Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale co nejpřesněji odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte ověřit splnění předpokladů.

Jméno a příjmení: ______________________

Příklad	1	2	3	4	**Celkem bodů**
Bodů	6	10	10	10	36
Získáno					

[6] 1. Budiž dána funkce

$$f(z) = \frac{\cos z}{(2z-1)^2}.$$

V bodě $z_0 = \frac{1}{2}$:

a) určete typ singularity,

b) najděte Laurentovu řadu funkce $f(z)$,

c) spočtěte reziduum.

Řešení:

Funkce $\cos z$ je holomorfní v $\mathbb{C}$, $f(z)$ má proto v $z_0 = \frac{1}{2}$ pól násobnosti dva. Nyní spočteme Laurentovu řadu, rozvoj funkce $\cos z$ v okolí požadovaného bodu je

$$\cos z = \cos\left(\left(z - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\right) = \cos\left(z - \frac{1}{2}\right)\cos\frac{1}{2} - \sin\left(z - \frac{1}{2}\right)\sin\frac{1}{2}$$
$$= \left(\cos\frac{1}{2}\right)\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{\left(z-\frac{1}{2}\right)^{2k}}{(2k)!} - \left(\sin\frac{1}{2}\right)\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{\left(z-\frac{1}{2}\right)^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

kde jsme použili standardní součtové vzorce pro goniometrické funkce a známé Laurentovy řady pro goniometrické funkce. Jmenovatel $(2z-1)^2 = 4(z-\frac{1}{2})^2$ je již ve vhodném tvaru, celkem proto

$$\frac{\cos z}{(2z-1)^2} = \frac{\cos z}{4(z-\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{4}\left(\cos\frac{1}{2}\right)\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{\left(z-\frac{1}{2}\right)^{2k-2}}{(2k)!} - \frac{1}{4}\left(\sin\frac{1}{2}\right)\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{\left(z-\frac{1}{2}\right)^{2k-1}}{(2k+1)!}.$$

Z Laurentovy řady v okolí bodu $z_0 = \frac{1}{2}$ okamžitě vyčteme zbývající charakteristiky, reziduum v bodě $z_0 = \frac{1}{2}$ je rovno koeficientu u mocniny $\left(z - \frac{1}{2}\right)^{-1}$, tedy

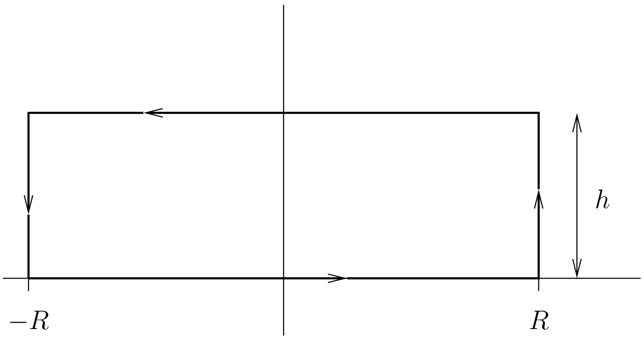
$$\operatorname{res}_{z=-\frac{1}{3}}\frac{\cos z}{(2z-1)^2} = -\frac{1}{4}\left(\sin\frac{1}{2}\right).$$

Z rozvoje do Laurentovy řady opět vidíme, že singularita je zjevně pól násobnosti dva.

[10] 2. Pro $a \in \mathbb{R}$ uvažujte integrál

$$I = \int_{x=-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{ax}}{\mathrm{e}^{3x}+1}\,\mathrm{d}x.$$

Pro která $a \in \mathbb{R}$ integrál existuje a je konečný? Pro tato a integrál spočtěte. K výpočtu použijte integrační křivku naznačenou na Obrázku 1 a limitní přechod $R \to +\infty$. Je nutné zvolit vhodnou hodnotu parametru h!



Obrázek 1: Integrační křivka pro výpočet $\int_{x=-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{ax}}{\mathrm{e}^{3x}+1}\,\mathrm{d}x$.

Řešení:

Zjevně musí být $a \in (0,3)$. Požadavek na $a > 0$ plyne z limitního chování pro $x \to -\infty$, požadavek $a < 3$ plyne z limitního chování $x \to +\infty$, neboť integrand se v nekonečnu chová jako $\frac{\mathrm{e}^{ax}}{\mathrm{e}^{3x}}$, což dává konečný integrál pouze pro $a < 3$. Nejdříve najdeme singularity funkce $\frac{\mathrm{e}^{ax}}{\mathrm{e}^{3x}+1}$, je tedy potřeba vyřešit (v oboru komplexních čísel) rovnici

$$\mathrm{e}^{3z} + 1 = 0,$$

což je totéž jako $\mathrm{e}^{3z} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi + 2k\pi\mathrm{i}}$, $k \in \mathbb{Z}$. Řešením uvedené rovnice jsou zjevně

$$z_k = \frac{\pi}{3}\mathrm{i} + \frac{2}{3}k\pi\mathrm{i},$$

kde $k \in \mathbb{Z}$. Parametrizace křivky na Obrázku 1 je kupříkladu

$$\begin{aligned}
&\varphi^1_{h,R}: && z = t, && t \in (-R,R),\\
&\varphi^2_{h,R}: && z = R + \mathrm{i}t, && t \in (0,h),\\
-&\varphi^3_{h,R}: && z = t + \mathrm{i}h, && t \in (-R,R),\\
-&\varphi^4_{h,R}: && z = -R + \mathrm{i}t, && t \in (0,h).
\end{aligned}$$

