ÚVOD DO VARIAČNÍHO POČTU

Klasická (reálná) analýza (real analysis, differential calculus – diferenciální počet)

- zkoumá vlastnosti (reálných) **funkcí**
- objekt studia $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ $d \geq 1$ FUNKCE
  $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$
  $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^s$
- mimojiné zkoumá **extrémy funkcí** (lokální minima/max.)

Víme z 1. roč.:

(1) Je-li $f \in C(K)$, $K \subset \mathbb{R}^d$ kompaktní, pak f nabývá v K minimum/maximum

(2) Je-li $f: U(x_0) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
f má v x_0 extrém
a $f'(x_0)$ existuje
} pak $f'(x_0) = 0$

(3) Je-li $f: U(x_0) \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $d > 1$,
f má v x_0 extrém,
$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ existují pro $i = 1, \dots, d$
} pak $\nabla f(x_0) = 0$

$\partial_{\vec{v}} f(\vec{x}_0) = 0$

$\forall\, |\vec{v}| = 1$

Derivace f v $\vec{x}_0$ ve směru $\vec{v}$, $\partial_{\vec{v}} f(\vec{x}_0)$,
(směrová derivace f v x_0)
definovaná vztahem

$$\partial_{\vec{v}} f(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{x}_0 + t\vec{v}) - f(\vec{x}_0)}{t}$$

je koncept, který bude vhodný pro derivování v prostorech ∞-dimenze, tedy ve variačním počtu.

$\boxed{\text{Variační počet}}$ Calculus of variations

kritické body

- zkoumá minima/maxima neboli $\boxed{\text{extremály funkcionálů}}$
- objekt studia $\boxed{\text{funkcionál}}$ zobrazení z normovaného prostoru funkcí do $\mathbb{R}$

$$\mathcal{L} : \left(X, \|\cdot\|_X\right) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$\boxed{\text{Příklady prostorů } X}$

- $C(\langle a,b\rangle)$, $C^k(\langle a,b\rangle)$, ..., $C(\Omega)$, $C^k(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$
- $L^2((a,b))$, $L^p((a,b))$ Lebesgueovy prostory
- $W^{1,2}((a,b))$, $W^{k,p}((a,b))$ Sobolevovy prostory

Příklady funkcionálů a úloh variačního počtu

(1) Buď $\vec{\gamma} : [0,T] \to \mathbb{R}^s$ (křivka, trajektorie, pohyb, funkce)

geometr, fyzik, inženýr, matematik

(Funkcionál) $\boxed{\text{délka křivky}}$

$$\mathcal{L}[\vec{\gamma}] := \int_0^T \sqrt{\sum_{i=1}^{s} [\gamma_i'(t)]^2}\, dt$$

Speciálně $(s=2)$

- $\vec{\gamma}(\varphi) = (r(\varphi)\cos\varphi,\ r(\varphi)\sin\varphi)$ zobecněné polární souřadnice

$\varphi \in \langle \alpha, \beta \rangle$

$$\mathcal{L}[\vec{\gamma}] = \mathcal{L}[r] = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi) + [r'(\varphi)]^2}\, d\varphi$$

- Křivka daná grafem funkce $\langle \vec{\gamma} \rangle = \{(x, y(x));\ x \in (a,b)\}$

$$\mathcal{L}[\vec{\gamma}] = \boxed{\mathcal{L}[y] = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx}$$

Uvažujme na chvíli jen tento funkcionál $\uparrow$.
Zformulujme tři minimalizační úlohy.

$$\boxed{(R)\int_a^b f(x)\,dx \text{ existuje}}$$

$$\Updownarrow$$

DOLNÍ Riemannův $\int$ existuje & HORNÍ Riemannův $\int$ existuje

$$\sup_D \underbrace{s(D,f)} \qquad\qquad \inf_D S(D,f)$$

$$\uparrow \qquad\qquad\qquad \uparrow$$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\,(x_i - x_{i-1}) \qquad\qquad \sum_{i=1}^{N} M_i\,(x_i - x_{i-1})$$

