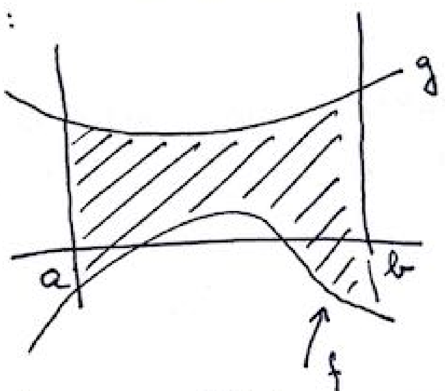
§5 RIEMANNŮV A NEWTONŮV INTEGRÁL

Riemannův a Newtonův integrál jsou dva různé typy tzv. určitých integrálů, což jsou příklady funkcionálů, tzn. zobrazení, které funkcím přiřadí číslo, přesněji zobrazení z prostoru funkcí (např. $C((a,b))$) do množiny čísel např. $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$. Tedy

$$\left.\begin{matrix}\text{Riemannův}\\ \text{nebo}\\ \text{Newtonův}\end{matrix}\right\}\text{integrál}:\quad \underset{\substack{\uparrow\\ \text{funkce}\\ \text{definovaná na }(a,b)}}{f} \longmapsto \text{číslo} \quad \text{značené}\begin{cases}(R)\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx\\ (N)\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx\end{cases}$$

Každý z těchto integrálů (a rovněž těchto dvou uslyšíme brzy o dolním Riemannově integrálu, horním Riemannově integrálu, a v příštím školním roce o Lebesgueově integrálu) je definován odlišně – pro rozumné třídy funkcí dávají stejné výsledky. Existují však funkce, které lze Riemannovsky integrovat, ale Newtonův integrál tyto funkce nemají a naopak.

Základní úloha, která vedla/vede k vývoji/rozvoji integrálního počtu je úloha určit obsah obrazce mezi dvěma funkcemi, viz obrázek:



Tuto geometrickou představu využijeme ke konstrukci Riemannova integrálu. Ještě předtím si však zavedeme integrál Newtonův, jehož konstrukce je (zdánlivě) zcela jiná.

5.1 Newtonův integrál

Definice (zobecněná primitivní funkce - ZPF). Řekneme, že F je zobecněná primitivní funkce k f na $(a,b) \subset \mathbb{R}$ jestliže platí:

- $F \in C((a,b))$
- $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a,b) \setminus K$ (kde K je konečná)

Definice ($(N)\int_a^b f(x)\,dx$) Buď

(1) F zobecněná primitivní funkce k f na $(a,b) \subset \mathbb{R}$ ← může být neomezený

(2) takový přírůstek $[F]_a^b := \lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x \to a+} F(x) = F(b-) - F(a+) \in \mathbb{R}^*$
(neboli $[F]_a^b$ má smysl)

Pak definujeme Newtonův integrál f na (a,b), značený $(N)\int_a^b f(x)\,dx$, předpisem

$$\boxed{(N)\int_a^b f(x)\,dx := [F]_a^b}$$

Pozorování (i) Definice $(N)\int_a^b f(x)\,dx$ nezávisí na volbě reprezentanta.
Přesněji: jsou-li F a G dvě ZPF k f na (a,b), pak F a G se liší o konstantu, tzn. $\exists C \in \mathbb{R}$ $F(x) = G(x) + C \quad \forall x \in (a,b)$.
Pak však

$$[F]_a^b = F(b-) - F(a+) = G(b-) + C - G(a+) - C = G(b-) - G(a+) = [G]_a^b.$$

(ii) Z minulého semestru umím nalézt PF ke spoustě funkcí; k těmto funkcím tak mohu přiřadit $(N)\int_a^b f(x)\,dx$.

Příklady ① $(N)\int_0^1 \ln x\,dx \overset{\text{per partes}}{=} [x\ln x - x]_0^1 = \lim_{x\to 1-}(x \ln x - x) - \lim_{x \to 0+}(x\ln x - x)$
$= -1 - 0 = \underline{\underline{-1}}$

! $\ln x$ je neomezená funkce na $(0,1)$. Přesto má Newtonův integrál.

② $(N)\int_0^{+\infty} x e^{-x}\,dx \underset{\text{per-partes}}{=} [-xe^{-x}]_0^{+\infty} + \int_0^{1} e^{-x}\,dx = -[(x-1)e^{-x}]_0^{\infty} = \underline{\underline{1}}$

! Newtonův integrál mají i funkce definované/integrované na neomezeném intervalu.

③ $(N)\int_0^K \frac{1}{x}\,dx = +\infty$ neb $(N)\int_0^K \frac{1}{x}\,dx = \left[\ln x\right]_0^K = \ln K + (+\infty) = +\infty$

a také

$$(N)\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \left[\ln x\right]_\varepsilon^{+\infty} = +\infty - \ln\varepsilon = +\infty$$

$\boxed{\varepsilon > 0}$

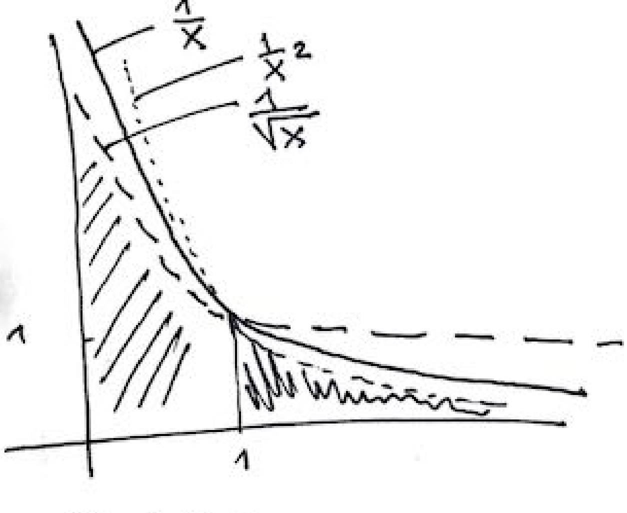
④ Ukážeme, že $(N)\int_0^K \frac{1}{x^\beta}\,dx < +\infty$ pro $\boxed{\beta < 1}$ (srovnej s příkladem ③).

