# 16. FOURIEROVA TRANSFORMACE V $L^1(\mathbb{R}^d)$, V $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ a V $L^2(\mathbb{R}^d)$

Nejdříve si řekneme, co znamená obecně TRANSFORMACE či přesněji INTEGRÁLNÍ TRANSFORMACE. Poté si "odvodíme" FOURIEROVU transformaci pomocí FOURIERových řad.

Integrální TRANSFORMACÍ funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ s jádrem $k: \mathbb{R}\times\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ nazveme funkci $g: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definovaná vztahem

$$g(w) := \int_E f(t)k(t,w)\,dt,$$ kde $E\subset\mathbb{R}$ je neprázdná množina.*)

Použijeme-li TRANSFORMACI na nějaký objekt (např. ODR, PDR či IDR) lze získat rovnici jednodušší (např. algebraickou či obyčejnou dif. rovnici v případě PDR či IDR), kterou snadno vyřeším. AVŠAK, řešení je obraz řešení původního objektu. K úspěchu procesu hledání řešení pomocí transformace tedy potřebujeme umět transformaci invertovat.

[MOTIVACE SMĚREM K DEFINICI FOUR. TRANSFORMACE]

Uvažujme $2\pi$-periodickou hladkou funkci $f: (0,2\pi) \to \mathbb{C}$. Pak

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}, \\ c_k &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx, \\ &\text{a platí} \\ \|f\|^2_{L^2(0,2\pi)} &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty}|c_k|^2 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

! Připomeňte si, proč vztahy (1) platí a jak jsme je získali.

* V aplikacích reziduové věty jsme uvedli pojem Mellinova transformace pro $\boxed{I(a) = \int_0^\infty z^{a-1} f(z)\,dz}$

Mellinova transformace přiřadí fci $f$ jinou funkci $I$. Jádro $k(z,a) = z^{a-1}$.

Je-li $\tilde{f}$ hladká, avšak $l$-periodická, nemusím si vztahy analogické (1) pamatovat; snadno je odvodím záměnou proměnných. Vskutku:

je-li $\underbrace{\tilde{f}(x+l) = \tilde{f}(x) \text{ pro } \forall x \in \mathbb{R}}$, pak $F(x) := \tilde{f}\left(\frac{l}{2\pi}x\right)$ splňuje

$$F(x+2\pi) = \tilde{f}\left(\frac{l}{2\pi}(x+2\pi)\right) = \tilde{f}\left(\frac{lx}{2\pi}+l\right) = \tilde{f}\left(\frac{lx}{2\pi}\right) = F(x);$$

tedy $F$ je $2\pi$-periodická a splňuje vztahy (1), tj.

$$\left.\begin{aligned} F(x) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} \\ c_k &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) e^{-ikx}\,dx \\ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 &= \|F\|^2_{L^2(0,2\pi)} = \|F\|^2_{L^2(-\pi,\pi)} \end{aligned}\right\} \quad (1')$$

Přechodem od $F$ k $\tilde{f}$ $\left(F(x) = \tilde{f}\left(\frac{l}{2\pi}x\right)\right)$ a substitucí $y = \frac{lx}{2\pi}$, následovanou přeznačením $y$ zpět na $x$, dostáváme

$$\boxed{\left.\begin{aligned} \tilde{f}(x) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{e^{i\frac{2\pi}{l}kx}}{\sqrt{2\pi}} \\ c_k &= \frac{\sqrt{2\pi}}{l} \int_{-l/2}^{l/2} \tilde{f}(x) e^{-i\frac{2\pi}{l}kx}\,dx \\ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 &= \frac{2\pi}{l} \int_{-l/2}^{l/2} |\tilde{f}(x)|^2\,dx \end{aligned}\right\} \quad (2)}$$

Uvažujme nyní $f$, která není periodická, ale je definována na $\mathbb{R}$. Pak $f|_{\left(-\frac{l}{2},\frac{l}{2}\right)}$, tj. $f$ zúžená na interval $\left(-\frac{l}{2},\frac{l}{2}\right)$ pro $l \gg 1$, může být rozšířena na $\mathbb{R}$, $l$-periodicky a pro tuto $l$-periodickou fci platí vztahy (2). Chceme prozkoumat chování (2) pro $l \to \infty$. K tomuto cíli označíme