(Vše je naznačeno na Obrázku 2.) Uvnitř křivky leží jediná singularita, a sice singularita v bodě $z_0 = \mathrm{i}\frac{\pi}{3}$.
Integrujme nyní podél této křivky funkci

$$f(z) =_{\mathrm{def}} \frac{\mathrm{e}^{az}}{\mathrm{e}^{3z}+1}$$

Pro integrál přes křivku $\varphi^1_{h,R}$ zřejmě platí

$$\int_{\varphi^1_{h,R}} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} \frac{\mathrm{e}^{at}}{\mathrm{e}^{3t}+1}\,\mathrm{d}t \overset{R\to+\infty}{\to} I,$$

integrál přes křivku $\varphi^3_{h,R}$ je roven

$$\int_{\varphi^3_{h,R}} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{-R}^{R} \frac{\mathrm{e}^{a(t+\mathrm{i}h)}}{\mathrm{e}^{3(t+\mathrm{i}h)}+1}\,\mathrm{d}t.$$

Byli bychom rádi, kdybychom tento integrál dokázali spočíst explicitně. (Nelze očekávat, že při navrženém limitním přechodu vymizí.) Zvolíme-li $h = \frac{2}{3}\pi$, pak bude

$$\int_{\varphi^3_{h,R}} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{-R}^{R} \frac{\mathrm{e}^{at}\mathrm{e}^{a\mathrm{i}\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}}}{\mathrm{e}^{3t}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}+1}\,\mathrm{d}t = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}a\frac{2}{3}\pi}\int_{-R}^{R} \frac{\mathrm{e}^{at}}{\mathrm{e}^{3t}+1}\,\mathrm{d}t \overset{R\to+\infty}{\to} -\mathrm{e}^{\mathrm{i}a\frac{2}{3}\pi} I.$$

Integrály přes boční hrany obdélníka v limitě vymizí, skutečně

$$\left|\int_{\varphi^2_{h,R}} f(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\mathrm{i}\int_0^h \frac{\mathrm{e}^{a(R+\mathrm{i}t)}}{\mathrm{e}^{3(R+\mathrm{i}t)}+1}\,\mathrm{d}t\right| \le \int_0^h \frac{\mathrm{e}^{aR}}{|\mathrm{e}^{3R}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+1|}\,\mathrm{d}t \le \int_0^h \frac{\mathrm{e}^{aR}}{\mathrm{e}^{3R}-1} = \int_0^h \frac{\mathrm{e}^{(a-3)R}}{1-\mathrm{e}^{-3R}} \overset{R\to+\infty}{\to} 0,$$

neboť $a \in (0,3)$. (Užíváme také důsledku trojúhelníkové nerovnosti $\frac{1}{|a+b|} \le \frac{1}{||a|-|b||}$.) Obdobně postupujeme i v případě integrálu přes "levou" hranu obdélníka, tentokrát je však odhad snažší

$$\left|\int_{\varphi^3_{h,R}} f(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\mathrm{i}\int_0^h \frac{\mathrm{e}^{a(-R+\mathrm{i}t)}}{\mathrm{e}^{3(-R+\mathrm{i}t)}+1}\,\mathrm{d}t\right| \le \int_0^h \frac{\mathrm{e}^{-aR}}{|\mathrm{e}^{-3R}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+1|}\,\mathrm{d}t \le C\int_0^h \mathrm{e}^{-aR}\,\mathrm{d}t \overset{R\to+\infty}{\to} 0.$$

(Předposlední nerovnost od určitého R platí pro libovolné $C > 1$. Plyne to z pozorování $\left|\mathrm{e}^{-3R}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+1\right| \overset{R\to+\infty}{\to} 1$.)

Z reziduové věty ovšem plyne, že

$$\int_{\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\varphi_4} = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{res}_{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}\frac{\mathrm{e}^{az}}{\mathrm{e}^{2z}+1}.$$

(Pro libovolné R je singularita v $z_0 = \frac{\pi}{3}\mathrm{i}$ jediná singularita, která leží uvnitř integrační křivky. Rovnost tudíž platí bez ohledu na hodnotu R a zůstane tedy zachována i při limitním přechodu.) Spočtěme residuum v bodě $z_0 = \frac{\pi}{3}\mathrm{i}$, kupříkladu podle následující věty

> Buďte $f(z)$, $g(z)$ holomorfní funkce na okolí bodu z_0 a nechť má funkce $g(z)$ v bodu z_0 kořen násobnosti jedna, pak
>
> $$\mathrm{res}_{z_0}\frac{f(z)}{g(z)} = \left.\frac{f(z)}{g'(z)}\right|_{z=z_0}.$$

Jest tedy

$$\mathrm{res}_{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}\frac{\mathrm{e}^{az}}{\mathrm{e}^{3z}+1} = \left.\frac{\mathrm{e}^{az}}{3\mathrm{e}^{3z}}\right|_{z=\frac{\pi}{3}\mathrm{i}} = -\frac{\mathrm{e}^{\frac{a\pi}{3}\mathrm{i}}}{3}.$$