$$\uparrow \qquad\qquad\qquad \uparrow$$

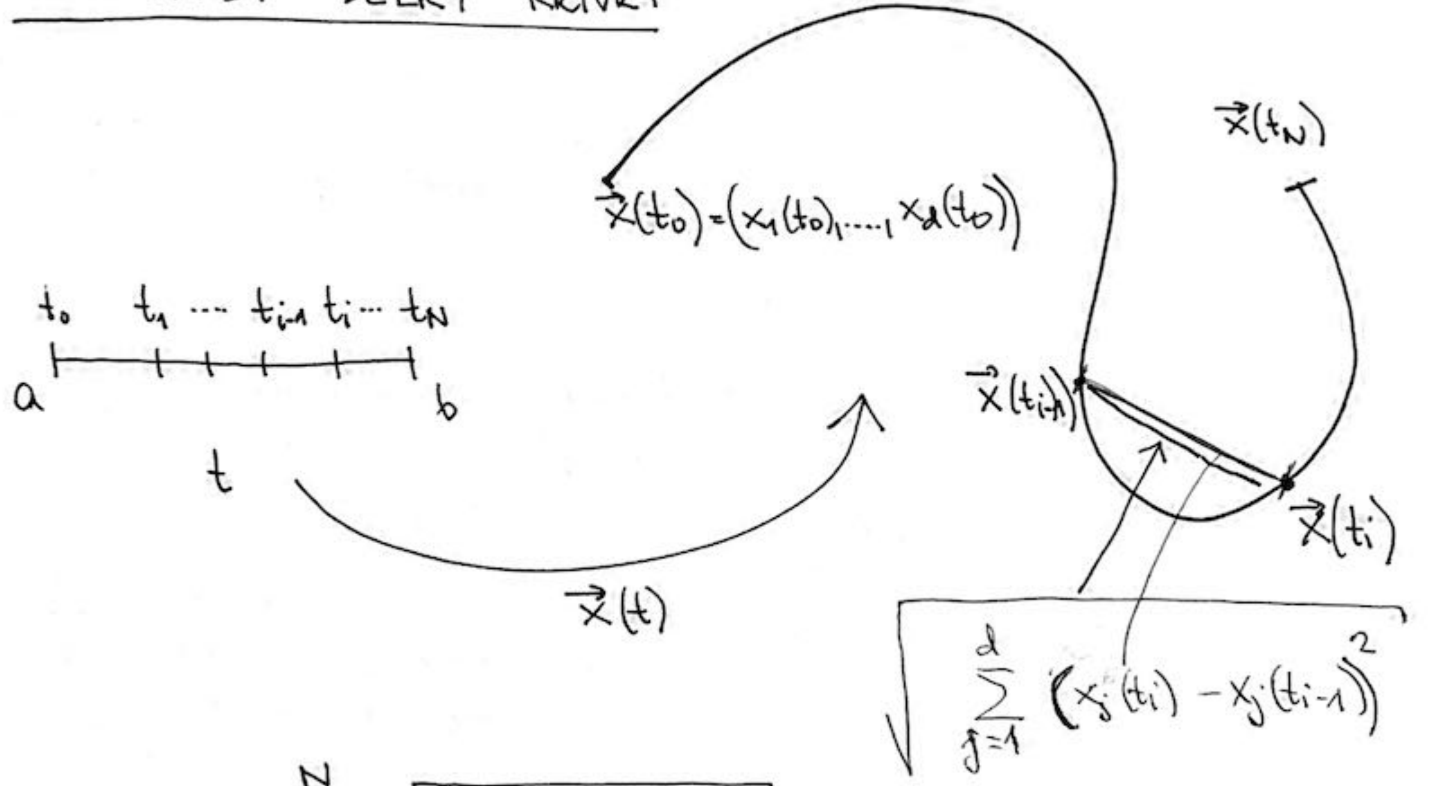
$$\inf_{x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle} f(x) \qquad\qquad \sup_{x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle} f(x)$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)\,(x_i - x_{i-1})}$$

approximace Riemannova integrálu

$$\boxed{(R)\int_a^b f(x)\,dx} \approx \boxed{\sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)\,(x_i - x_{i-1})}$$

FUNKCIONÁLY DÉLKY KŘIVKY



$$L[\vec{x}] \approx \sum_{i=1}^{N} \sqrt{\sum_{j=1}^{d} (x_j(t_i) - x_j(t_{i-1}))^2}$$