$\boxed{f := \sqrt{2\pi}\,\tilde{f}}$ $\quad \boxed{\xi_k := \frac{k}{l}}$ $\quad$ a $\quad \boxed{g(\xi_k) := l c_k}$

[jedná se o maličko odlišné označení dvou posloupností]

Pak z (2) dostáváme

$$(3)\quad \left[\begin{aligned} g(\xi_k) &= \int_{-l/2}^{l/2} f(x)\, e^{-i2\pi \xi_k x}\,dx, \\ f(x) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(\xi_k)\, \frac{e^{i2\pi\xi_k x}}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{l} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(\xi_k)\, e^{i2\pi \xi_k x}(\xi_k - \xi_{k-1}), \\ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |g(\xi_k)|^2 \underbrace{(\xi_k - \xi_{k-1})}_{\frac{1}{l}} &= \int_{-l/2}^{l/2} |f(x)|^2\,dx, \end{aligned}\right]$$

což dává formálně pro $l \to \infty$

$$(4)\quad \boxed{\begin{aligned} g(\xi) &\sim \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i2\pi\xi x}\,dx \\ f(x) &\sim \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi)\, e^{i2\pi \xi x}\,d\xi \\ \int_{-\infty}^{+\infty} |g(\xi)|^2\,d\xi &= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\,dx \end{aligned}}$$

Tyto nádherné formule úvahy nás přivádí k následující definici a značením:

**Definice** Buď $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$. Definujme:

- Fourierovu transformaci $f$, značenou $\mathcal{F}[f]$ či $\hat{f}$, vztahem

$$(FT)\quad \boxed{\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-i2\pi\xi\cdot x}\,dx} \qquad \xi \in \mathbb{R}^d,\ \xi = (\xi_1, \dots, \xi_d)$$

$$x\cdot\xi := \sum_{j=1}^{d} x_j \xi_j$$

- Inverzní Fourierovu transformaci, značenou $\mathcal{F}^{-1}[f]$ či $\check{f}$, vztahem

$$(IF_T)\quad \check{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\xi)\, e^{i2\pi\xi\cdot x}\,d\xi$$

Pokud nespecifikujeme, jaké vlastnosti má mít $f$, aby integrály ve výše uvedené definici byly konečné, je tato definice formální – nic nedefinuje, jen zavádí značení.

Naše úvahy, které nás přivedly k (4), naznačují, že lze očekávat platnost těchto vztahů

$$(5)\quad \boxed{\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}[f]) = \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[f]] = f}$$ tzv. FOURIERŮV INVERZNÍ VZOREC

a

$$(6)\quad \boxed{\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|\mathcal{F}[f]\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}}$$ PARSEVALOVA nebo PLANCHERELOVA IDENTITA

Naším cílem bude identifikace tříd funkcí, pro které vzorečky pro Fourierovu transformaci $(F_T)$ a její inverzi $(IF_T)$ spolu se vztahy (5) a (6) platí. Ukážeme si na chvíli, že obecně prostor $L^1(\mathbb{R}^d)$ dává smysl vztahům $(F_T)$ i $(IF_T)$, ale (5) ani (6) pro $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ platit nemusí. Tedy $L^1(\mathbb{R}^d)$ NENÍ obecně vhodný prostor.

Na druhou stranu byly vztahy $(F_T)$, $(IF_T)$, (5) a (6) získány (heuristicky) z Fourierových řad. Víme z minulého semestru, že vztah

$$f(x) = \sum c_k \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{platí pro s.v. } x \in \mathbb{R} \text{ pokud } f \in L^2_{per}.$$

Je-li navíc $f$ hladká, pak tvrzení platí všude.

stačí: $f, f' \in L^2_{per}$ ← nebo po částech $C^1$ a spojitá

Tedy $L^2$-fce a hladké funkce by mohly být vhodné prostory. Ukážeme si skutečně, že $L^2(\mathbb{R}^d)$ bude "dobrý" prostor, kde vztahy (5) a (6) platí, ale postup k tomuto prostoru bude komplikovanější. Důvodem je skutečnost, že množina $\mathbb{R}^d$ je neomezená a samotná hladkost fcí existenci integrálů přes $\mathbb{R}^d$ nezaručuje. Budeme muset přidat dostatečný pokles v $\infty$. Tento požadavek nás přivede k definici Schwartzova prostoru $\mathcal{S} := \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, viz také příklad 3.