Celkem tedy

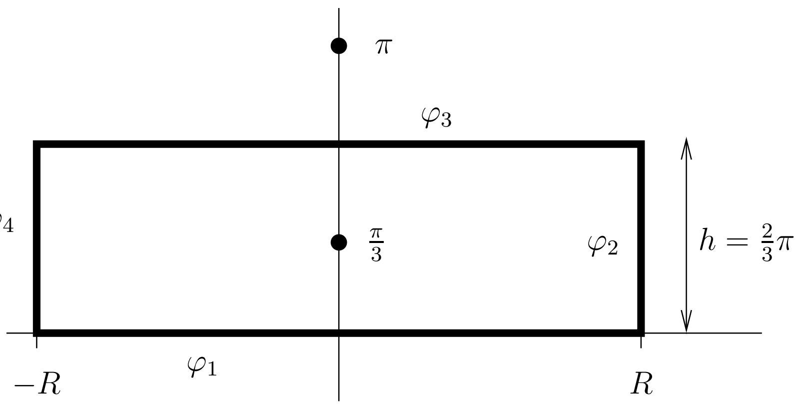
$$I - \mathrm{e}^{\mathrm{i}a\frac{2}{3}\pi} I = -2\pi\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{\frac{a\pi}{3}\mathrm{i}}}{3},$$

což vede na

$$\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{a\pi}{3}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{a\pi}{3}}}{2\mathrm{i}} I = -\frac{\pi}{3},$$

z čehož plyne, že

$$I = \frac{\pi}{3\sin\frac{\pi a}{3}}.$$



Obrázek 2: Integrační křivka pro výpočet $\int_{x=-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{ax}}{\mathrm{e}^{3x}+1}\,\mathrm{d}x$.

[10] 3. Distribuce $T_{\text{p.v.}\,\frac{1}{x^2}} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ je definována předpisem

$$\left\langle T_{\text{p.v.}\,\frac{1}{x^2}}, \varphi \right\rangle =_{\text{def}} \text{p.v.} \int_{x\in\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x =_{\text{def}} \lim_{\varepsilon\to 0+} \left(\int_{x=-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x + \int_{x=\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x - \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon} \right). \tag{1}$$

Zaveďme nyní distribuci $S_{\text{p.v.}\,\frac{1}{x^2}} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, která je definovaná jako

$$\left\langle S_{\text{p.v.}\,\frac{1}{x^2}}, \varphi \right\rangle =_{\text{def}} \int_{x=0}^{+\infty} \frac{\varphi(-x) - 2\varphi(0) + \varphi(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x. \tag{2}$$

(Povšimněte si mezí v integrálu.)

a) Ukažte, že definicí (2) je skutečně zavedena distribuce (korektnost definice, linearita, spojitost).

b) Dále ukažte, že definice (2) definuje stejnou distribuci jako definice (1), aneb ukažte, že platí

$$S_{\text{p.v.}\,\frac{1}{x^2}} = T_{\text{p.v.}\,\frac{1}{x^2}}, \tag{3}$$

kde rovnost chápeme jako rovnost dvou distribucí v $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

c) Ukažte, že posloupnost funkcí $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná jako

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & |x| \geq \frac{1}{n}, \\ -n^2, & |x| < \frac{1}{n}, \end{cases} \tag{4}$$

konverguje ve smyslu distribucí k distribuci $T_{\text{p.v.}\,\frac{1}{x^2}}$ neboli $S_{\text{p.v.}\,\frac{1}{x^2}}$, aneb ukažte, že platí

$$T_{f_n} \xrightarrow{\mathcal{D}'(\mathbb{R})} T_{\text{p.v.}\,\frac{1}{x^2}}, \tag{5}$$

kde T_{f_n} jsou regulární distribuce přiřazené standardní způsobem k funkcím f_n. Protože jste v předchozím bodě ukázali, že platí $S_{\text{p.v.}\,\frac{1}{x^2}} = T_{\text{p.v.}\,\frac{1}{x^2}}$, můžete samozřejmě dokazovat, že

$$T_{f_n} \xrightarrow{\mathcal{D}'(\mathbb{R})} S_{\text{p.v.}\,\frac{1}{x^2}}. \tag{6}$$

Vyberte si reprezentaci, ve které je důkaz pohodlnější/snažší.

d) Určete řád distribuce $T_{\text{p.v.}\,\frac{1}{x^2}}$ neboli $S_{\text{p.v.}\,\frac{1}{x^2}}$.

Řešení:

Korektnost definice je jasná, funkci $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ je definicí (2) skutečně přiřazeno reálné číslo. Vskutku

$$\begin{aligned}
\left\langle S_{\text{p.v.}\,\frac{1}{x^2}}, \varphi \right\rangle &= \int_{x=0}^{+\infty} \frac{\varphi(-x) - 2\varphi(0) + \varphi(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{x=0}^{\varepsilon} \frac{\varphi(-x) - 2\varphi(0) + \varphi(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x + \int_{x=\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(-x) - 2\varphi(0) + \varphi(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{x=0}^{\varepsilon} \frac{\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}x^2}(\xi)\Big|_{\xi\in(-\varepsilon,\varepsilon)} x^2 + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}x^2}(\zeta)\Big|_{\zeta\in(-\varepsilon,\varepsilon)} x^2}{x^2}\,\mathrm{d}x + \int_{x=\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(-x) - 2\varphi(0) + \varphi(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \left(\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}x^2}(\xi)\Big|_{\xi\in(-\varepsilon,\varepsilon)} + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}x^2}(\zeta)\Big|_{\zeta\in(-\varepsilon,\varepsilon)} \right)\varepsilon + \int_{x=\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(-x) - 2\varphi(0) + \varphi(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x,
\end{aligned} \tag{7}$$

