

Řešení vybraných příkladů 7. sada

1.b) Vyšetřete konvergenci mocninné řady

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a^{n^2} z^n, \quad a > 0.$$

Řešení: Platí

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = \begin{cases} 0, & a < 1, \\ 1, & a = 1, \\ +\infty, & a > 1. \end{cases}$$

Poloměr konvergence R řady (1) je tedy

$$R = \begin{cases} 0, & a > 1, \\ 1, & a = 1, \\ +\infty, & a < 1. \end{cases}$$

Pro $a = 1$ má smysl uvažovat konvergenci (1) na kružnici konvergence, tj. na jednotkové kružnici $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Každé $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$ je tvaru $z = e^{ix} = \cos x + i \sin x$ pro jednoznačně určené $x \in [0, 2\pi)$. Máme tedy studovat konvergenci řady

$$(2) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (e^{ix})^n = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{inx}, \quad x \in [0, 2\pi).$$

Platí $|e^{inx}| = 1$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0, 2\pi)$. Není tedy splněna nutná podmínka pro konvergenci řady, tj. není pravda, že $|e^{inx}| \rightarrow 0$ pro $n \rightarrow +\infty$, a řada (2) tedy nekoneguje.

1.e) Vyšetřete konvergenci mocninné řady

$$(3) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^p}, \quad p \in \mathbb{R}.$$

Řešení: Platí

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^{-p}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^p} = 1^{-p} = 1.$$

Zde jsme použili $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln n}{n}} = 1$ (viz 5. dů z 5. sady). Poloměr konvergence řady (3) je tedy 1.

Stejně jako v b) má smysl uvažovat konvergenci (3) na jednotkové kružnici. Pišme $z = e^{ix}$, $x \in [0, 2\pi)$. Pak (3) je tvaru

$$(4) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{n^p}.$$

Platí $\left| \frac{e^{inx}}{n^p} \right| = n^{-p}$. Vidíme, že řada (4) může konvergovat jen pro $p > 0$. Je-li nyní $p > 0$, pak $n^{-p} \searrow 0$ pro $n \rightarrow +\infty$ a současně řada

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{inx} = \sum_{n=1}^{+\infty} (\cos(nx) + i \sin(nx))$$

má omezené částečné součty pro $x \neq 0$ (viz příklad m) z 6. sady). Z Dirichletova kritéria tedy plyne konvergence (4) pro $p > 0$ a $x \neq 0$.

Zbývá probrat případ $x = 0$. Pak $e^{in0} = 1$ a máme tedy studovat konvergenci řady

$$(5) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}.$$

Víme, že tato řada konverguje právě tehdy, když $p > 1$.

Závěr: Poloměr konvergence řady (3) je 1. Na jednotkové kružnici řada konverguje pro $p > 0$ a $z \neq 1$. Je-li $p > 1$, pak řada konverguje všude na jednotkové kružnici (a to dokonce absolutně). Pro ostatní hodnoty z a p řada na kružnici nekoneguje.

1.g) Vyšetřete konvergenci mocninné řady

$$(6) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n z^n \left(\frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} \right)^p, \quad p \in \mathbb{R}.$$

Řešení: Označme $a_n := (-1)^n \left(\frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} \right)^p$, $n = 1, 2, \dots$. Pak

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2(n+1)^2}{(2n+3)(2n+2)} \right)^p \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2n^2 + 4n + 2}{4n^2 + 10n + 6} \right)^p = \frac{1}{2^p}. \end{aligned}$$

Poloměr konvergence je tedy 2^p .

Nechť dále $z = 2^p e^{ix}$, $x \in [0, 2\pi)$. Zbývá určit, pro která x konverguje řada

$$(7) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n 2^{pn} e^{inx} \left(\frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} \right)^p = - \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n e^{inx} \left(\frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!} \right)^p.$$

Označme

$$b_n := \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Úpravou dostaneme

$$\begin{aligned} b_n^p &= \left(\frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} \right)^p \\ &= \left(\frac{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n))^2}{(2n+1)!} \right)^p \\ &= \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{3 \cdot 5 \cdots (2n+1)} \right)^p \\ &= \left(\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \right)^p. \end{aligned}$$

Připomeňme, že $(2n)!! := (2n)(2n-2) \cdots 2$, $(2n+1)!! := 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)$. Máme $|(-1)^n e^{inx}| = 1$. Je-li $p \leq 0$, pak $b_n^p \geq 1$ a řada (7) tedy nemůže konvergovat.