$\boxed{\text{Nechť nyní } f \in L^1(\mathbb{R}^d).}$

Pak
$$|\hat{f}(s)| = |\mathcal{F}[f](s)| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i2\pi s x}\, dx \right| \le \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|\, dx = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$$

Tedy $\forall s \in \mathbb{R}^d$: $|\hat{f}(s)| < \infty$ a vzorec $(F_T)$ má smysl

Také vidíme, že

▶ $\boxed{\sup_{s \in \mathbb{R}^d} |\hat{f}(s)| \le \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}}$ a tedy $\boxed{\hat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^d)}$

Dokonce,

▶ $\boxed{\hat{f} \in C(\mathbb{R}^d)}$ což plyne z věty o záměně $\int$ a limity.

Nyní si spočteme dva příklady na Fourierovu transformaci. Hned ten první ukazuje, že $L^1$-prostor není "uzavřený" na Fourierovu transformaci, neboli pro $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ zjistíme, že $\hat{f}$ prvkem $L^1(\mathbb{R}^d)$ není!!

**Př. 1** Funkce $f \overset{df.}{=} \chi_{[-1,1]} = \begin{cases} 1 & \text{na } [-1,1] \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$ patří do $L^1(\mathbb{R})$.

Pro F.T. platí: $\mathcal{F}[\chi_{[-1,1]}](s) = \int_{-1}^{1} e^{-i2\pi s x}\,dx = \int_{-1}^{1} \cos 2\pi s x\,dx - i \underbrace{\int_{-1}^{1} \sin 2\pi s x\,dx}_{=0 \text{ (lichá funkce)}}$

$$= \left[\frac{\sin 2\pi s x}{2\pi s}\right]_{-1}^{1} = \frac{\sin 2\pi s}{\pi s}$$

Funkce $s \mapsto \frac{\sin 2\pi s}{\pi s}$ nemá Lebesgueův integrál $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\sin 2\pi s|}{|\pi s|}\,dx = \infty\right)$

Také si všimněme, že ① ačkoliv $f$ je nenulová jen na $\langle -1,1 \rangle$, tak $\hat{f}$ je nenulová všude. Neplatí tedy, že F.T. fce s kompaktním nosičem ($\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in \mathbb{R};\, f(x) \neq 0\}}$) má kompaktní nosič.

② $\lim_{s \to \infty} \mathcal{F}[\chi_{[-1,1]}](s) = 0$.

**Př. 2** Spočtěte F.T. $f(x) := \frac{1}{1+x^2}$. Zřejmě (proč?) $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Řešení $\widehat{\left(\frac{1}{1+x^2}\right)}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} e^{-i2\pi x s}\,dx =$ výpočet provedeme pomocí residuové věty aplikované na funkci $f(z) = \frac{e^{-i2\pi s z}}{1+z^2}$ s jednoduchými póly v $\pm i$ $=$

$\boxed{s>0}$  $-2\pi i \operatorname{Res}_{-i} f(z) = -2\pi i \frac{e^{-2\pi s}}{-2i} = \pi e^{-2\pi s}$

$\boxed{s<0}$  $2\pi i \operatorname{Res}_{i} f(z) = 2\pi i \frac{e^{2\pi s}}{2i} = \pi e^{2\pi s}$

$$= \underline{\underline{\pi e^{-2\pi |s|}}},$$

kde jsme pro odhad integrálu přes vnější půlkružnici postupovali jako v důkazu JORDANOVA lemmatu, část (6).