kde jsme využili Taylorova rozvoje s Lagrangeovým tvarem zbytku, tedy tvrzení

$$\forall x \in (-\varepsilon,\varepsilon), \exists \xi \in (-\varepsilon,\varepsilon)\colon \varphi(x) = \varphi(0) + \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}(\rho)\Big|_{\rho=0} x + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}x^2}(\xi)\Big|_{\xi\in(-\varepsilon,\varepsilon)} x^2,$$

kde ξ vystupující v druhé derivaci je nějaký bod v intervalu $(-\varepsilon,\varepsilon)$. Z přechozího rozpisu je zjevné, že pro libovolnou testovací funkci φ je integrál v (2) dobře definován. (Singularita $\frac{1}{x^2}$ je potlačena přítomností výrazu $\varphi(-x) - 2\varphi(0) + \varphi(x)$ v čitateli, který pro malá x představuje aproximaci druhé derivace v nule—to je ostatně celá myšlenka za regularizací integrálu.)

Přiřazení (2) je zjevně lineární neboť

$$\left\langle S_{\mathrm{p.v.}\,\frac{1}{x^2}}, \alpha\varphi + \beta\psi \right\rangle = \int_{x=0}^{+\infty} \left(\alpha \frac{\varphi(-x) - 2\varphi(0) + \varphi(x)}{x^2} + \beta \frac{\psi(-x) - 2\psi(0) + \psi(x)}{x^2} \right) \mathrm{d}x \\ = \alpha \left\langle S_{\mathrm{p.v.}\,\frac{1}{x^2}}, \varphi \right\rangle + \beta \left\langle S_{\mathrm{p.v.}\,\frac{1}{x^2}}, \psi \right\rangle$$

platí pro každou dvojici $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ a libovolná reálná čísla $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Abychom ukázali spojitost, je nutné ukázat, že pro každou posloupnost funkcí $\{\varphi_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$ konvergující k nule $\varphi_k \to 0$ ve smyslu $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ platí

$$\left\langle S_{\mathrm{p.v.}\,\frac{1}{x^2}}, \varphi_k \right\rangle \to 0,$$

což po rozepsání znamená, že chceme ukázat

$$\lim_{k\to+\infty} \left\langle S_{\mathrm{p.v.}\,\frac{1}{x^2}}, \varphi_k \right\rangle = \lim_{k\to+\infty} \int_{x=0}^{+\infty} \frac{\varphi_k(-x) - 2\varphi_k(0) + \varphi_k(x)}{x^2} \,\mathrm{d}x = 0. \tag{8}$$

Protože je $\varphi_k \to 0$ ve smyslu konvergence v $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, tak víme, že existuje kompaktní množina $K \subset \mathbb{R}$, taková, že pro každou funkci φ_k platí $\operatorname{supp} \varphi_k \subset K$ a dále, že také platí $\varphi_k \rightrightarrows 0$ na množině K. (Stejnoměrná konvergence.) Rovněž pro libovolnou derivaci $l \in N$ platí $\frac{\mathrm{d}^l \varphi_k}{\mathrm{d}x^l} \rightrightarrows 0$ na množině K. Důkaz požadovaného tvrzení (8) je jednoduchý, stačí použít rozpis (7). Jest

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to+\infty} \left\langle S_{\mathrm{p.v.}\,\frac{1}{x^2}}, \varphi_k \right\rangle &= \lim_{k\to+\infty} \int_{x=0}^{+\infty} \frac{\varphi_k(-x) - 2\varphi_k(0) + \varphi_k(x)}{x^2} \,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{k\to+\infty} \left(\left(\frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}^2\varphi_k}{\mathrm{d}x^2}(\xi) \bigg|_{\xi\in(-\varepsilon,\varepsilon)} + \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}^2\varphi_k}{\mathrm{d}x^2}(\zeta) \bigg|_{\zeta\in(-\varepsilon,\varepsilon)} \right) \varepsilon + \int_{x=\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi_k(-x) - 2\varphi_k(0) + \varphi_k(x)}{x^2} \,\mathrm{d}x \right) \\
&= \lim_{k\to+\infty} \left(\frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}^2\varphi_k}{\mathrm{d}x^2}(\xi) \bigg|_{\xi\in(-\varepsilon,\varepsilon)} + \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}^2\varphi_k}{\mathrm{d}x^2}(\zeta) \bigg|_{\zeta\in(-\varepsilon,\varepsilon)} \right) \varepsilon + \int_{x=\varepsilon}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \lim_{k\to+\infty} \left(\varphi_k(-x) - 2\varphi_k(0) + \varphi_k(x) \right) \mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

kde jsme využili stejnoměrné konvergence φ_k a skutečnost, že nosiče funkcí φ_k patří do nějaké kompaktní množiny K. Druhé derivace funkcí φ_k a funkční hodnoty φ_k ovšem stejnoměrně konvergují k nule, a proto z přednozího dostaneme

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{x=0}^{+\infty} \frac{\varphi_k(-x) - 2\varphi_k(0) + \varphi_k(x)}{x^2} \,\mathrm{d}x = 0$$

a tvrzení o spojitosti je dokázáno.

