

Matematická analýza II (NOFY152) – DÚ 7

Topologické pojmy v $\mathbb{R}^d$, funkce více proměnných

1. Najděte vnitřek, uzávěr a hranici množiny $A \stackrel{\text{def}}{=} M \setminus K$, kde

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, 0 < y \leq 2\},$$
$$K \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y - 1)^2 = 1\}.$$

Řešení: Platí

$$A^\circ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, 0 < y < 2\} \setminus K,$$

$$\overline{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, 0 \leq y \leq 2\},$$

$$\partial A = \{(\pm 1, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 2\} \cup \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1\} \cup \{(x, 2) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1\} \cup K.$$

Pozorujeme, že $A^\circ \cup \partial A = \overline{A}$.

2. Pro které hodnoty parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ platí, že počátek leží v uzávěru množiny

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \{(k^\alpha \cos k, k^\alpha \sin k) : k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}?$$

Zdůvodněte.

Řešení: Nejprve připomeňme definici.

1. Je-li $\alpha = \frac{p}{q}$ racionální, kde p, q jsou nesoudělné a q liché, pak $k^\alpha = k^{\frac{p}{q}}$ je definováno pro každé $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$,

2. Není-li α tvaru jako v 1, pak $k^\alpha = e^{\alpha \ln k}$ je definováno jen pro $k > 0$, $k \in \mathbb{Z}$. V tomto případě můžeme uvažovat jen $k > 0$.

Máme najít všechna α tak, aby pro každé $\varepsilon > 0$ platilo $U_\varepsilon((0, 0)) \cap M \neq \emptyset$. Zde

$$U_\varepsilon((0, 0)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2} < \varepsilon\},$$

je otevřená koule o poloměru $\varepsilon > 0$ se středem v počátku. Platí

$$\|(k^\alpha \cos k, k^\alpha \sin k)\| = |k^\alpha| = |k|^\alpha.$$

Je-li $\alpha \geq 0$, pak $|k|^\alpha \geq 1$ a tedy $U_{\frac{1}{2}}((0, 0)) \cap M = \emptyset$. Je-li naopak $\alpha < 0$, pak $|k|^\alpha$ klesá pro $k \rightarrow +\infty$ monotonně k nule, existuje tedy $k_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro $k \geq k_0$ platí $|k|^\alpha < \varepsilon$. Tedy $U_\varepsilon((0, 0)) \cap M \neq \emptyset$ pro každé $\varepsilon > 0$.

Alternativně lze argumentovat přes hromadné body, což jsou v tomto případě body, které dostaneme pro $k \rightarrow +\infty$ nebo $k \rightarrow -\infty$. Podobné úvahy jako výše pak vedou k závěru, že $(0, 0)$ je hromadný bod dané množiny, jen pokud $\alpha < 0$.

Závěr: Bod $(0, 0)$ leží v uzávěru množiny M jen pro $\alpha < 0$.

3. Je množina

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 > 1, |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$$

omezená? Zdůvodněte.

Řešení: Z definice M plyne omezení $x^2 + y^2 > z^2 + 1$. Dále pro $(x, y, z) \in M$ platí

$$|x| + |y| \leq 2, \quad 4 = 2^2 \geq (|x| + |y|)^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y| \geq x^2 + y^2 > z^2 + 1.$$

Tudíž $z^2 < 3$ a $|z| < \sqrt{3}$. Množina M leží uvnitř omezené množiny

$$\{(x, y, z) : |z| < \sqrt{3}, |x| \leq 1, |y| \leq 1\},$$

která je podmnožinou krychle se středem v počátku a délkou strany $2\sqrt{3}$, tj.

$$M \subset B_{\sqrt{3}}(0) = \{\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x}|_\infty < \sqrt{3}\}.$$

M je tedy omezená.

4. Nechť $A, B \subset \mathbb{R}^n$. Rozhodněte, zda platí následující rovnosti nebo alespoň jedna inkluze, tj. dokažte nebo najděte protipříklady,

- (i) $\overline{\partial A} = \partial \overline{A}$
- (ii) $\partial(A \cup B) = \partial A \cup \partial B$
- (iii) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Řešení:

- (i) Inkluze $\overline{\partial A} \subseteq \partial \overline{A}$ neplatí. Stačí vzít $A = \mathbb{Q}$. Pak $\overline{\partial A} = \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$ a $\partial \overline{\mathbb{Q}} = \partial \mathbb{R} = \emptyset$.