Prostor $L^1$, jak ukazuje příklad 1, není vhodný prostor, na kterém by obecně platil Fourierův inverzní vzorec (5). Některé zajímavé vlastnosti však Fourierova transformace na prostoru $L^1(\mathbb{R}^d)$ má a stojí za to si je uvést. Ještě předtím však zavedeme ještě jeden pojem: <u>konvoluce</u> dvou funkcí.

$\boxed{\text{Def.}}$ Buď $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Definujeme KONVOLUCI FUNKCÍ $f$ A $g$ předpisem

$$(f*g)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\,g(y)\,dy$$

Protože evidentně neplatí implikace „$f\in L^1, g\in L^1 \Rightarrow fg\in L^1$" (Najděte protipříklad!), je překvapivé, že pro definici konvoluce stačí (pouze) integrovatelnost $f$ a $g$, jak mimojiné ukazuje následující věta.

<u>Věta 16.1</u> (Vlastnosti konvoluce) Platí následující:

- Jsou-li $f, g\in L^1(\mathbb{R}^d)$, pak $f*g = g*f$ a $f*g\in L^1(\mathbb{R}^d)$
- Jsou-li $f\in L^1(\mathbb{R}^d)$ a $g\in L^p(\mathbb{R}^d)$, pak $f*g\in L^p(\mathbb{R}^d)$

(Dk) Ověříme "pouze" druhé tvrzení. Platí, pro $p>1$,

$$\|f*g\|_{L^p}^p = \int_{\mathbb{R}^d}|(f*g)(x)|^p\,dx = \int_{\mathbb{R}^d}\left|\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\,g(y)\,dy\right|^p dx$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-y)|\,|g(y)|\,dy\right)^p dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d}\Big(\int_{\mathbb{R}^d}\underbrace{|f(x-y)|^{\frac{1}{p}}\,|g(y)|}_{G}\ \underbrace{|f(x-y)|^{\frac{1}{p'}}}_{F}\,dy\Big)^p dx$$

Hölderova nerovnost aplikovaná na $G\in L^p$, $F\in L^{p'}$:

$$\leq \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-y)|\,|g(y)|^p\,dy\right)\underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-y)|\,dy\right)^{p/p'}}_{\|f\|_{L^1}^{p-1}} dx$$

$\frac{p}{p'} = \frac{p(p-1)}{p} = p-1$

$$\leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}^{p-1}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-y)|\,|g(y)|^p\,dy\,dx$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}^{p-1}\int_{\mathbb{R}^d}\Big(\underbrace{\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-y)|\,dx}_{\|f\|_{L^1}}\Big)|g(y)|^p\,dy \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

$\square$

Cvičení: Projděte si podrobně důkaz pro $p=1$ a dokažte symetrii konvoluce (substitucí) nejdříve např. pro $d=1$.

$\boxed{\text{Věta 16.2}}$ Vlastnosti Fourierovy transformace na $L^1(\mathbb{R}^d)$

(i) $f \in L^1 \Rightarrow \hat{f} \in C(\mathbb{R}^d)$ a $\sup |\hat{f}(x)| =: \|\hat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$

(ii) $f, g \in L^1 \Rightarrow \widehat{f*g} = \hat{f}\cdot\hat{g}$

(iii) $\lim\limits_{|s|\to\infty} \hat{f}(s) = 0$ pro $f \in L^1$

(iv) $\widehat{\tau_y f}(s) = e^{i2\pi y\cdot s}\hat{f}(s)$ přičemž $(\tau_y f)(x) = f(x+y)$ $\forall x \in \mathbb{R}^d$ (shift = posun o $y$)

(v) $\widehat{f(\alpha x)}(s) = \frac{1}{|\alpha|^d}\hat{f}\left(\frac{s}{\alpha}\right)$

Dk $\boxed{\text{Ad (i)}}$ $|\hat{f}(s)| = \left|\int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{ix\cdot s} dx\right| \underset{|e^{ix\cdot s}|=1}{\leq} \int |f(x)| dx = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$

Přechodem k $\sup_s$ dostáváme druhou část tvrzení $\mathcal{F}: L^1 \to L^\infty$. Skutečnost, že $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}^d)) \subset C(\mathbb{R}^d)$ plyne z věty o spojitosti integrálu závislém na parametru.