Vskutku:
$$(N)\int_0^K \frac{1}{x^\beta}\,dx = \left[\frac{x^{1-\beta}}{1-\beta}\right]_0^K = \frac{K^{1-\beta}}{1-\beta}$$
pokud $1-\beta > 0$, což dává nám $\boxed{\beta < 1}$

⑤ Také podobně ukážeme, že
$$(N)\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{1}{x^\beta}\,dx < +\infty$$
pro $\boxed{\beta > 1}$ (opět srovnej s ③ i ④)

Vskutku:
$$(N)\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{1}{x^\beta}\,dx = \left[\frac{x^{1-\beta}}{1-\beta}\right]_\varepsilon^{+\infty} = \lim_{K\to+\infty} -\frac{1}{(\beta-1)x^{\beta-1}} + \frac{1}{(\beta-1)\varepsilon^{\beta-1}} =$$
$$= \frac{1}{(\beta-1)\varepsilon^{\beta-1}}$$
pokud $\beta - 1 > 0$ tj. $\boxed{\beta > 1}$

⑥ Zkuste zjistit, zda
$$(N)\int_K^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x} < \infty$$
respektive pro jaká $\beta \in \mathbb{R}$ bude
$$(N)\int_K^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^\beta} < \infty.$$



Obrázek 1

ZÁVĚR: Funkce $\frac{1}{x}$ je "limitní" jak v okolí 0 tak v okolí $+\infty$, a nikde nemá Newtonův integrál konečný. Vezmeme-li však funkce o malinko "menší" a to funkce $\frac{1}{x^\beta}$ s $\beta > 1$ pro x v okolí $+\infty$

a

$\frac{1}{x^\beta}$ s $\beta < 1$ pro x v okolí 0,

tak tyto funkce již Newtonův integrál konečný mají.

5.2 Definice Riemannova integrálu

Základní motivační úloha pro zavedení Riemannova integrálu je určení obsahu obrazce

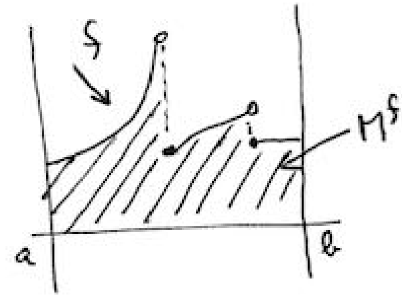
$$M^f := \{(x,y)\,;\, x \in (a,b) \text{ a } y \in (0, f(x))\}$$

kde

$f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $f \geq 0$ je daná nezáporná omezená fce definovaná na intervalu konečné délky, tj. $-\infty < a < b < +\infty$.

[M^f se nazývá podgraf funkce f.]

$$\left[\ (R)\int_a^b f(x)\,dx = \text{"obsah } M^f\text{"}\ \right]$$



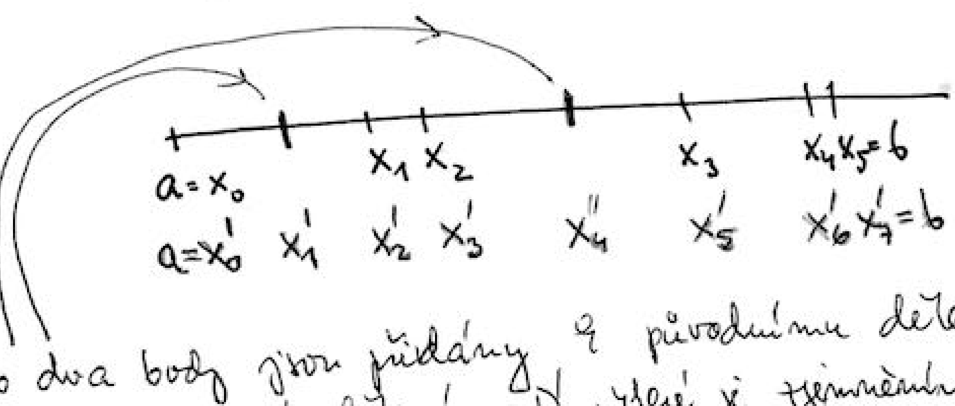
Je-li $f(x) = C \in \mathbb{R}^+$ pro $\forall x \in (a,b)$, pak

$$(R)\int_a^b f(x)\,dx = C(b-a)$$

Definice • Dělením D intervalu $\langle a,b\rangle$, $-\infty < a < b < +\infty$, nazveme $(m+1)$-reálných čísel x_i, $i = 0,1,\dots,m$, pro které platí:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < \dots < x_m = b.$$

- Číslo $|D| := \max\limits_{i=1,\dots,m} |x_i - x_{i-1}|$ nazveme normou dělení.
- Řekneme, že dělení D' je zjemněním dělení D pokud každý bod dělení D je bodem dělení D'.