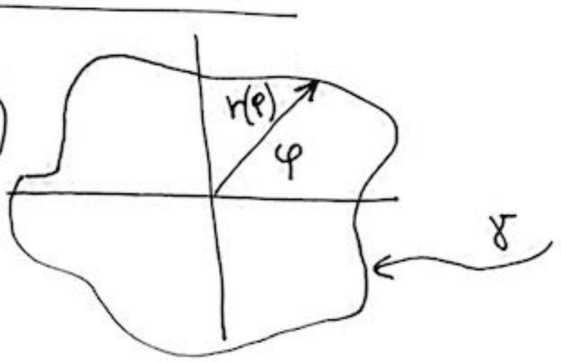
$$\overset{\text{LVOSH}}{=} \sum_{i=1}^{N} \sqrt{\sum_{j=1}^{d} \left(x_j'(\xi_j)\right)^2}\,(t_i - t_{i-1}) \approx \int_a^b \sqrt{\sum_{j=1}^{d} (x_j'(t))^2}\,dt$$

$$= \int_a^b \|\vec{x}'(t)\|_E\,dt$$

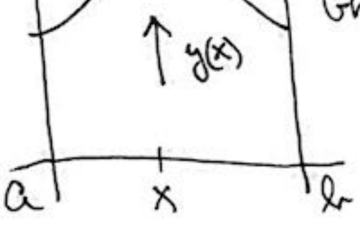
Speciálně

(i) $\varphi \in [a,b] \longmapsto (\overbrace{r(\varphi)\cos\varphi}^{x_1(\varphi)}, \overbrace{r(\varphi)\sin\varphi}^{x_2(\varphi)})$

$$\Rightarrow L[\gamma] = \int_a^b \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2}\,d\varphi$$



(ii)



Graf funkce

$x \in [a,b] \longmapsto [x, y(x)]$

$$L[y] = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx$$

Z

Tři úlohy (variačního počtu)

(i) Nalézt $\min\limits_{y\in X^1} \mathcal{L}[y]$, kde $X^1 = \{y \in C^1((a,b)) \cap C(\langle a,b\rangle);\ y(a)=A,\ y(b)=B\}$

Úloha: nalézt nejkratší křivku spojující dva body $[a,A]$ a $[b,B]$

(ii) Nalézt $\min\limits_{y\in X^2} \mathcal{L}[y]$ $\qquad X^2 = \{y \in Z;\ y(a)=A\}$

Úloha: nalézt křivku, která realizuje nejmenší vzdálenost $[a,A]$ od přímky procházející body $[b,0]$ a $[b,B]$, $B \neq 0$.

(iii) Nalézt $\min\limits_{y\in X^3} \mathcal{L}[y]$ $\qquad X^3 = \{y \in Z\}$

Úloha: nalézt křivku, která realizuje nejkratší vzdálenost mezi dvěma přímkami danými body $[a,0],[a,A]$ resp. $[b,0],[b,B]$.

$V[y] := \pi \int_a^b y^2(x)\,dx$

$P[y] := 2\pi \int_a^b y(x)\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx$

Funkcionály plochy, objemu rotačních těles ; „ $f \mapsto \int_a^b f(x)\,dx$ "

(2) Klasická teoretická mechanika. Jedním z důležitých principů je HAMILTONŮV PRINCIP NEJMENŠÍ AKCE:

pohyb $\left(\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))\right)$ Newtonova potenciálního systému daného rovnicemi

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{d\vec{x}}{dt}\right) + \frac{\partial U}{\partial \vec{x}} = 0 \iff \left(m\dot{\vec{x}}\right)^{\boldsymbol{\cdot}} + \frac{\partial U}{\partial \vec{x}} = \vec{0}$$

se shoduje s kritickými body (extremálami) funkcionálu

$$\Phi[\vec{x}] = \int_{t_0}^{t_1} L\left(t, \vec{x}, \frac{d\vec{x}}{dt}\right) dt, \text{ kde}$$

$$L(t, \vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t)) \overset{df}{=} T(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}}) - U(\vec{x})$$

③ Problém minimální plochy $u(x,y) : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$S[u] := \int_\Omega \sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}\, dx\,dy = \int_\Omega \sqrt{1+|\nabla u|^2}\, dx\,dy$$

$$\min_{\substack{u\in C^1(\Omega)\cap C(\bar\Omega) \\ u|_{\partial\Omega} = u_0}} S[u]$$

u_0 je daná funkce na hranici „bublifuk".