$\boxed{\text{Ad (ii)}}$ Dle Věty 16.1 víme, že z $f, g \in L^1$ plyne $f*g \in L^1$ a také $f*g = g*f$. Víme tedy, že $\widehat{f*g} \in C(\mathbb{R}^d)$.

Počítejme

$$\widehat{f*g}(s) = \int_{\mathbb{R}^d} (f*g)(x) e^{-i2\pi s\cdot x} dx \overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) g(y) e^{-i2\pi s\cdot x} dx\, dy$$

$$\underset{dx = dz}{\overset{x-y=z}{=}} \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(z) g(y) e^{-2\pi i y\cdot s} e^{-2\pi i z\cdot s} dy\, dz =$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(z) e^{-i2\pi s\cdot z} dz\right)\left(\int_{\mathbb{R}^d} g(y) e^{-i2\pi s\cdot y} dy\right) = \hat{f}(s)\hat{g}(s).$$

$\boxed{\text{Ad (iii)}}$ BÚNO lze předpokládat, že $f \geq 0$ (jinak $f = f^+ - f^-$),
BÚNO — " — , že $f = \chi_{[-\ell,\ell]}$ (neb pro $f \geq 0$ $\exists\, h_n \nearrow f$, $h_n$ schodovité a $\underbrace{\operatorname{supp} h_n}_{\text{kompaktní}}$.

Avšak, dle Př. 1,

$$\hat{f}(s) = \hat{\chi}_{[-\ell,\ell]}(s) = \frac{\sin 2\pi s\ell}{\pi s} \to 0 \text{ pro } s \to \infty.$$

$\boxed{\text{Ad (iv) a (v)}}$ si dokažte sami pomocí věty o substituci.

∎

Dle Příkladu 2 víme, že v prostoru $L^1(\mathbb{R}^d)$ nemůže platit Fourierův inverzní vzorec (5). Zmínili jsme, že hladké funkce s dostatečnou kontrolou chování (poklesu) v $\infty$ by mohly vést k cíli. Zde se jako první přirozená možnost nabízí prostor $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, reprezentující hladké funkce s kompaktním nosičem, definovaný

$$\mathcal{D} := \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) := \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d);\ \operatorname{supp}\varphi \text{ je kompaktní v } \mathbb{R}^d\}$$
$$= \{\text{hladké funkce, které jsou vně nějakého } d\text{-rozměrného intervalu nulové}\}$$

Připomeň: $\operatorname{supp}\varphi := \overline{\{x\in\mathbb{R}^d;\ \varphi(x)\neq 0\}}$ ← uzávěr

Dle Příkladu 1 však také víme, že Fourierova transformace $L^2$ resp. $L^\infty$-fce s kompaktním nosičem nemá kompaktní nosič. Tedy opět se F.T. dostáváme mimo prostor funkcí, kde jsme chtěli pracovat. Motivaci k "správné" volbě prostoru nám pomůže i následující příklad.

**Příklad 3** Ukažte, že pro $\lambda>0$
$$\mathcal{F}^{-1}[e^{-\frac{|x|^2}{\lambda}}](s) = (\lambda\pi)^{d/2} e^{-\pi^2\lambda|s|^2}$$
neboli
$$(*) \qquad \mu>0:\ \mathcal{F}^{-1}[e^{-\mu|x|^2}](s) = \left(\frac{\pi}{\mu}\right)^{d/2} e^{-\frac{\pi^2}{\mu}|s|^2}$$

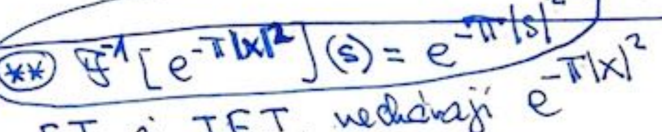
Řešení:

Dokážeme (*) nejdříve pro $\mu=\pi$, tedy
$$(**) \qquad \mathcal{F}^{-1}[e^{-\pi|x|^2}](s) = e^{-\pi|s|^2}$$
tedy F.T. i IF.T. nechávají $e^{-\pi|x|^2}$ nezměněnu.

