in \mathbb{R} \Rightarrow 4 + 3\cos x \in [1,7]$ pro $x \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow D_f = \mathbb{R}$ a ve všech bodech D_f je f spojitá $\Rightarrow f \in C((-\infty, +\infty))$.

[3b] $\boxed{\text{Ad 2.}}$ Volme substituci $t = \mathrm{tg}\frac{x}{2} : (-\pi,\pi) \xrightarrow{\text{na}} \mathbb{R}$ prostě

$\Rightarrow x = 2\,\mathrm{arctg}\,t \Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2}dt$ a $\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}$

ZA SPRÁVNĚ PROVEDENOU SUBSTITUCI

$$F(x) = \int \frac{dx}{4 + 3\cos x} = 2\int \frac{1}{1+t^2} \frac{dt}{4 + \frac{3(1-t^2)}{1+t^2}} = 2\int \frac{dt}{7+t^2}$$

~~1~~ 2 [B] ZA DOKONČENÍ VÝPOČTU

$$= \frac{2}{7}\int \frac{dt}{\left(\frac{t}{\sqrt{7}}\right)^2 + 1} \underset{\substack{y = \frac{t}{\sqrt{7}} \\ \sqrt{7}\,dy = dt}}{=} \sqrt{7}\,\frac{2}{7}\int \frac{dy}{y^2+1} = \frac{2}{\sqrt{7}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{7}}\right) + C$$

platná na $(-\pi, \pi)$

ale také na $(\pi, 3\pi)$.

$\lim\limits_{x \to \pi-} F(x) = \frac{2}{\sqrt{7}}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{7}}$ a $\lim\limits_{x \to \pi+} F(x) = -\frac{\pi}{\sqrt{7}}$

Hledaná $F(x)$ má tvar: $F(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{7}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{7}}\right) + C & \text{na } (-\pi,\pi) \\ \frac{2}{\sqrt{7}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{7}}\right) + \frac{2\pi}{\sqrt{7}} + C & \text{na } (\pi, 3\pi) \end{cases}$

[2B] ZA NALEPENÍ (SKOK, CELKOVÝ VÝSLEDEK)

[12] 3. Vyšetřete průběh funkce (definiční obor D_f, intervaly spojitosti, limity v krajních bodech D_f, průsečíky s osami, intervaly monotónie, lokální a globální extrémy, obor hodnot f, limity derivací v krajních bodech $D_{f'}$, intervaly konvexity, konkávity funkce f, inflexní body, asymptoty, pečlivý náčrtek grafu)

$$f(x) = \arccos\left(\frac{2\ln x}{\ln^2 x + 1}\right).$$

Řešení:

[1.5b]
- Definiční obor: musí platit $x > 0$ 0.5 a zároveň $-1 \le \frac{2\ln x}{\ln^2 x+1} \le 1$ 0.5, poslední dvě nerovnosti ovšem platí pro všechna reálná čísla. Celkově dostaneme $\mathcal{D}(f) = (0, +\infty)$. ← 0.5

[1.5]
- f je spojitá na celém $\mathcal{D}(f)$, není sudá, lichá, periodická, $f \ge 0$ na $\mathcal{D}(f)$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = e$, $f(x) = \pi \Leftrightarrow x = 1/e$. Dále je $f(1) = \pi/2$. Obor hodnot je $\langle 0, \pi\rangle$.

$f(e) = 0$
$f(1) = \frac{\pi}{2}$
$f(\frac{1}{e}) = \pi$

- Limity v krajních bodech:

[2]

$$0.5 \quad \lim_{x\to 0+} f(x) = \frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}, \quad 0.5 \qquad \text{odkud rovněž plyne} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Poslední dvě limity tedy zároveň říkají, že přímka $y = \frac{\pi}{2}$ je asymptotou v $+\infty$.

- První derivace: pro $x \in \mathcal{D}(f') = (0, +\infty) \setminus \{\frac{1}{e}, e\}$ je

[2b]

$$f'(x) = \ldots = \frac{2(\ln^2 x - 1)}{x(\ln^2 x + 1)\sqrt{(\ln^2 x - 1)^2}} = \frac{2(\ln^2 x - 1)}{x(\ln^2 x + 1)|\ln^2 x - 1|} = \frac{2\,\mathrm{sign}(\ln^2 x - 1)}{x(\ln^2 x + 1)},$$

~~[2b]~~

$$\cancel{\text{dále} \quad f'(e+) = \lim_{x\to e+} f'(x) = \frac{1}{e}, \qquad f'(e-) = \lim_{x\to e-} f'(x) = -\frac{1}{e},}$$

$$\cancel{f'\left(\frac{1}{e}+\right) = \lim_{x\to\frac{1}{e}+} f'(x) = -e, \qquad f'\left(\frac{1}{e}-\right) = \lim_{x\to\frac{1}{e}-} f'(x) = e.}$$

[1b]

Funce f klesá na $(1/e, e)$, roste na $(0, 1/e)$ a na $(e, +\infty)$. V bodě $1/e$ je lokální maximum hodnoty π, v bodě e je lokální minimum hodnoty 0. Hodí se též spočítat si $\lim_{x\to0+} f'(x) = +\infty$.