- Tyto dva body jsou přidány k původnímu dělení D. Po přidání dostáváme nové dělení D', které je zjemněním D.

Předpokládejme, že $\boxed{f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R} \text{ je daná omezená funkce, } -\infty<a<b<+\infty.}$

Buď D dělení $\langle a,b\rangle$.

Označme:

$$m := \inf_{x\in\langle a,b\rangle} f(x) \qquad M := \sup_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)$$

$$m_i := \inf_{x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle} f(x) \qquad M_i := \sup_{x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle} f(x) \qquad i=1,\dots,m.$$

Z omezenosti f plyne (pro každé $i\in\{1,\dots,m\}$):

$$(2) \qquad -\infty < m \le m_i \le M_i \le M < +\infty$$

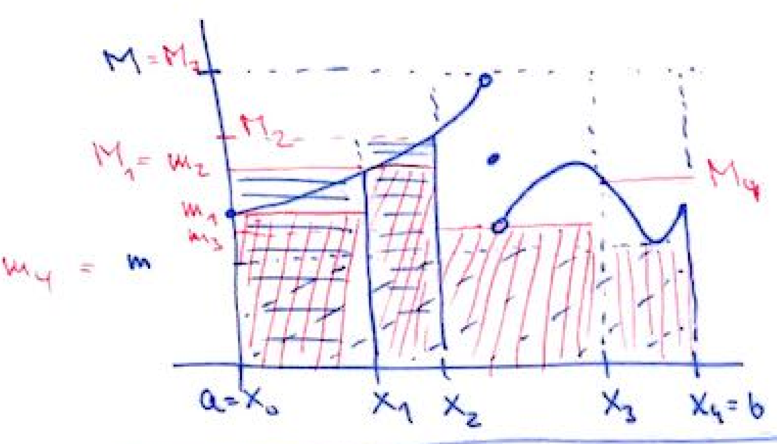
Dále definujme $\underbrace{\text{dolní/horní Riemannův součet}}$ $s(D)/S(D)$ předpisem:

$$s(D) = s(D,f) := \sum_{i=1}^{m} m_i (x_i - x_{i-1})$$

$$S(D) = S(D,f) := \sum_{i=1}^{m} M_i (x_i - x_{i-1})$$

Z (2) plyne (NAKRESLETE SI OBRÁZEK)

$$(3) \qquad -\infty < m(b-a) \le \boxed{s(D) \le S(D)} \le M(b-a) < +\infty.$$



Toto tvrzení se dá zesílit. Platí totiž:

Tvrzení 5.1. Buď D_1, D_2 dvě libovolná dělení intervalu $\langle a,b\rangle$. Pak

$$(4) \qquad s(D_1) \le S(D_2)$$

Dk **KROK 1** Buď D^* zjemnění dělení D. Pak platí:

$$(5) \qquad s(D) \le s(D^*) \quad \text{a} \quad S(D) \ge S(D^*)$$

Čtenář si může vztahy (5) potvrdit nejdříve pro D^*, které vznikne z D přidáním jednoho bodu.

KROK 2 Uvažujme dvě libovolná, ale pevná dělení $\langle a,b\rangle$. Označme D^* dělení, které vznikne sjednocením bodů dělení D_1 a D_2. Pak D^* je zjemnění jak dělení D_1 tak dělení D_2. Odsud, respektive z (3) a (5) plyne

$$s(D_1) \le s(D^*) \le S(D^*) \le S(D_2),$$

což dává (4). ∎

Definice Dolní Riemannův integrál f na $\langle a,b\rangle$, značený $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$, definujeme jako supremum dolních Riemannových součtů $s(D)$, kde supremum bereme přes všechna dělení D intervalu $\langle a,b\rangle$, tj.

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx := \sup_D s(D)$$

Podobně, horní Riemannův integrál f na $\langle a,b\rangle$, značený $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$, definujeme:

$$\boxed{\overline{\int_a^b} f(x)\,dx := \inf_D S(D)}$$

Důležitá pozorování
- Horní a dolní Riemannův integrál pro omezenou fci f na $\langle a,b\rangle$ vždy existují.
- Navíc, z (4) plyne (přechodem k $\sup_{D_1}$ a přechodem k $\inf_{D_2}$), že

$$(6) \qquad -\infty < \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx < +\infty.$$

Příklady ① Buď $f(x) \equiv C \in \mathbb{R}^+$. Pak $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup_D C(b-a) = C(b-a)$ a $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = C(b-a)$ také. Tedy pro f konstantní platí v (6) rovnost.

② Buď $D(x) = \begin{cases} 1 & \text{v } \langle 0,1\rangle \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$

Pak $\underline{\int_0^1} D(x)\,dx = 0$, kdežto $\overline{\int_0^1} D(x)\,dx = \inf_D 1 = 1$.

Tak $\underline{\int_0^1} D(x)\,dx \ne \overline{\int_0^1} D(x)\,dx$. Vidíme tedy, že omezenost f na $\langle a,b\rangle$ nestačí k tomu, aby v (6) platila rovnost.

Definice Řekneme, že $f: \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ omezená <u>má Riemannův integrál</u>, značený $(R)\int_a^b f(x)dx$, jestliže $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$.