Zkusme nyní $\supseteq$. Je-li $x \in \partial \overline{A}$ a $\varepsilon > 0$, pak $U_\varepsilon(x) \cap \overline{A} \neq \emptyset$ a $U_\varepsilon(x) \cap (\mathbb{R}^n \setminus \overline{A}) \neq \emptyset$. Jelikož $(\mathbb{R}^n \setminus \overline{A}) \subseteq (\mathbb{R}^n \setminus A)$, pak i $U_\varepsilon(x) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset$. Zvolme $x' \in U_\varepsilon(x) \cap \overline{A}$. Pak $U_\varepsilon(x)$ je otevřené okolí x' a jelikož $x' \in \overline{A}$, pak $U_\varepsilon(x)$ musí obsahovat bod z A . Tedy pro každé $\varepsilon > 0$ platí $U_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$. Každé otevřené okolí bodu x tedy protne A i $\mathbb{R}^n \setminus A$. To ale z definice znamená, že $x \in \partial A$ a tedy i $x \in \partial \overline{A}$. Dokázali jsme $\overline{\partial A} \supseteq \partial \overline{A}$.

- (ii) Inkluze $\partial(A \cup B) \supseteq \partial A \cup \partial B$ neplatí. Stačí vzít otevřené intervaly $A = (-1, 1)$ a $B = (0, 2)$. Pak $\partial(A \cup B) = \partial(-1, 2) = \{-1, 2\}$ a $\partial A \cup \partial B = \{-1, 1\} \cup \{0, 2\} = \{-1, 1, 0, 2\}$.

Obrácená inkluze $\partial(A \cup B) \subseteq \partial A \cup \partial B$ platí a nyní ji dokážeme nepřímo. Není-li $x \in \partial A \cup \partial B$, pak $x \notin \partial A$ a $x \notin \partial B$. Pak ale x je vnitřní bod A nebo $\mathbb{R}^n \setminus A$ a současně je to vnitřní bod B nebo $\mathbb{R}^n \setminus B$. Je-li $x \in A^\circ$ nebo $x \in B^\circ$, pak máme vyhráno, neboť pak je x nutně i vnitřním bodem $A \cup B$. Zbývá tedy probrat případ, kde x je vnitřním bodem $\mathbb{R}^n \setminus A$ i $\mathbb{R}^n \setminus B$. Najdeme $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ tak, aby $U_{\varepsilon_1}(x) \subseteq (\mathbb{R}^n \setminus A)$ a $U_{\varepsilon_2}(x) \subseteq (\mathbb{R}^n \setminus B)$. Pak ale $U_\varepsilon(x) \subset \mathbb{R}^n \setminus (A \cup B)$, kde $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Tudíž x je vnitřní bodem $\mathbb{R}^n \setminus (A \cup B)$ a nemůže tedy ležet na hranici této množiny. Ukázali jsme implikaci $x \notin \partial A \cup \partial B \Rightarrow x \notin \partial(A \cup B)$ a tím i $x \in (\partial A \cup \partial B) \Rightarrow x \in \partial(A \cup B)$. Důkaz je hotov.

- (iii) Inkluze $\overline{A \cap B} \supseteq \overline{A} \cap \overline{B}$ neplatí. Stačí vzít otevřené intervaly $A = (-1, 0)$ a $B = (0, 1)$. Pak $\overline{A \cap B} = \emptyset = \emptyset$ a současně $\overline{A} \cap \overline{B} = [-1, 0] \cap [0, 1] = \{0\}$.

Dokážeme $\subseteq$. Je-li $x \in \overline{A \cap B}$, pak pro každé $\varepsilon > 0$ platí $U_\varepsilon(x) \cap (A \cap B) \neq \emptyset$. Speciálně $U_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$ a $U_\varepsilon(x) \cap B \neq \emptyset$. Ukázali jsme, že libovolné otevřené okolí x má netriviální průnik s A i s B . Tedy $x \in \overline{A}$ a $x \in \overline{B}$, nutně tedy $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$.