Stačí tedy dále uvažovat $p > 0$. Máme $(-1)^n = \cos(\pi n) = e^{i\pi n}$ a tudíž

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n e^{inx} = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{in(x+\pi)}.$$

Víme, že tato řada má omezenou posloupnost částečných součtů kdykoliv $x + \pi \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Uvažujme-li $x \in [0, 2\pi)$, pak $x + \pi = 2k\pi$ nastává jen pro $x = \pi$, $k = 1$. Jelikož $\frac{b_{n+1}^p}{b_n^p} = \left(\frac{2n+2}{2n+3} \right)^p < 1$, pak je jasné, že posloupnost $\{b_n^p\}_{n=1}^{+\infty}$ je klesající. Jestliže navíc ukážeme

$$(8) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n^p = 0,$$

pak z Dirichletova kritéria plyne, že (7) konverguje pro $x \neq \pi$ a $p > 0$. K ověření (8) nám zřejmě stačí ukázat, že $b_n^p \rightarrow 0$ pro $n \rightarrow +\infty$ pro pevně zvolenou hodnotu $p > 0$. Ukážeme si tři postupy, jak (8) dokázat.

1. postup. V příkladě 4.p) z 5. sady (neboli 6. úkol z 5. sady) jsme ukázali, že řada

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^p$$

konverguje pro $p > 2$. Nutná podmínka pro konvergenci znamená, že

$$(9) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^p = 0$$

pro $p > 2$. Pak ale zřejmě (9) platí kdykoliv $p > 0$. Postup tohoto příkladu funguje beze změny i pro řadu $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n^p$. Speciálně dostaneme (8) pro $p > 0$.

2. postup. Použijeme Stirlingovu formuli. Máme

$$\begin{aligned} b_n &\cong \frac{2^{2n} \left(\left(\frac{n}{e} \right)^n \sqrt{2\pi n} \right)^2}{\left(\frac{2n+1}{e} \right)^{2n+1} \sqrt{2\pi(2n+1)}} \\ &= \frac{(2n)^{2n+1} e\pi}{(2n+1)^{2n+1} \sqrt{2\pi(2n+1)}} \\ &= \frac{e\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n+1}} \frac{1}{\sqrt{(2n+1)}} \sim \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}, \quad n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Odsud je pak jasné, že $b_n \rightarrow 0$ pro $n \rightarrow +\infty$ a tedy i (8) pro $p > 0$.

3. postup. (Analogie postupu k příkladu 4.p) z 5. sady). Zkusme dokázat (8) pro $p = 2$, tj.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} \right)^2 = 0.$$

Platí

$$b_{n+1}^2 = \left(\frac{2n+2}{2n+3} \right)^2 b_n^2 < \frac{n+1}{n+2} b_n^2.$$

Indukcí dle n ,

$$b_{n+1}^2 < \frac{n+1}{n+2} b_n^2 < \frac{n}{n+2} b_{n-1}^2 < \dots < \frac{2}{n+2} b_1^2 = \frac{2}{n+2} \left(\frac{2}{3} \right)^2 = \frac{8}{9(n+2)}$$

a tedy (8) skutečně platí.

Zbývá určit, pro která p řada (7) konverguje, jestliže $x = \pi$. To je to samé jako konvergence řady $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n^p$. Analogicky jako v příkladě 4.p) z 5. sady dostaneme, že řada $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n^p$ konverguje (absolutně) právě tehdy, když $p > 2$.

Závěr: Poloměr konvergence řady (3) je 2^p . Na kružnici konvergence o poloměru 2^p řada konverguje pro $p > 0$ a $z \neq -2^p$. Je-li $p > 2$, pak řada konverguje všude na jednotkové kružnici (a to dokonce absolutně). Pro ostatní hodnoty z a p řada na kružnici konvergence nekonverguje.

3.a) Ukažte, že funkce $\sin^2 x$ je analytická a najděte její Taylorovu řadu se středem v nule.