Dk (**)
$$\mathcal{F}^{-1}[e^{-\pi x^2}](s) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi\left(\sum_{j=1}^d (x_j^2 - 2i x_j s_j - s_j^2)\right)} e^{-\pi|s|^2}\,dx \overset{\text{Fubini}}{=} e^{-\pi|s|^2}\prod_{j=1}^d \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi(x_j - is_j)^2}\,dx_j$$

Zbývá tedy spočítat $Y := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi(y-is)^2}\,dy$

K tomu využijeme residuovou (Cauchy) větu pro $f(z) = e^{-\pi z^2}\in H(\mathbb{C})$ kde integrujeme přes obdélník




Pak
$$0 = \int_{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4} f(z) \Rightarrow Y = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2}\,dt \underset{\sqrt{\pi}t=y}{=} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy = 1.$$
Tak (**) platí.

Pro (*) použijeme vzorec pro [illegible] F.T. na škálování:
$$\mathcal{F}^{-1}\left[f\left(\frac{x}{\beta}\right)\right](s) = \beta^d \mathcal{F}^{-1}[f](\beta s)$$
Odsud
$$\mathcal{F}^{-1}[e^{-\frac{|x|^2}{\lambda}}](s) = \mathcal{F}^{-1}[e^{-\pi\frac{|x|^2}{\lambda\pi}}](s) = (\lambda\pi)^{d/2} e^{-\pi^2\lambda|s|^2}$$
$\beta = \sqrt{\lambda\pi}$

Předchozí příklad říká, že funkce $e^{-\pi|x|^2}$ je invariantní vzhledem k Fourierově transformaci a také, že pro ni platí Fourierův inverzní vzorec. Funkce $e^{-\pi|x|^2}$ nemá kompaktní nosič, ale klesá velmi rychle v $\infty$.

<u>Definice</u> Řekneme, že $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ je <u>rychle klesající</u> pro $x \to \infty$

$$\equiv \forall m \in \mathbb{N} \quad \exists M_m > 0 \text{ tak, že } |f(x)| \leq M_m |x|^{-m}$$

Ekvivalentně lze říci, že $f$ je <u>rychle klesající</u> pro $x \to \infty$ právě když $\lim_{x \to \infty} p(x) f(x) = 0$ pro libovolný polynom.

<u>Definice</u> (Schwartzův prostor $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$).

$$\mathcal{S} := \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^d);\ f \text{ a všechny její derivace jsou rychle klesající} \}.$$

Protože $e^{-\pi|x|^2} \in \mathcal{S}$, ale nemá kompaktní nosič ($\operatorname{supp} e^{-\pi|x|^2} = \mathbb{R}^d$), tak $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subsetneq \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Nyní si ukážeme, že $\mathcal{S}$ má spoustu užitečných vlastností, které např. prostor $L^1$ nemá.

$\boxed{\text{Vlastnosti } \mathcal{S}}$

| | VLASTNOST | MATEMATICKÝ ZÁPIS | $L^1$ ANO ČI NE? |
|---|---|---|---|
| 1 | $\mathcal{S}$ je vektorový prostor | $f, g \in \mathcal{S},\ \alpha \in \mathbb{C} \Rightarrow \alpha f, f+g \in \mathcal{S}$ | ✓ |
| 2 | $\mathcal{S}$ je algebra | $f, g \in \mathcal{S} \Rightarrow fg \in \mathcal{S}$ | ✗ |
| 3 | $\mathcal{S}$ je uzavřený na násobení polynomem | $f \in \mathcal{S},\ p \in \mathcal{P} \Rightarrow pf \in \mathcal{S}$ | ✗ |
| 4 | $\mathcal{S}$ je uzavřený na derivování | $\forall\ \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ multiindex $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$ $f \in \mathcal{S} \Rightarrow D^\alpha f := \frac{\partial^{\lvert\alpha\rvert} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}} \in \mathcal{S}$ | ✗ |
| 5 | $\mathcal{S}$ je uzavřená na posunutí a násobení $e^{ix \cdot s}$ | $f \in \mathcal{S} \Rightarrow \tau_y f \in \mathcal{S},\ e^{ix \cdot s} f \in \mathcal{S}$ | ✓ |
| 6 | $\mathcal{S}$ je … podmnožina integrovatelných funkcí | $f \in \mathcal{S} \Rightarrow f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ pro $\forall\ p \in [1, \infty]$ | částečně $L^1 \not\subset L^p_{p>1}$, $L^p_{p>1} \not\subset L^1$ |