Abychom ukázali, že platí $S_{\mathrm{p.v.}\,\frac{1}{x^2}} = T_{\mathrm{p.v.}\,\frac{1}{x^2}}$, musíme ukázat, že pro každou funkci $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ platí

$$\left\langle S_{\mathrm{p.v.}\,\frac{1}{x^2}}, \varphi \right\rangle = \left\langle T_{\mathrm{p.v.}\,\frac{1}{x^2}}, \varphi \right\rangle, \tag{9}$$

což po rozepsání znamená, že musíme ukázat, že pro každou funkci $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ platí

$$\int_{x=0}^{+\infty} \frac{\varphi(-x) - 2\varphi(0) + \varphi(x)}{x^2} \,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to0+} \left(\int_{x=-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} \,\mathrm{d}x + \int_{x=\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2} \,\mathrm{d}x - \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon} \right).$$

Začneme upravovat pravou stranu, přičemž si opět hlídáme singularitu v nule. Nejprve provedeme jednoduchou substituci v prvním integrálu, a pak oba integrály sloučíme

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to0+} \left(\int_{x=-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} \,\mathrm{d}x + \int_{x=\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2} \,\mathrm{d}x - \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon} \right) &= \begin{vmatrix} y = -x \\ \mathrm{d}y = -\mathrm{d}x \end{vmatrix} \\
= \lim_{\varepsilon\to0+} \left(-\int_{y=+\infty}^{\varepsilon} \frac{\varphi(-y)}{y^2} \,\mathrm{d}y + \int_{x=\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2} \,\mathrm{d}x - \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon} \right) &= \lim_{\varepsilon\to0+} \left(\int_{x=\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(-x) + \varphi(x)}{x^2} \,\mathrm{d}x - \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon} \right).
\end{aligned}$$

Nyní si přidáme a odečteme člen, který chceme vidět v integrandu,

$$\lim_{\varepsilon\to0+} \left(\int_{x=\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(-x) + \varphi(x)}{x^2} \,\mathrm{d}x - \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon} \right) = \lim_{\varepsilon\to0+} \left(\int_{x=\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(-x) - 2\varphi(0) + \varphi(x)}{x^2} \,\mathrm{d}x + \int_{x=\varepsilon}^{+\infty} \frac{2\varphi(0)}{x^2} \,\mathrm{d}x - \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon} \right).$$

V prvním integrálu můžeme bez obav přejít k limitě neboť singularita $\frac{1}{x^2}$ je zahlazena přítomností výrazu $\varphi(-x) - 2\varphi(0) + \varphi(x)$ viz výše; druhý integrál spočteme explicitně a výsledkem je

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \left(\int_{x=\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(-x) - 2\varphi(0) + \varphi(x)}{x^2} \, \mathrm{d}x + \int_{x=\varepsilon}^{+\infty} \frac{2\varphi(0)}{x^2} \, \mathrm{d}x - \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon} \right)$$
$$= \int_{x=0}^{+\infty} \frac{\varphi(-x) - 2\varphi(0) + \varphi(x)}{x^2} \, \mathrm{d}x + \lim_{\varepsilon \to 0+} \left(- \left[\frac{2\varphi(0)}{x} \right]_{x=\varepsilon}^{+\infty} - \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon} \right)$$
$$= \int_{x=0}^{+\infty} \frac{\varphi(-x) - 2\varphi(0) + \varphi(x)}{x^2} \, \mathrm{d}x + \lim_{\varepsilon \to 0+} \left(\frac{2\varphi(0)}{\varepsilon} - \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon} \right) = \int_{x=0}^{+\infty} \frac{\varphi(-x) - 2\varphi(0) + \varphi(x)}{x^2} \, \mathrm{d}x,$$

což jsme ovšem chtěli dokázat.

Zkoumejme nyní konvergenci dané posloupnosti funkcí. Konvergence ve smyslu distribucí

$$T_{f_n} \xrightarrow{\mathcal{D}'(\mathbb{R})} T_{\mathrm{p.v.}\, \frac{1}{x^2}}$$

dle definice znamená, že pro každou testovací funkci $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ platí

$$\langle T_{f_n}, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}), \mathcal{D}(\mathbb{R})} \to \left\langle T_{\mathrm{p.v.}\, \frac{1}{x^2}}, \varphi \right\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}), \mathcal{D}(\mathbb{R})},$$

kde konvergence je nyní standardní kovergence posloupnosti reálných čísel. Využijeme standardního ztotožnění distribucí a lokálně integrovatelných funkcí a přepíšeme si explicitně předpis pro $\langle T_{f_n}, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}), \mathcal{D}(\mathbb{R})}$, jest

$$\langle T_{f_n}, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}), \mathcal{D}(\mathbb{R})} = \int_{x=-\infty}^{+\infty} f_n(x) \varphi(x) \, \mathrm{d}x = \int_{x=-\infty}^{-\frac{1}{n}} \frac{1}{x^2} \varphi(x) \, \mathrm{d}x - \int_{x=-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} n^2 \varphi(x) \, \mathrm{d}x + \int_{x=\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \varphi(x) \, \mathrm{d}x. \tag{10}$$