- Druhá derivace:

[1b]

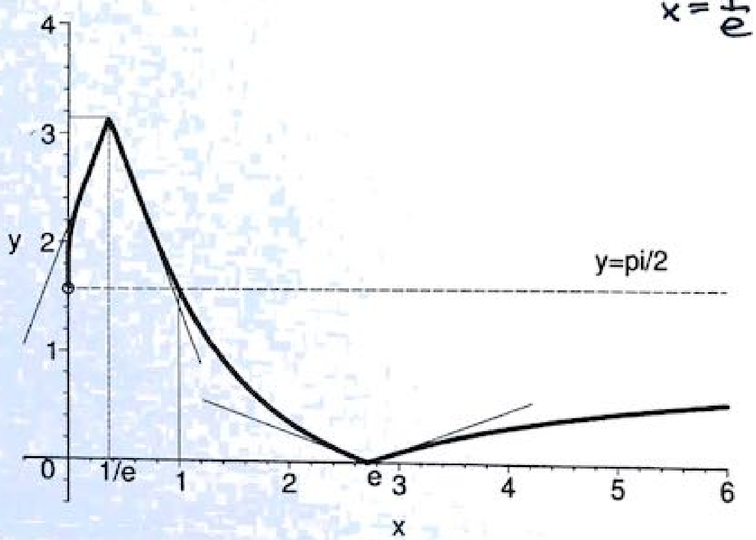
$$f''(x) = \ldots = -\frac{2(\ln x + 1)^2}{x^2(\ln^2 x + 1)^2}\,\mathrm{sign}(\ln^2 x - 1), \qquad x \ne \frac{1}{e}, e.$$

[1b]

f je tedy konvexní na $(1/e, e)$ a konkávní na $(0, 1/e)$ a na $(e, +\infty)$. Funkce ~~ne~~má inflexní body

$x = \frac{1}{e}$ a $x = e$

[2b]



$$\frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{4\ln^2 x}{(\ln^2 x+1)^2}}} \cdot \frac{\frac{2}{x}(\ln^2 x + 1) - 2\ln x \cdot 2\ln x\,\frac{1}{x}}{(\ln^2 x + 1)^2} = -\frac{2}{x} \cdot \frac{\ln^2 x + 1 - 2\ln^2 x}{(\ln^2 x+1)^2} \cdot \frac{|\ln^2 x + 1|}{\sqrt{\ln^4 x + 2\ln^2 x + 1 - 4\ln^2 x}} =$$

$$= -\frac{2}{x} \cdot \frac{1 - \ln^2 x}{(\ln^2 x + 1)^{\cancel{2}}} \cdot \frac{\cancel{|\ln^2 x + 1|}}{\sqrt{(\ln^2 x - 1)^2}} = \frac{2(\ln^2 x - 1)}{x(\ln^2 x + 1)\sqrt{(\ln^2 x - 1)^2}}$$

[8] 4. Nechť A, $B \in \mathbb{R}$ a nechť funkce f je definována

$$f(x) := \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ Ax^2 + Bx & x \in (0,1) \\ x & x \ge 1. \end{cases}$$

1. Určete podmínky na A, B tak, aby f byla spojitá v $\mathbb{R}$;
2. Určete podmínky na A, B tak, aby f byla neklesající v $\mathbb{R}$;
3. Určete podmínky na A, B tak, aby f byla konvexní v $\mathbb{R}$.

Řešení [Ad 1] $f \in C((-\infty,0))$, $f \in C((0,1))$ a $f \in C((1,\infty))$

[2b] Protože $\lim_{x\to 0+} Ax^2+Bx = 0$ a $\lim_{x\to 1-} Ax^2+Bx = A+B$ a $\lim_{x\to 1+} x = 1$

tak $f \in C(\mathbb{R})$ pokud $\boxed{A+B=1}$

[Ad 2] • f neklesající na $(-\infty,0)$ a na $(1,+\infty)$

• Dále musí být Ax^2+Bx neklesající na $(0,1)$ a $\lim_{x\to 1-} (Ax^2+Bx) \le \lim_{x\to 1+} x = 1$

[1b] (a $0 \le \lim_{x\to 0-} f(x) \le \lim_{x\to 0} Ax^2+Bx$ platí vždy) $\boxed{A+B \le 1}$

(derivace $2Ax+B$)

Ax^2+Bx je parabola s vrcholem v $x = -\frac{B}{2A}$

• Je-li $\boxed{A>0}$, pak $2Ax+B \ge 0$ pokud $x > -\frac{B}{2A}$

a $-\frac{B}{2A}$ musí být $\le 0 \Rightarrow \boxed{B \ge 0}$

[2b]

• Je-li $A=0$, pak $\boxed{B \ge 0}$

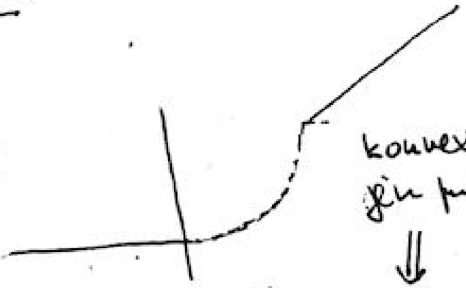
• Je-li $A<0$, pak $2Ax+B \ge 0$ pokud $x \le -\frac{B}{2A}$

a $-\frac{B}{2A}$ musí být $\ge 1 \Rightarrow -B \le 2A \Rightarrow \boxed{B \ge -2A}$

Tedy celkem

[1b] BUĎ $A \ge 0$, $B \ge 0$ a $A+B \le 1$ $\Leftrightarrow$ $A \in [0,1]$ a $B \in [0, 1-A]$

NEBO $A<0$, $B \ge -2A$ a $A+B \le 1$ $\Leftrightarrow$ $A \in [-1,0]$ a $B \in [-2A, 1-A]$



[Ad 3] • $f''(x)|_{x\in(0,1)} = 2A \ge 0$ nutně

konvexita jen pro $A=0$

$\Downarrow$

[2b] • $A+B=1$

• $\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 1-} \underbrace{(Ax^2+Bx)'}_{2A+B} \le \lim_{x\to 1+} x' = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow A=0$ $\boxed{A+B=1}$ $B=1$