POZOR! JSEM NA NEOMEZENÉ MNOŽINĚ

Vlastnosti ① - ⑤ si ověřte sami. Ukážeme, že:
$\underline{\mathcal{S} \subset L^1(\mathbb{R}^d)}$

Buď $f \in \mathcal{S}$, pak $\exists M_{d+1} > 0$ tak, že $|f(x)| \leq \frac{M_{d+1}}{|x|^{d+1}}$ $\forall x \in \mathbb{R}^d \setminus B_R(0)$
$\exists R >> 1$

Tedy
$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|\,dx \leq \int_{B_R(0)} |f(x)|\,dx + \int_{\mathbb{R}^d \setminus B_R(0)} |f(x)|\,dx$$
$$\leq \underbrace{\sup_{x \in \overline{B_R(0)}} |f(x)|\,|B_R(0)|}_{<+\infty} + M_{d+1} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d \setminus B_R(0)} \frac{dx}{|x|^{d+1}}}$$

subst: zobecněné sférické sami.
$$\tilde{C} \int_R^\infty \frac{r^{d-1}}{r^{d+1}}\,dr \leq \frac{\tilde{C}}{R} < +\infty,$$

což jsme chtěli ukázat.

Z posledních vlastností plyne, že vše o vlastnostech Fourierovy transformace na $L^1$ platí i pro Fourierovu transformaci na $\mathcal{S}$. Mimojiné máme
$$\boxed{f, g \in \mathcal{S} \implies \mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\,\mathcal{F}(g)}$$

Protože $\mathcal{F}^{-1}[F(x)](s) = \mathcal{F}[F(x)](-s)$, tak také platí
$$\mathcal{F}^{-1}(f)\,\mathcal{F}^{-1}(g) = \mathcal{F}^{-1}(f * g)$$

Substitucí
$f = \mathcal{F}(f)$ a $g = \mathcal{F}(g)$ dostaneme (za předpokladu, že platí Fourierova inverzní věta)
$$f \cdot g = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}[f] * \mathcal{F}[g]).$$

Aplikujeme-li na tuto rovnici Fourierovu transformaci, dostaneme
$$\boxed{\mathcal{F}[f \cdot g] = \mathcal{F}[f] * \mathcal{F}[g]}$$

Tedy, za předpokladu že na $\mathcal{S}$ platí Fourierova inverzní věta (což očekáváme), dostáváme

- Fourierova transformace konvoluce je součin Fourierových transf.
- Fourierova —"— součinu je konvoluce Four. transformací.

Následující tvrzení ilustruje jednu z klíčových vlastností Fourierovy transformace, opět ve dvou tvarech:

- Fourierova transformace derivace je "polynomiální" násobek Fourierovy transformace.
- Fourierova transf. "polynomiálního násobku fce" je derivace Fourierovy transf.

$\boxed{\text{Věta 16.3}}$ ($\alpha$) $\forall f \in \mathcal{S}$ platí

- $\widehat{D^\alpha f}(s) = (i2\pi s)^\alpha \hat{f}(s)$
- $\widehat{(-i2\pi x)^\alpha f(x)}(s) = D^\alpha \hat{f}(s)$

($\beta$) $\mathcal{F}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}$ a $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}$

Dk $\boxed{\text{Ad }(\alpha)}$ Provedeme pro $\alpha = (0, \dots, \underset{j\text{-té místo}}{1}, \dots)$