Cílem je nyní upravit výraz na pravé straně tak, abychom při limitním přechodu $n \to +\infty$ získali

$$\left\langle T_{\mathrm{p.v.}\, \frac{1}{x^2}}, \varphi \right\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}), \mathcal{D}(\mathbb{R})} = \lim_{\varepsilon \to 0+} \left(\int_{x=-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} \, \mathrm{d}x + \int_{x=\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2} \, \mathrm{d}x - \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon} \right).$$

Jest

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\int_{x=-\infty}^{-\frac{1}{n}} \frac{1}{x^2} \varphi(x) \, \mathrm{d}x - \int_{x=-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} n^2 \varphi(x) \, \mathrm{d}x + \int_{x=\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \varphi(x) \, \mathrm{d}x \right)$$
$$= \lim_{\epsilon \to 0+} \left(\int_{x=-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{x^2} \varphi(x) \, \mathrm{d}x - \int_{x=-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon^2} \varphi(x) \, \mathrm{d}x + \int_{x=\varepsilon}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \varphi(x) \, \mathrm{d}x \right),$$

přičemž rovnost je ospravedlněna kupříkladu použitím Heieneho věty o souvislosti limit posloupností a limity funkcí. První a poslední člen chceme vidět, zbývá upravit prostřední člen. Zopakujeme postup, který jsme už v dosavadním rozjímání použili několikrát

$$\int_{x=-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon^2} \varphi(x) \, \mathrm{d}x = \int_{x=0}^{\varepsilon} \frac{\varphi(-x) + \varphi(x)}{\varepsilon^2} \, \mathrm{d}x$$
$$= \int_{x=0}^{\varepsilon} \frac{\varphi(-x) - 2\varphi(0) + \varphi(x)}{\varepsilon^2} \, \mathrm{d}x + \int_{x=0}^{\varepsilon} \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon^2} \, \mathrm{d}x = \int_{x=0}^{\varepsilon} \frac{\varphi(-x) - 2\varphi(0) + \varphi(x)}{\varepsilon^2} \, \mathrm{d}x + \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon}.$$

Integrál na pravé straně je v limitě $\varepsilon \to 0+$ nulový, viz rozpis (7). (Případně jsme mohli rovnou přímočaře použít první větu o střední hodnotě v integrálním počtu. Pozor ovšem na částečné dosazení v limitním přechodu!) Celkem tedy dostaneme

$$\lim_{n \to +\infty} \langle T_{f_n}, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}), \mathcal{D}(\mathbb{R})} = \lim_{\epsilon \to 0+} \left(\int_{x=-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{x^2} \varphi(x) \, \mathrm{d}x - \int_{x=-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon^2} \varphi(x) \, \mathrm{d}x + \int_{x=\varepsilon}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \varphi(x) \, \mathrm{d}x \right)$$
$$= \lim_{\epsilon \to 0+} \left(\int_{x=-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{x^2} \varphi(x) \, \mathrm{d}x + \int_{x=\varepsilon}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \varphi(x) \, \mathrm{d}x - \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon} \right) = \left\langle T_{\mathrm{p.v.}\, \frac{1}{x^2}}, \varphi \right\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}), \mathcal{D}(\mathbb{R})},$$

což jsme chtěli ukázat.

[10] 4. Pro $x \in \mathbb{R}$ řešte na prostoru regulárních distribucí rovnici

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} - 5\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + 6f = a\delta(x-0),$$

kde $\delta(x-y)$ značí Diracovu distribuci v bodě y a $a \in \mathbb{R}^+$ je parametr, a kde vyžadujeme $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.

Řešení:

Rovnici přepíšeme jako systém rovnic prvního řádu, je-li

$$g = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x},$$

pak původní rovnice přejde na

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} + \delta\begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix},$$

což lze symbolicky zapsat jako

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}x} = \mathbb{A}\mathbf{y} + \delta\mathbf{b},$$

kde

$$\mathbf{y} =_{\mathrm{def}} \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}, \qquad \mathbb{A} =_{\mathrm{def}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix}.$$

Řešení úlohy budeme hledat ve tvaru

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_+ H + \mathbf{y}_-(1-H),$$

kde H značí Heavisideovu distribuci, která je definována jako regulární distribuce přiřazená lokálně integrovatelné funkci

$$H = \begin{cases} 1 & x \geq 0, \\ 0 & x < 0, \end{cases}$$

a kde $\mathbf{y}_\pm$ jsou hladké funkce. Dosadíme-li takto definovanou funkci do diferenciální rovnice $\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}x} = \mathbb{A}\mathbf{y} + \delta\mathbf{b}$, dostaneme s použitím vztahu $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\delta}$ a s použitím pravidel pro práci s distribucemi rovnici

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}_-}{\mathrm{d}x} - \mathbb{A}\mathbf{y}_-\right)(1-H) + \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}_+}{\mathrm{d}x} - \mathbb{A}\mathbf{y}_+\right)H + (-\mathbf{y}_- + \mathbf{y}_+ - \mathbf{b})\,\delta = \mathbf{0}.$$

Z této rovnice vidíme, že musí platit

$$\begin{aligned} x < 0: &\quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{y}_-}{\mathrm{d}x} = \mathbb{A}\mathbf{y}_-, \\ x > 0: &\quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{y}_+}{\mathrm{d}x} = \mathbb{A}\mathbf{y}_+, \end{aligned}$$

a také

$$-\lim_{x\to 0-}\mathbf{y}_- + \lim_{x\to 0+}\mathbf{y}_+ - \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

