Fourierovu metodu resp. metodu separace proměnných lze aplikovat na pozlišné lineární PDR (eliptické, parabolické, hyperbolické). (zkusit aplikovat) Uvažujme lineární eliptický operátor s proměnnými koeficienty (nezávislými na čase), tj.

$$\boxed{\begin{aligned} Lu &:= -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + b(x)\,u \\ \text{s} \quad & a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha_0 |\xi|^2 \qquad \forall \xi\in\mathbb{R}^d \;\; \forall x\in\Omega \end{aligned}}$$

Mohu řešit počáteční a okrajové úlohy v $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ (omezená, ...)
typu:

$$\underbrace{\boxed{\begin{gathered}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Lu = f \\ + PP + OP\end{gathered}} \quad \text{nebo} \quad \boxed{\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t} + Lu = f \\ + PP + OP\end{gathered}}} \quad \text{nebo} \quad \boxed{\begin{gathered} Lu = f \\ + OP \end{gathered}} \;{}^{*)}$$

Hledáme řešení ve tvaru $u(t,x) = T(t)X(x)$

po dosazení $T''(t)X(x) = -T(t)\,LX(x)$ nebo $T'(t)X(x) = -T(t)\,LX(x)$

$$\begin{matrix} T\neq 0 \\ X\neq 0\end{matrix} \quad \Updownarrow \quad \frac{T''(t)}{T(t)} = -\frac{LX(x)}{X(x)} \qquad \text{nebo} \qquad \frac{T'(t)}{T(t)} = -\frac{LX(x)}{X(x)}$$

Tyto rovnosti platí jen pokud se rovnají konstantě, což vede jednak na úlohu na vlastní čísla a vlastní funkce eliptického operátoru:

$$\text{(Eigen)} \quad \boxed{\begin{gathered} LX(x) = \lambda X(x) \\ + \; OP \end{gathered}} \qquad (\Rightarrow \{\lambda_k\}_k, \{w_k\}_k)$$

a také na počáteční úlohy

$$\boxed{T''(t) + \lambda T(t) = 0 \;\; + PP} \quad \text{nebo} \quad \boxed{T'(t) + \lambda T(t) = 0 \;\; + PP}$$

Pokud jsem schopen úlohu na vlastní fce/čísla explicitně vyřešit, opět napíšu vzoreček pro $u(t,x)$. Pokud jsem však schopen "pouze" rozhodnout kolik vlastních čísel (Eigen) má, jak se asymptoticky chovají, tak mohu vztah $u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t)X_k(x)$ použít k teoretickým úvahám.

---

*) Aplikace Fourierovy metody na eliptické problémy vyžaduje, aby oblast Ω byla obdélník čtverec nebo se vhodnou transformací dala na obdélník či čtverec převést.

OP ... okrajové podmínky PP ... počáteční podmínky

Blízkou metodou, z pohledu aplikace však mnohem obecnější, je metoda Faedo-Galerkinova, kde (aproximaci) řešení hledáme ve tvaru

$$(*) \qquad u^m(t,x) = \sum_{i=1}^{m} c_i^m(t)\, w_i(x), \qquad (m \in \mathbb{N})$$

kde $\{w_i\}_{i=1}^{\infty}$ jsou prvky báze daného prostoru generované jako vlastní funkce vhodného eliptického lineárního operátoru. (Není tedy nezbytné, aby to byl operátor, který se v rovnici úlohy vyskytuje).

Koeficienty $\{c_i^m\}_{i=1}^{m}$, pro $m \in \mathbb{N}$ pevné, určíme řešením systému ODR, který dostaneme ~~...~~ projekcí PDR na podprostor generovaný $\{w_i\}_{i=1}^{m}$.

Ukažme na příkladu jednorozměrné (viskózní) Burgersovy rovnice s Dirichletovými podmínkami:

$$\left[\begin{array}{ll} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{v } (0,\infty)\times(0,\ell) \\ u(0,\cdot) = u_0 & \text{v } (0,\ell) \\ u(t,0) = u(t,\ell) = 0 & \text{pro } t \geq 0 \end{array}\right]$$

Pak přibližné řešení $u^m(t,x)$ hledáme ve tvaru (*), přičemž koeficienty $\{c_i^m\}_{i=1}^{m}$ určíme jako řešení následujícího systému ODR

$$\left(\frac{\partial u^m}{\partial t}, w_i\right) + \left(u^m \frac{\partial u^m}{\partial x}, w_i\right) + \varepsilon\left(\frac{\partial u^m}{\partial x}, \frac{\partial w_i}{\partial x}\right) = 0 \qquad i = 1,\dots,m$$

s počátečními podmínkami

$$u^m(0,\cdot) = P^m u_0$$

P^m: projektor do prostoru generovaného $\{w_1,\dots,w_m\}$

kde $\{w_i\}_{i=1}^{\infty}$ je vhodné brát jako vlastní funkce úlohy

$$\left[\begin{array}{ll} -\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \lambda w & \text{v } (0,\ell) \\ w(0) = w(\ell) = 0 & \end{array}\right]$$

[Tedy operátor na vlastní funkce není shodný s operátorem rovnice.]

Pozorujme, že platí $(w_i, w_j) = 0$ pro $i \neq j$ a také

$$\left(\frac{\partial w_i}{\partial x}, \frac{\partial w_j}{\partial x}\right) = 0 \quad -\!\!\;''\!\!- .$$