- Jak plyne z příkladu ② výše, Riemannův integrál nemusí existovat.
- Z definice $(R)\int_a^b f(x)dx$ a z (6) plyne tato charakterizace <u>existence $(R)\int_a^b f(x)dx$</u>:

$$(7)\quad (R)\int_a^b f(x)dx \text{ existuje} \iff (\forall \varepsilon>0)\left[\ \overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx < \varepsilon\right]$$

Tuto podmínku ještě zesílíme:

$\boxed{\text{Tvrzení}}$ <u>5.2</u> Buď $f: \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ omezená. Platí:

$$(8)\quad (R)\int_a^b f(x)dx \text{ existuje} \iff (\forall\varepsilon>0)(\exists D)\big(S(D)-s(D)<\varepsilon\big)$$

dělení intervalu $\langle a,b\rangle$

Dk $\boxed{\Rightarrow}$ Z existence $(R)\int_a^b f(x)dx$ plyne rovnost:

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx = (R)\int_a^b f(x)dx$$

Z ~~definice~~ definic $\underline{\int_a^b} f(x)dx$ a $\overline{\int_a^b} f(x)dx$ plyne: K libovolnému, pevnému $\varepsilon>0$ existují dělení D_1 a D_2 tak, že

$$S(D_1) < \overline{\int_a^b} f(x) + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{a} \quad s(D_2) > \underline{\int_a^b} f(x) - \frac{\varepsilon}{2}$$

Je-li D dělení vzniklé sjednocením D_1 a D_2, pak D je zjemněním D_1 i D_2 a platí

$$S(D) < \overline{\int_a^b} f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{a} \quad s(D) > \underline{\int_a^b} f(x)dx - \frac{\varepsilon}{2},$$

což implikuje $\underline{S(D)-s(D)} < \overline{\int_a^b} f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2} - \underline{\int_a^b} f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, což jsme chtěli ukázat.

$\boxed{\Leftarrow}$ Ze vztahu $S(D)-s(D)<\varepsilon$ plyne nejdříve, že $\overline{\int_a^b} f(x)dx - s(D) < \varepsilon$, ale tak $\overline{\int_a^b} f(x)dx - \sup_D s(D) = \overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx < \varepsilon$, což dle (7) dává tvrzení. ▨

Nyní si uvedeme tři věty, ve kterých jsou zformulovány postačující podmínky na existenci Riemannova integrálu.

<u>Věta 5.1</u> Je-li $f \in C(\langle a,b\rangle)$, pak (R) $\int_a^b f(x)\,dx$ existuje.

Dk Protože $f \in C(\langle a,b\rangle)$, dle Cantorovy věty je f stejnoměrně spojitá, tzn.

(9) $$(\forall \eta>0)(\exists \delta>0)(\forall x',x'' \in \langle a,b\rangle,\ |x'-x''|<\delta)\,(|f(x')-f(x'')|<\eta)$$

K důkazu existence (R) $\int_a^b f(x)\,dx$ využijeme podmínku (8). Buď tedy $\varepsilon>0$ dáno (pevně, ale libovolně). K $\eta := \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ najdeme z (9) $\delta>0$ tak, že $|f(x')-f(x'')|<\eta$ kdykoliv $|x'-x''|<\delta$.

Buď D dělení $\langle a,b\rangle$ tak, že $\underset{\text{norma dělení}}{|D|}<\delta$ (tj. pro všechna $i\in\{1,\dots,n\}$ $x_i-x_{i-1}<\delta$).

Ze spojitosti f na $\langle a,b\rangle$ také plyne:

$$M_i = \max_{x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle} f(x) = f(x^i_{max}) \quad \text{a} \quad m_i = \min_{x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle} f(x) = f(x^i_{min}) \qquad i=1,\dots,n.$$

Tedy
$$S(D)-s(D) = \sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)(x_i-x_{i-1}) < \eta\sum(x_i-x_{i-1}) = \eta(b-a) < \frac{\varepsilon(b-a)}{2(b-a)} < \varepsilon,$$

což dává tvrzení. ∎

<u>Věta 5.2</u> Je-li K konečná množina bodů v $\langle a,b\rangle$ a f je omezená v $\langle a,b\rangle$ a spojitá v $\langle a,b\rangle\setminus K$, pak (R) $\int_a^b f(x)\,dx$ existuje.

Dk Pro jednoduchost předpokládejme, že $f\in C(\langle a,b))$ (tzn., že $K=\{b\}$) a f je omezená v $\langle a,b\rangle$ konstantou L. K danému $\varepsilon>0$ uvažujme $\alpha\in(a,b)$ tak, že $(b-\alpha)<\frac{\varepsilon}{4L}$. Protože $f\in C(\langle a,\alpha\rangle)$, tak dle Věty 5.1 existuje (R) $\int_a^\alpha f(x)\,dx$. Tedy dle Tvrzení 5.2 existuje dělení $\tilde D$ intervalu $\langle a,\alpha\rangle$ tak, že

$$S(\tilde D)-s(\tilde D)<\frac{\varepsilon}{2}$$

Přidáme-li k dělení $\tilde D$ bod $\{b\}$, dostaneme dělení D intervalu $\langle a,b\rangle$, pro které platí:

$$S(D)-s(D) = \underbrace{S(\tilde D)-s(\tilde D)} + \Big(\sup_{x\in\langle\alpha,b\rangle} f(x) - \inf_{x\in\langle\alpha,b\rangle} f(x)\Big)(b-\alpha)$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \underbrace{2L(b-\alpha)}_{\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon,$$

což jsme chtěli ukázat. ∎

<u>Věta 5.3</u> Je-li f monotónní na $\langle a,b\rangle$. Pak existuje $(R)\int_a^b f(x)dx$.