Řešením rovnic jsou funkce

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}_\pm}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{\mathbb{A}x}\mathbf{C}_\pm,$$

kde $\mathbf{C}_\pm$ je konstatní vektor. Maticovou exponenciálu nemusíme explicitně počítat, stačí si uvědomit, že diferenciální rovnici prvního řádu $\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}_-}{\mathrm{d}x} = \mathbb{A}\mathbf{y}_-$, lze zapsat jako diferenciální rovnici druhého řádu

$$\frac{\mathrm{d}^2 f_-}{\mathrm{d}x^2} - 5\frac{\mathrm{d}f_-}{\mathrm{d}x} + 6f_- = 0,$$

kde

$$\mathbf{y}_- = \begin{bmatrix} f_- \\ g_- \end{bmatrix}.$$

Rovnici pro f_- snadno vyřešíme, výsledkem je

$$f_- = A_-\mathrm{e}^{3x} + B_-\mathrm{e}^{2x},$$

kde A_- a B_- jsou konstanty, které musíme určit z okrajových podmínek. Chceme aby platilo

$$\lim_{x\to\pm\infty} f = 0,$$

což znamená, že požadujeme $\lim_{x \to -\infty} f_- = 0$. Tato podmínka ovšem zjevně neklade žádné omezení na hodnoty konstant A_- a B_-. Řešením je tedy funkce

$$f_- = A_- e^{3x} + B_- e^{2x},$$

což znamená, že

$$\mathbf{y}_- = \begin{bmatrix} A_- e^{3x} + B_- e^{2x} \\ 3A_- e^{3x} + 2B_- e^{2x} \end{bmatrix} = A_- e^{3x} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + B_- e^{2x} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(Připomeňme-si, že druhá složka vektoru $\mathbf{y}_-$ je definována jako $\frac{df_-}{dx}$.) Obdobně postupujeme i pro funkci $\mathbf{y}_+$. Diferenciální rovnici prvního řádu $\frac{d\mathbf{y}_+}{dx} = \mathbb{A}\mathbf{y}_+$, lze zapsat jako diferenciální rovnici druhého řádu

$$\frac{d^2 f_+}{dx^2} - 5\frac{df_+}{dx} + 6f_+ = 0,$$

kde

$$\mathbf{y}_+ = \begin{bmatrix} f_+ \\ g_+ \end{bmatrix}.$$

Rovnici pro f_+ snadno vyřešíme, výsledkem je

$$f_+ = A_+ e^{3x} + B_+ e^{2x},$$

kde A_+ a B_+ jsou konstanty, které musíme určit z okrajových podmínek. Chceme aby platilo

$$\lim_{x \to \pm\infty} f = 0,$$

což znamená, že požadujeme $\lim_{x \to +\infty} f_+ = 0$, odkud plyne, že $A_+ = B_+ = 0$. Řešením je tedy funkce

$$f_+ = 0,$$

což znamená, že

$$\mathbf{y}_+ = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Doposud jsme zjistili, že platí

$$\mathbf{y}_- = A_- e^{3x} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + B_- e^{2x} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{y}_+ = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Zbývá určit hodnotu konstant A_- a B_-. K tomu použijeme skokovou podmínku

$$-\lim_{x \to 0-} \mathbf{y}_- + \lim_{x \to 0+} \mathbf{y}_+ + \mathbf{b} = \mathbf{0},$$

která vede na soutavu rovnic

$$-A_- \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} - B_- \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

pro A_- a B_-. Řešením je

$$\begin{aligned} A_- &= -a \\ B_+ &= a, \end{aligned}$$

a řešením zadané rovnice je tudíž regulární distribuce přiřazená funkci

$$f = \begin{cases} -a e^{3x} + a e^{2x}, & x < 0 \\ 0, & x \geq 0. \end{cases}$$

Úlohu lze také vyřešit s použitím Fourierovy transformace. Použijeme Fourierovu transfroamci definovanou vztahem

$$\mathcal{F}[f](\boldsymbol{\xi}) =_{\text{def}} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{x} \bullet \boldsymbol{\xi}} \, d\mathbf{x},$$

kde d je dimenze prostoru, na kterém pracujeme. S použitím standardních pravidel pro práci s Fourierovou transformací zjistíme, že Fourierova transformace rovnice je

$$\mathcal{F}[f] \left(-\xi^2 + 5i\xi + 6 \right) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}},$$

kde jsme také využili známého vztahu pro Fourierovu transformaci Diracovy distribuce. Platí tedy

$$\mathcal{F}[f] = \frac{a}{\sqrt{2\pi}\left(-\xi^2 + 5\mathrm{i}\xi + 6\right)},$$

odkud

$$f = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{a}{\sqrt{2\pi}\left(-\xi^2 + 5\mathrm{i}\xi + 6\right)}\right].$$

Zbývá tedy spočíst inverzní Fourierovu transformaci. Platí $\left(-\xi^2 + 5\mathrm{i}\xi + 6\right) = -\left(\xi - 2\mathrm{i}\right)\left(\xi - 3\mathrm{i}\right)$ a proto

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{a}{\sqrt{2\pi}\left(-\xi^2 - \mathrm{i}\xi - 6\right)}\right] = -\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{\left(\xi - 2\mathrm{i}\right)\left(\xi - 3\mathrm{i}\right)}\right].$$