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\right](s) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) e^{-2\pi i x \cdot s} dx$$

$$x \cdot s = \underbrace{x_1 s_1 + \dots + x_d s_d}_{\hat{x} \cdot \hat{s}} + x_j s_j \quad = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \underbrace{\left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) e^{-2\pi i x_j s_j} dx_j \right)}_{\text{per partes - zde využíváme, že } f \in \mathcal{S}} e^{-2\pi i \hat{x} \cdot \hat{s}} d\hat{x}$$

$$= 2\pi i s_j \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi i x_j s_j} dx_j \right) e^{-2\pi i \hat{x} \cdot \hat{s}} d\hat{x} = 2\pi i\, s_j \mathcal{F}[f](s)$$

Dále

$$\mathcal{F}[-2\pi i x_j f(x)](s) = -\int_{\mathbb{R}^d} 2\pi i x_j f(x) e^{-2\pi i x \cdot s} dx \qquad \left(= \frac{\partial}{\partial s_j}\left(e^{ix \cdot s}\right)\right)$$

záměna integrálu a derivace

$$= \frac{\partial}{\partial s_j}\left( \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x \cdot s} dx \right) = \frac{\partial}{\partial s_j} \mathcal{F}[f](s)$$

$\boxed{\text{Ad }(\beta)}$ Připomeň $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) = \{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d);\ \sup |x^\beta D^\alpha f(x)| < +\infty$ pro libovolné multiindexy $\alpha$ a $\beta \}$.

- Protože $D^\alpha \hat{f}(s) = \widehat{(-i2\pi x)^\alpha f(x)}(s)$ a $(2\pi i x)^\alpha f(x) \in \mathcal{S}$ a Fourierova transformace funkcí z $\mathcal{S}$ je konečná, tak $D^\alpha \hat{f}(s) < \infty$ pro $\forall \alpha$ a navíc je spojitá dle věty o spojité závislosti integrálu závislém na parametru. Tj. $\forall \alpha$ $D^\alpha \hat{f} \in C(\mathbb{R}^d)$.
- Chceme ukázat, že $\forall$ polynom $p$ a $\forall \alpha$: $\sup_s |p(s) D^\alpha \hat{f}(s)| < \infty$ stačí $\sup_s |s^\beta \hat{f}(s)| < \infty$. Dle části ($\alpha$), však tvrzení plyne ze skutečnosti, že $D^\beta f \in \mathcal{S}$.

Shrňme si základní vlastnosti ~~do~~ Fourierovy transformace do následující tabulky

| Funkce $f$ ($x$) | Fourierova transformace $\hat{f}$ ($s$) |
|---|---|
| $f(x)$ | $\hat{f}(s)$ |
| $\tau_y f(x) := f(x+y)$ | $e^{2\pi i y\cdot s}\hat{f}(s)$ |
| $e^{-2\pi i x\cdot y} f(x)$ | $\hat{f}(s+y) = \tau_y \hat{f}(s)$ |
| $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$ | $2\pi i s_k \hat{f}(s)$ |
| $-2\pi i x_k f(x)$ | $\frac{\partial}{\partial s_k}(\hat{f}(s))$ |
| $p\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right) f(x)$ | $p(2\pi i s_k)\hat{f}(s)$ |
| $p(-2\pi i x_k) f(x)$ | $p\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)\hat{f}(s)$ |
| $(f * g)(x)$ | $\hat{f}(s)\hat{g}(s)$ |
| $f(x) g(x)$ | $(\hat{f} * \hat{g})(s)$ |

Šipky indikují jistou symetrii operací a Fourierovy transformace.

$$\boxed{\hat{f}(s) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-2\pi i x\cdot s}\, dx}$$

$x = (x_1, \ldots, x_d)$
$s = (s_1, \ldots, s_d)$
$dx = (dx_1, \ldots, dx_d)$

$$p(y) := a_0 + a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \ldots + a_{1d} y_d + a_{211} y_1^2 + a_{212} y_1 y_2 + \ldots$$

$$p\left(\frac{\partial}{\partial x_s}\right) := a_0 + a_{11}\frac{\partial}{\partial x_1} + a_{12}\frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + a_{1d}\frac{\partial}{\partial x_d} + a_{211}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + a_{212}\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + \ldots$$