(Dk) Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že f je neklesající. Pak $f(x) \in \langle f(a), f(b)\rangle$ $\forall x \in \langle a,b\rangle$. Buď D ekvidistantní dělení, tzn. $x_i = a + i\frac{b-a}{n} \iff x_{i+1}-x_i = \frac{b-a}{n}$ $\forall i = 1,\dots,n$

Pak také
$$M_i = f(x_i) \quad a \quad m_i = f(x_{i-1}).$$

Tedy
$$S(D) - s(D) = \frac{b-a}{n}\underbrace{\sum_{i=1}^{n}[f(x_i) - f(x_{i-1})]}_{f(x_n)-f(x_0)} = \frac{(b-a)}{n}(f(b)-f(a)) < \varepsilon,$$

pokud n je dostatečně velké. Důkaz je dokončen odkazem na Tvrzení 5.2. $\blacksquare$

$\boxed{5.3}$ <u>Vlastnosti Riemannova integrálu</u>

Nejdříve si ukážeme, že $(R)\int_a^b f(x)$ je lineární funkcionál. Ověřte sami, že $(N)\int_a^b f(x)dx$ je <u>lineární</u> funkcionál také.

<u>Věta 5.4</u> (LINEARITA $(R)\int_a^b f(x)dx$) Nechť existují $(R)\int_a^b f(x)dx$ a $(R)\int_a^b g(x)dx$. Pak pro $\alpha \in \mathbb{R}$ existují $(R)\int_a^b \alpha f(x)dx$ a $(R)\int_a^b (f(x)+g(x))dx$ a platí:

$$(9) \quad (R)\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha\,(R)\int_a^b f(x)dx$$

$$(10) \quad (R)\int_a^b (f(x)+g(x))dx = (R)\int_a^b f(x)dx + (R)\int_a^b g(x)dx$$

(Dk) $\boxed{\text{Ad }(9)}$ Protože
$$\inf\{\alpha y, y\in A\} = \alpha \inf\{y, y \in A\} \quad \text{pro } \overset{\alpha>0}{\alpha \in \mathbb{R}_+}$$
$$\sup\{\alpha y; y \in A\} = \alpha \sup\{y; y \in A\} \quad \text{pro } \alpha > 0,$$

tak, pro $\alpha > 0$
$$s(D;\alpha f) = \alpha s(D;f) \quad a \quad S(D;\alpha f) = \alpha S(D,f)$$

což dává (9) pro $\alpha > 0$. Je-li $\alpha \in \mathbb{R}$, pak $\alpha = \alpha_+ - \alpha_-$, kde $\alpha_+, \alpha_- \geq 0$ a
$$\alpha(R)\int_a^b f(x)dx = \alpha_+(R)\int_a^b f(x)dx - \alpha_-(R)\int_a^b f(x)dx =$$
$$= (R)\int_a^b \alpha_+ f(x)dx - (R)\int_a^b (\alpha_-)f(x)dx$$
$$\overset{(10)}{=} (R)\int_a^b (\alpha_+ - \alpha_-)f(x)dx = (R)\int_a^b \alpha f(x)dx,$$

pokud (10) platí.

$\boxed{\text{Ad }(10)}$ Protože $f(x)+g(x) \geq \inf_M f(x) + \inf_M g(x)$ pro $\forall x \in M$

tak $\inf_M (f(x)+g(x)) \geq$ — " — $\quad (*)$

Podobně
$$\sup_M (f(x)+g(x)) \leq \sup_M f(x) + \sup_M g(x) \quad (**)$$

Z nerovnosti (*) a (**) plyne

$$s(D;f) + s(D;g) \le s(D;f+g) \le S(D;f+g) \le S(D;f) + S(D;g)$$

což implikuje

$$0 \le S(D;f+g) - s(D;f+g) \le S(D;f) - s(D;f) + S(D;g) - s(D;g)$$

což implikuje tvrzení (10). ROZMYSLETE PODROBNĚ. ▨

Věta 5.5 (Riemannův integrál a uspořádání)

- Nechť existují Riemannovy integrály f, g a h na intervalu $\langle a,b\rangle$.
- Pak platí

(1) Je-li $h \ge 0$ na $\langle a,b\rangle$, pak $(R)\int_a^b h(x)\,dx \ge 0$

(2) Je-li $f \le g$ na $\langle a,b\rangle$, pak $(R)\int_a^b f(x)\,dx \le (R)\int_a^b g(x)\,dx$,

(3) $(R)\int_a^b |f(x)|\,dx$ existuje [tzn., že Riemannův integrál je příkladem „absolutně konvergentního integrálu"]

a platí

$$\left|(R)\int_a^b f(x)\,dx\right| \le (R)\int_a^b |f(x)|\,dx$$

Poznámka Newtonův integrál je naopak neabsolutně konvergentní integrál. Platí:

$$(N)\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx < \infty \quad \text{ale} \quad (N)\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,dx = +\infty.$$

Dk Věty 5.5 **Ad (1)** Je-li $h \ge 0$ pro $\forall x \in \langle a,b\rangle$, pak $s(D;h) \ge 0$ pro každé dělení D intervalu $\langle a,b\rangle$. Přechodem k supremu přes všechna dělení dostáváme

$$\underline{\int_a^b} h(x)\,dx \ge 0 \quad \text{ale} \quad \underline{\int_a^b} h(x)\,dx = (R)\int_a^b h(x)\,dx \text{ dle předpokladu.}$$

Ad (2) Tvrzení je důsledkem linearity (R) integrálu a (1) použitou na $h := g - f$

Ad (3) Buď $\varepsilon > 0$ dáno. Z existence $(R)\int_a^b f(x)\,dx$ plyne existence dělení D tak, že $S(D;f) - s(D;f) < \varepsilon$.