Inverzní Fourierova transformace je dle definice

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{\left(\xi - 2\mathrm{i}\right)\left(\xi - 3\mathrm{i}\right)}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\xi=-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}}{\left(\xi - 2\mathrm{i}\right)\left(\xi - 3\mathrm{i}\right)}\,\mathrm{d}\xi,$$

a pro výpočet integrálu použijeme nástroje z komplexní analýzy. Budeme zkoumat integrál z komplexní funkce

$$g(z) =_{\mathrm{def}} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xz}}{\left(\xi - 2\mathrm{i}\right)\left(\xi - 3\mathrm{i}\right)},$$

podél křivky $\boldsymbol{\gamma}_R$, kterou je kruhový oblouk o poloměru R v horní/dolní komplexní polorovině. Parametrizace oblouku v horní polorovině je $z = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, $\varphi \in (0, \pi)$, parametrizace úsečky na reálné ose je $z = \xi$, $\xi \in (-R, R)$. Pro danou parametrizaci tedy platí

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}_R} g(z)\mathrm{d}z = \int_{\xi=-R}^{R}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}}{\left(\xi - 2\mathrm{i}\right)\left(\xi - 3\mathrm{i}\right)}\,\mathrm{d}\xi + \int_{\varphi=0}^{\pi}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xR\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}}{\left(\xi - 2\mathrm{i}\right)\left(\xi - 3\mathrm{i}\right)}\mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\,\mathrm{d}\varphi.$$

Jelikož je $\varphi \in (0, \pi)$ vidíme, že výraz

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xR\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xR\cos\varphi}\mathrm{e}^{xR\sin\varphi}$$

zůstává pro $R \to +\infty$ omezený pro $x < 0$. Přes kruhový oblouk v horní komplexní polorovině lze tedy integrovat pouze pro $x < 0$. Naopak, pro $x > 0$ musíme zvolit integraci přes kruhový oblouk v dolní komplexní polorovině. Zabývejeme se nyní případem $x < 0$. S použitím Jordanova lemmatu snadno ukážeme, že

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\boldsymbol{\gamma}_R} g(z)\mathrm{d}z = \int_{\xi=-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}}{\left(\xi - 2\mathrm{i}\right)\left(\xi - 3\mathrm{i}\right)}\,\mathrm{d}\xi.$$

Podle reziduové věty ovšem platí, že

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\boldsymbol{\gamma}_R} g(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{res}_{z_s\in\mathrm{int}\boldsymbol{\gamma}_R}\, g(z).$$

V horní polorovině má funkce $g(z)$ dvě singularity, a sice v bodech $z_{s_1} = 2\mathrm{i}$ a $z_{s_2} = 3\mathrm{i}$, přičemž obě singularity jsou jednonásobnými póly. Residua v bodech $z_{s_1} = 2\mathrm{i}$ a $z_{s_2} = 3\mathrm{i}$ jsou

$$\mathrm{res}_{2\mathrm{i}}\, g(z) = \mathrm{res}_{2\mathrm{i}}\,\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xz}}{\left(\xi - 2\mathrm{i}\right)\left(\xi - 3\mathrm{i}\right)} = \left.\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}zx}}{2z - 5\mathrm{i}}\right|_{z=2\mathrm{i}} = \mathrm{i}\mathrm{e}^{2x},$$

$$\mathrm{res}_{3\mathrm{i}}\, g(z) = \mathrm{res}_{3\mathrm{i}}\,\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xz}}{\left(\xi - 2\mathrm{i}\right)\left(\xi - 3\mathrm{i}\right)} = \left.\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}zx}}{2z - 5\mathrm{i}}\right|_{z=3\mathrm{i}} = -\mathrm{i}\mathrm{e}^{3x},$$

a proto pro $x < 0$ platí

$$\int_{\xi=-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}}{\left(\xi - 2\mathrm{i}\right)\left(\xi - 3\mathrm{i}\right)}\,\mathrm{d}\xi = 2\pi\left(-\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{3x}\right).$$

Pro $x > 0$ integrujeme přes kruhový oblouk $\boldsymbol{\gamma}_R$ v dolní komplexní polorovině, kde však funkce $g(z)$ nemá singularity. Z reziduové věty a Jordanova lemmatu tedy pro $x > 0$ plyne

$$0 = \lim_{R\to+\infty}\int_{\boldsymbol{\gamma}_R} g(z)\mathrm{d}z = -\int_{\xi=-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}}{\left(\xi - 2\mathrm{i}\right)\left(\xi - 3\mathrm{i}\right)}\,\mathrm{d}\xi.$$

Celkem tedy

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{\left(\xi - 2\mathrm{i}\right)\left(\xi - 3\mathrm{i}\right)}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\xi=-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}}{\left(\xi - 2\mathrm{i}\right)\left(\xi - 3\mathrm{i}\right)}\,\mathrm{d}\xi = \begin{cases}\sqrt{2\pi}\left(-\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{3x}\right), & x < 0,\\ 0, & x \geq 0.\end{cases}$$

Pro hledanou funkci f proto dostaneme

$$f = -\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{(\xi - 2\mathrm{i})\,(\xi - 3\mathrm{i})}\right] = \begin{cases} a\left(\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{3x}\right), & x < 0, \\ 0, & x \geq 0, \end{cases}$$

což je kupodivu tentýž výsledek, jakého jsme dosáhli s použitím prvně studovaného postupu.