5. Spočítejte limity (pokud existují)

- (i) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2 + xy}{|x| + |y|},$
- (ii) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (\cos(x + y))^{\frac{1}{x^2 + y^2}}.$

Řešení:

- (i) Pomocí Youngovy nerovnosti dostáváme

$$0 \leq \left| \frac{x^2 - y^2 + xy}{|x| + |y|} \right| \leq \frac{x^2 + y^2 + |xy|}{|x| + |y|} \leq \frac{3}{2} \frac{x^2 + y^2}{|x| + |y|} \leq \frac{3}{2} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{3}{2} |(x, y)|_2,$$

odkud vidíme, že zadaná limita je rovna 0. V poslední nerovnosti jsme navíc využili

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{|x| + |y|} \leq 1 \iff x^2 + y^2 \leq (|x| + |y|)^2 \iff 0 \leq |xy|.$$

Alternativně můžeme postupovat takto

$$0 \leq \left| \frac{x^2 - y^2 + xy}{|x| + |y|} \right| \leq \frac{x^2 + y^2 + |xy|}{|x| + |y|} \leq \frac{|x|^2 + |y|^2 + 2|xy|}{|x| + |y|} = \frac{(|x| + |y|)^2}{|x| + |y|} = |x| + |y| = |(x, y)|_1.$$

(ii) Ukažme, že limita neexistuje. Na paprsku $y = x$ dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{2x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(\cos 2x)}{2x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 2x)}{2x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{2x^2}} = e^{-1},$$

kde jsme využili věty o limitě složené funkce a limitě součinu a znalost základních limit

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \frac{1}{2}.$$

Na druhou stranu na paprsku $y = -x$ máme

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 0)^{\frac{1}{2x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} 1^{\frac{1}{2x^2}} = 1.$$

Protože se limity neshodují, zadaná limita neexistuje.

6. Jestliže dodefinujeme funkce z předchozího příkladu v počátku nulou, rozhodněte, zda jsou takto definované funkce spojité nebo omezené na nějakém okolí počátku.

Řešení:

(i) Podle Příkladu 5(i) víme, že funkce

$$f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \frac{x^2 - y^2 + xy}{|x| + |y|} & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

je spojitá v počátku, a tudíž je i omezená na nějakém okolí počátku (podle věty o nabývání extrémů pro spojitou funkci na kompaktní množině).

(ii) Podle Příkladu 5(ii) není funkce

$$f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} (\cos(x+y))^{\frac{1}{x^2+y^2}} & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

spojitá v počátku. V dalším uvažujme funkci f na množině

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x+y| < \frac{\pi}{2} \right\},$$

neboť na takové množině je f definovaná a zároveň obsahuje počátek. Pro $(0, 0) \neq (x, y) \in M$ je z definice funkce f omezená zdola, neboť

$$(\cos(x+y))^{\frac{1}{x^2+y^2}} = e^{\frac{\ln(\cos(x+y))}{x^2+y^2}} > 0.$$

Dále platí

$$e^{\frac{\ln(\cos(x+y))}{x^2+y^2}} \leq 1 \iff \frac{\ln(\cos(x+y))}{x^2+y^2} \leq 0 \iff \cos(x+y) \leq 1,$$

což je splněno pro všechna $(x, y) \in M$, a tedy f je na této množině omezená i shora. Existuje tedy okolí počátku, na kterém je funkce f omezená.

7. Určete definiční obor následujících funkcí a spočítejte jejich první parciální derivace

(i) $f(x, y, z) = \cos(x+y) \sin(x-y+z),$

(ii) $f(x, y) = e^{\text{tg}(xy)}.$

Řešení:

- (i) Zřejmě platí $D_f = \mathbb{R}^3$. S využitím součtového vzorce $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$, potom pro první parciální derivace na celém D_f dostáváme

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= -\sin(x+y)\sin(x-y+z) + \cos(x+y)\cos(x-y+z) = \cos(2x+z), \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= -\sin(x+y)\sin(x-y+z) - \cos(x+y)\cos(x-y+z) = -\cos(2y-z), \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= \cos(x+y)\cos(x-y+z).\end{aligned}$$

- (ii) Z podmínky $xy \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}$ dostáváme

$$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \left(x, \frac{(2k+1)\pi}{2x} \right) : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Na D_f potom máme

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{ye^{\text{tg}(xy)}}{\cos^2(xy)}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{xe^{\text{tg}(xy)}}{\cos^2(xy)}.\end{aligned}$$

8. Najděte směrovou derivaci funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 + 2x^2y + y^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

v počátku v obecném směru $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, $u^2 + v^2 = 1$.

Řešení: Označme si $\mathbf{v} \stackrel{\text{def}}{=} (u, v)$. Podle definice derivace ve směru máme

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}((0, 0)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + h(u, v)) - f((0, 0))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(hu, hv)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^4 u^4 + 2h^3 u^2 v + h^3 v^3}{h^2 u^2 + h^2 v^2}}{h}.$$

S využitím $u^2 + v^2 = 1$, pak dostáváme

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}((0, 0)) = \lim_{h \rightarrow 0} (hu^4 + 2u^2v + v^3) = 2u^2v + v^3.$$