Buď $\underline{x, y \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle}$ libovolné. Pak platí (klíčová nerovnost pro tuto úvahu)

$$|f(x)| - |f(y)| \le \big|\,|f(x)| - |f(y)|\,\big| \le |f(x) - f(y)| \le \sup_{t \in \langle x_{i-1},x_i\rangle} f(t) - \inf_{x \in \langle x_{i-1},x_i\rangle} f(x)$$

Odtud

$$\sup_{x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle}|f(x)| - \inf_{x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle}|f(y)| \le \sup_{z\in\langle x_{i-1},x_i\rangle} f(z) - \inf_{z\in\langle x_{i-1},x_i\rangle} f(z)$$

což implikuje

$$0 \le S(D_i|f|) - s(D_i|f|) \le S(D_i f) - s(D_i f) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{viz výše}}}{<} \varepsilon$$

Tedy dle charakterizace existence (R) integrálu, viz Tvrzení 5.2, $(R)\int_a^b |f(x)|dx$ existuje $(<+\infty)$.

Nerovnost $|(R)\int_a^b f(x)dx| \le (R)\int_a^b |f(x)|dx$ plyne z nerovnosti:

$$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$$

a z části (1):

$$\left.\begin{array}{l} |f(x)| - f(x) \ge 0 \Rightarrow (R)\int_a^b |f(x)|dx \ge (R)\int_a^b f(x)dx \\ |f(x)| + f(x) \ge 0 \Rightarrow (R)\int_a^b |f(x)|dx \ge -(R)\int_a^b f(x)dx \end{array}\right\} \Rightarrow$$

▨

$\boxed{\text{Věta 5.6}}$ (Riemannův integrál a změna intervalu)

Buď f omezená na $\langle a,b\rangle$ a $a<c<b$. Pak

(i) $\left[\underline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^c} f(x)dx + \underline{\int_c^b} f(x)dx\right]$ a $\left[\overline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^c} f(x)dx + \overline{\int_c^b} f(x)dx\right]$

a identita

(ii) $$(R)\int_a^b f(x)dx = (R)\int_a^c f(x)dx + (R)\int_c^b f(x)dx$$

platí kdykoliv má jedna ze stran smysl.

Navíc, je-li $a \le c \le d \le b$ a $(R)\int_a^b f(x)dx$ existuje, pak $(R)\int_c^d f(x)dx$ existuje.

ÚMLUVA: Dohodneme se, že

- $\forall a\in\mathbb{R}: \ (R)\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\forall a,b\in\mathbb{R}, a<b: \ (R)\int_a^b f(x)dx = -(R)\int_b^a f(x)dx$

$\boxed{\text{Dk věty 5.6}}$ Dokažme "jen" první identitu v (i).

- Je-li D dělení $\langle a,b\rangle$, pak $D^* = D \cup \{c\}$ a z bodů v D^* vytvoříme dělení D_1 intervalu $\langle a,c\rangle$ a dělení D_2 intervalu $\langle c,b\rangle$.

Platí tedy:

$$s(D) \leq s(D^*) = s(D_1) + s(D_2) \leq \underline{\int_a^c} f(x)\,dx + \underline{\int_c^b} f(x)\,dx,$$

což implikuje

$$\text{(p1)} \qquad \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \underline{\int_a^c} f(x)\,dx + \underline{\int_c^b} f(x)\,dx$$

Abychom ukázali opačnou nerovnost, uvažujme libovolné dělení D_1, D_2 intervalů $\langle a,c\rangle$ a $\langle c,b\rangle$ a označme $D = D_1 \cup D_2$.

Pak

$$s(D_1) + s(D_2) = s(D) \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx,$$

což implikuje (přechodem k sup nejdříve přes D_1, pak přes D_2)

$$\text{(p2)} \qquad \underline{\int_a^c} f(x)\,dx + \underline{\int_c^b} f(x)\,dx \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx .$$

Tedy (i) plyne z (p1) a (p2).

- Ověříme nyní identitu (ii).

Z (i) však plyne

$$\text{(p3)} \quad \left(\overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx\right) = \left(\overline{\int_a^c} f(x)\,dx - \underline{\int_a^c} f(x)\,dx\right) + \left(\overline{\int_c^b} f(x)\,dx - \underline{\int_c^b} f(x)\,dx\right)$$

kde všechny výrazy v závorkách jsou nezáporné.

Existuje-li $(R)\int_a^b f(x)\,dx$, pak LS (= levá strana) (p3) je nulová a tedy každý člen na PS (= pravá strana) (p3) musí být nulový.

A naopak. $\blacksquare$

Diferenciální počet pracuje s pojmem derivace a vzniklá otázka spojených s pojmy tečna, rychlost, extrém, ...