Řešení: Funkce $\sin x$ je reálně analytická a platí

$$\sin x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Množina reálně analytických funkcí na $\mathbb{R}$ je uzavřená na součin funkcí, $\sin^2 x$ je tedy taky reálně analytická. Pro určení její Taylorovy řady využijeme vzorec

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (2x)^{2k}}{(2k)!} \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1} (2x)^{2k}}{2(2k)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

3.b) Ukažte, že funkce $\sqrt{1+x^2}$ je analytická a najděte její Taylorovu řadu se středem v nule.

Řešení: Funkce $\sqrt{1+x}$ je reálně analytická pro $x > -1$. Dále víme, že

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} x^n, \quad x \in (-1, 1).$$

Tudíž

$$\sqrt{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} x^{2n} = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} \frac{-1}{2} \frac{x^4}{2!} + \frac{1}{2} \frac{-1}{2} \frac{-3}{2} \frac{x^6}{3!} + \dots, \quad x \in (-1, 1).$$

4.b) Najděte součet řady

$$(10) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n.$$

Řešení: Z limitního podílového kritéria plyne, že řada (10) konverguje pro $|x| < 1$. Dle Leibnizova kritéria konverguje řada i pro $x = -1$. Pro ostatní $x \in \mathbb{R}$ řada diverguje. Platí

$$\begin{aligned} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n &= \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} x^n \\ &= \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n n!} x^n \\ &= \frac{-1}{2} \frac{-3}{2} \dots \frac{-(2n-1)}{2} \frac{(-x)^n}{n!} \\ &= \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-x)^n. \end{aligned}$$

Jelikož platí

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-x)^n, \quad x \in [-1, 1),$$

pak vidíme, že (10) lze sečíst na

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} - 1, \quad x \in [-1, 1).$$

5.a) Sečtěte řadu

$$(11) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n 2^n}.$$

Řešení: Uvažujme řadu

$$(12) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n 2^n} x^n.$$

Z limitního odmocninového kritéria plyne, že (12) konverguje pro $|x| < 2$. Podle věty o derivování mocninných řad máme:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n 2^n} x^n \right)' &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n 2^n} (x^n)' \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} x^{n-1} \\ &= \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n} \\ &= \frac{1}{x} \left(\frac{1}{1 - \frac{x}{2}} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{x} \left(\frac{2}{2-x} - 1 \right) \\ &= \frac{2}{x(2-x)} - \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{x} + \frac{1}{2-x} - \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{2-x}. \end{aligned}$$

Tedy (12) je primitivní k $\frac{1}{2-x}$ na $(-2, 2)$. Na druhou stranu:

$$\int \frac{dx}{2-x} = -\ln(2-x) + c, \quad x \in (-2, 2).$$

To znamená, že

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} x^n = -\ln(2-x) + c.$$

Porovnáním obou stran pro $x = 0$ vidíme, že $c = \ln(2)$. Tedy

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} x^n = -\ln(2-x) + \ln 2, \quad x \in (-2, 2).$$

Tudíž

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} = -\ln(2-1) + \ln 2 = \ln 2.$$

5.c) Najděte součet řady

$$(13) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}.$$

Řešení: Uvažujme

$$(14) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} x^{2n-1}.$$

Z limitního podílového kritéria plyne, že řada (14) konverguje pro $|x| < 1$. Z Leibnizova kritéria plyne, že konverguje i pro $x = 1$. Máme:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} x^{2n-1} \right)' &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} (x^{2n-1})' \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} x^{2n-2} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} (x^2)^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-x^2)^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^n \\ &= \frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Ukázali jsme, že (14) je primitivní k $\frac{1}{1+x^2}$ na $(-1, 1)$. Tudíž

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} x^{2n-1} = \arctan x + c, \quad x \in (-1, 1).$$

Dosadíme za $x = 0$ a vidíme, že $c = 0$. Tudíž

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} x^{2n-1} \Big|_{x=1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \arctan x = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

5.e) Najděte součet

$$(15) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

Řešení: Platí:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} &= \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \Big|_{x=-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \left((1-x)^{-\frac{1}{2}} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} - 1. \end{aligned}$$

Zde jsme využili cvičení 4.b).