Integrální počet pracuje s pojmem integrálu a vznikl z otázky určení obsahu plochy pod grafem funkce.

Tyto dvě zdánlivě nesouvisející disciplíny spojuje následující tvrzení.

$\boxed{\text{Věta}}$ 5.7 (Hlavní věta diferenciálního a integrálního počtu)

Buď f omezená na $\langle a,b\rangle$. Definujme

$$F(x)=F_a(x):=\begin{cases}0 & \text{pro } x=a\\ (R)\int_a^x f(x)\,dx & \text{pro } x\in(a,b\rangle.\end{cases}$$

Pak platí:

(i) F je spojitá v $\langle a,b\rangle$.

(ii) Je-li f spojitá v $x_0\in(a,b)$, pak $F'(x_0)=f(x_0)$.
(Totéž pro jednostrannou spojitost a derivace.)
Speciálně, je-li $f\in C((a,b))$, pak $F'(x)=f(x)$ $\forall x\in(a,b)$
a tedy $F\in C^1((a,b))$.

Dk. Pro $x_0\in\langle a,b)$, $x>x_0$ platí:

$$F(x)-F(x_0)=(R)\int_a^x f(x)\,dx-(R)\int_a^{x_0} f(x)\,dx=(R)\int_{x_0}^x f(x)\,dx$$

Odsud

$$|F(x)-F(x_0)|\le\left|(R)\int_{x_0}^x f(x)\,dx\right|\underset{\substack{\uparrow\\ \text{věta 5.5}\\ (3)}}{\le}(R)\int_{x_0}^x|f(x)|\,dx\le L\int_{x_0}^x dx=L(x-x_0),$$

f omezená

což dává spojitost zprava.

Tak (i) je dokázáno.

$\boxed{\text{Ad (ii)}}$ Platí: $(x>x_0)$
$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\frac{1}{x-x_0}\left[(R)\int_a^x f(z)\,dz-(R)\int_a^{x_0} f(z)\,dz\right]=\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(z)\,dz$$

Tak

$$(*)\quad \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)=\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x[f(z)-f(x_0)]\,dz$$

Ze spojitosti f v x_0 plyne: K danému $\varepsilon>0$ $\exists\,\delta>0$ tak, že pro všechna $z\in(x_0,x_0+\delta)$ $|f(z)-f(x_0)|<\varepsilon$. Pro $x\in(x_0,x_0+\delta)$

plyne z (*):

$$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\right| < \varepsilon \frac{1}{|x-x_0|}\int_{x_0}^{x} 1\,dz = \varepsilon,$$

tzn. $F'(x_0+)$ existuje a platí $F'(x_0+) = f(x_0+)$. ▨

$\boxed{\text{Věta 5.8}}$ (O existenci primitivní funkce) Je-li $-\infty \le a < b \le +\infty$, a je-li $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ spojitá, pak existuje primitivní funkce k f na (a,b).

(Dk) Volme nejdříve $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ tak, že $\{a_n\}$ je klesající a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí a $(a,b) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \langle a_n, b_n\rangle$. Dle předchozí věty

$$F_n(x) = \int_{a_n}^{x} f(\xi)\,d\xi \qquad x \in (a_n, b_n)$$

primitivní k f na (a_n, b_n). Volme $x_0 \in (a_1, b_1)$ a položme

$$\hat{F}_n(x) = F_n(x) - F_n(x_0)$$

Pak $\hat{F}_n$ jsou PF k f na (a_n, b_n) a navíc $\hat{F}_n(x_0) = 0$. Pro $n, m \in \mathbb{N}$, $n > m$, jsou $\hat{F}_n$ a $\hat{F}_m$ prim. fce na (a_m, b_m), a liší se (nejvýš) o konstantu, ale protože se shodují v x_0 tak

$$\hat{F}_n = \hat{F}_m \text{ na } (a_m, b_m).$$

Definujme tedy

$$F(x) := \hat{F}_n(x) \text{ v } (a_n, b_n) \text{ pro } \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tedy F je P.F. k f na (a,b). ▨

$\boxed{\text{DŮLEŽITÁ POZOROVÁNÍ}}$ (1) Věta 5.7 nám spojuje Riemanna s Newtonem, neboť nám říká, jak spočítat Riemannův integrál pro $f \in C(\langle a,b\rangle)$. Jednak víme, viz Věta 5.1, že pak Riemannův integrál f existuje a navíc, dle Věty 5.7, F_a je primitivní fce k f, která se od jakékoliv jiné primitivní funkce F liší o konstantu, tedy $F = F_a - c$ a máme

$$(R)\int_a^b f(x)\,dx \overset{\text{Věta 5.7}}{=} F_a(b) - \underbrace{F_a(a)}_{=0} = F(b) + c - F(a) - c = F(b) - F(a)$$

$$= (N)\int_a^b f(x)\,dx.$$

② Buď $f \in C((a,+\infty))$ a g, h mají derivaci všude v (a,b).

Definujme
$$\varphi(x) := \int_a^{g(x)} f(z)\,dz \quad \text{a} \quad \psi(x) := \int_{h(x)}^{g(x)} f(z)\,dz.$$

Pak umíme spočítat φ' a ψ'. Ze spojitosti f totiž plyne z Věty 5.8 existence primitivní funkce F k f na $(a,+\infty)$ tak, že
$$\underset{\sim}{\varphi(x)} = \int_a^{g(x)} f(z)\,dz = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{F(g(x)) - F(a)},$$
což umíme derivovat dle věty o derivování složené funkce:
$$\varphi'(x) = F'(g(x))\,g'(x) = f(g(x))\,g'(x).$$

Podobně (rozmyslete)
$$\psi'(x) = f(g(x))\,g'(x) - f(h(x))\,h'(x).$$

Umíme tedy derivovat integrály s proměnnou horní/dolní mezí.

Dle pozorování ① víme, že pro $f \in C(\langle a,b\rangle)$ jak Newtonův tak Riemannův integrál existují a rovnají se. Platí také, že pro $f: \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ existence obou integrálů implikuje jejich rovnost, viz následující tvrzení.

Věta 5.9 Pokud existují $(R)\int_a^b f(x)\,dx$ a $(N)\int_a^b f(x)\,dx$, pak se rovnají.

Dk. • Z existence (N) integrálu plyne existence zobecněné primitivní funkce F tak, že
$$(N)\int_a^b f(x)\,dx = F(b-) - F(a+) \quad \text{a} \quad F' = f \ \text{v} \ \langle a,b\rangle \setminus K,\ K \text{ konečná.}$$
Existence (R) integrálu naopak zaručuje (pro dané (libovolné) $\varepsilon > 0$) existenci dělení D' tak, že
$$(♡) \quad s(D') > (R)\int_a^b f(x)\,dx - \varepsilon \quad \text{a} \quad S(D') < (R)\int_a^b f(x)\,dx + \varepsilon$$
Buď D dělení vzniklé sjednocením D' a K. Pak dle Lagrangeovy VOSH
$$F(x_j) - F(x_{j-1}) = f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) \quad \text{kde } \xi_j \in (x_{j-1}, x_j) \quad j = 1, \dots, m.$$
Pak
$$(\bullet)\quad (N)\int_a^b f(x)\,dx = F(b-) - F(a+) = \sum_{j=1}^m F(x_j) - F(x_{j-1}) = \sum_{j=1}^m f(\xi_j)(x_j - x_j) \begin{cases} \le S(D) \le S(D') \\ \ge s(D) \ge s(D') \end{cases}$$
(neb D je zjemnění D')

Kombinací (♡) a ($\bullet$) dostáváme:

$$(R)\int_a^b f(x)\,dx - \varepsilon \le (N)\int_a^b f(x)\,dx \le (R)\int_a^b f(x)\,dx + \varepsilon,$$

což implikuje

$$0 \le \left|(N)\int_a^b f(x)\,dx - (R)\int_a^b f(x)\,dx\right| < \varepsilon \,,$$ a tvrzení platí. ■

Důsledkem Hlavní věty diferenciálního a integrálního počtu a vět o integraci per-partes a substituci pro primitivní funkce jsou následující dvě tvrzení.

Věta 5.10 (integrace per partes) Jsou-li $f, g \in C(\langle a,b\rangle)$ takové, že f', g' existují v (a,b), pak $\int_a^b f'g\,dx = [fg]_a^b - \int_a^b fg'\,dx$.

Dk Za uvedených předpokladů oba integrály, Newtonův a Riemannův, existují a rovnají se. Také fg je primitivní funkce k $f'g+fg'$ (dle věty o derivování součinu) a výraz $[fg]_a^b$ má smysl (je dokonce konečný). Tak

$$[fg]_a^b = \int_a^b [f'g+fg']\,dx \underset{\text{linearita}}{=} \int_a^b f'g\,dx + \int_a^b fg'\,dx .$$ ■

Věta 5.11 (o substituci) $\boxed{\text{Schéma 1}}$ Buď $\varphi \in C^1(\langle\alpha,\beta\rangle)$ a $f \in C(\langle a,b\rangle)$ a $\varphi[\langle\alpha,\beta\rangle] \subset \langle a,b\rangle$. Pak

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx$$

$\boxed{\text{Schéma 2}}$ Buď $f \in C(\langle a,b\rangle)$, $\varphi \in C^1(\langle\alpha,\beta\rangle)$, $\varphi'(t) \ne 0 \ \forall t \in \langle\alpha,\beta\rangle$, $\varphi(\alpha)=a$ a $\varphi(\beta)=b$. Potom

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)=\alpha}^{\varphi^{-1}(b)=\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dx}$$

Dk $\boxed{\text{Schéma 1}}$ Je-li F primitivní fce k f na $\langle a,b\rangle$, pak víme (z věty o substituci pro primitivní fce), že $F\circ\varphi$ je primitivní fce k $(f\circ\varphi)\varphi'$ na $\langle\alpha,\beta\rangle$. Tedy

$$\int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)\varphi'\,dt = [F\circ\varphi]_\alpha^\beta = \underbrace{F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))}_{[F]_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)}} = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx .$$

$\boxed{\text{Schéma 2}}$ Protože $(f\circ\varphi)\varphi' \in C(\langle\alpha,\beta\rangle)$, tak existuje primitivní fce Φ k $(f\circ\varphi)\varphi'$ na $\langle\alpha,\beta\rangle$. Dle 2. věty o substituci pro primitivní funkce víme, že $\Phi\circ\varphi^{-1}$ je prim. fce k f na $\langle a,b\rangle$.

Tedy: $$\int_a^b f(x)\,dx = [\Phi\circ\varphi^{-1}]_a^b = [\Phi]_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} = \int_{\varphi^{-1}(a)=\alpha}^{\varphi^{-1}(b)=\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt .$$ ■