④

Úloha: nalézt maximální plochu, kterou lze „uzavřít" provázkem dané délky, tj:

$$\max_{\substack{y\in X \\ \& \\ \mathcal{L}[y]=l>0}} \mathcal{S}[y]$$

$l>0$ dáno

$\boxed{\text{Úlohy ①}}$ zapadají do obecnější úlohy: nalézt $y\in X$ tak, že y je extremála (kritický bod) funkcionálu

$$\Phi[y] = \int_a^b L(x, y(x), y'(x))\, dx$$

$$L : (a,b)\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

$\boxed{\text{Úlohy ②}}$ jsou úlohy typu: nalézt $\vec{y}\in X^s$ (tzn. $y_i\in X$, $i=1,\dots,s$) tak, že $\vec{y}$ je extremála funkcionálu

$$\phi[\vec{y}] = \int_{t_1}^{t_2} L(t, \vec{y}(t), \dot{\vec{y}}(t))\, dt$$

$$L : (t_1,t_2)\times\mathbb{R}^s\times\mathbb{R}^s\to\mathbb{R}$$

$\boxed{\text{Úloha ③}}$ patří mezi úlohy: nalézt $u\in X$ tak, že u je extremála

$$\Psi[u] = \int_\Omega L(x, u(x), \nabla u(x))\, dx$$

$$L: \Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d, \quad \Omega\subset\mathbb{R}^d.$$

$\boxed{\text{Úloha ④}}$ je úloha typu ① s podmínkou, že jiný funkcionál $\Xi[y]=0$ (omezení). vazba

$\boxed{\text{Teorie}}$

Buď $(X, \|\cdot\|_X)$ lineární (vektorový) ~~po~~ prostor, který je normovaný a úplný $\equiv$ X je Banachův

┌ • $\dim X$, kde X je prostor funkcí, je nekonečná.

• $C^\infty(\langle a,b\rangle) \subset C^2(\langle a,b\rangle) \subset C(\langle a,b\rangle)$ a C^∞ obsahuje polynomy libovolného stupně $\{1, x, x^2, \dots, x^k \dots\}$ $\Rightarrow$ dimenze těchto prostorů je ∞. ┘

Def. Řekneme, že ϕ nabývá v x_0 lokální $\left\{\begin{matrix}\text{maximum}\\ \text{minimum}\end{matrix}\right\}$

$$\stackrel{df}{\equiv} \exists\, U_\delta(x_0) := \{x \in X;\ \|x - x_0\|_X < \delta\} \text{ tak, že } \phi(x_0) \left\{\begin{matrix}\geq\\ \leq\end{matrix}\right\} \phi(x) \quad \forall x \in U_\delta(x_0).$$

Řekneme, že ϕ nabývá v x_0 ostré lokální $\left\{\begin{matrix}\text{maximum}\\ \text{minimum}\end{matrix}\right\}$

$$\stackrel{df}{\equiv} \exists\, U_\delta(x_0) \text{ tak, že } \phi(x_0) \left\{\begin{matrix}>\\ <\end{matrix}\right\} \phi(x) \text{ pro všechno } x \in P_\delta(x_0)$$

$$P_\delta(x_0) := \{x \in X;\ 0 < \|x - x_0\|_X < \delta\}$$

Def. Řekneme, že $\phi : X \to \mathbb{R}$ má v x_0 derivaci Gateaux ve směru $h \in X$ (neboli ϕ je v x_0 Gateauxovsky diferencovatelná v $h \in X$) pokud existuje

$$\lim_{t\to 0} \frac{\phi[x_0 + th] - \phi[x_0]}{t}.$$ Tuto limitu značíme $\delta\phi[x_0](h)$.

┌ Pozorujeme, že pro $g(t) := \phi(x_0 + th)$ lze $\delta\phi[x_0](h)$ zapsat ekvivalentně ve tvaru

$$\delta\phi[x_0](h) = \lim \frac{g(t) - g(0)}{t} = g'(0) = \frac{d}{dt} g(t)\Big|_{t=0}$$

Tedy derivování v X ∞-dimenze je redukováno na derivování funkce jedné reálné proměnné.

<u>Věta 1</u> (Nutná podmínka existence extremály)

Nechť $\Phi : X \to \mathbb{R}$ má v x_0 extremálu a nechť $\delta\Phi[x_0](h)$ existuje pro každé $h \in X$.

Pak
$$\boxed{\delta\Phi[x_0](h) = 0 \qquad \forall h \in X}$$

(Dk) Buď $h \in X$ libovolné, ale pevné. Zadefinujme fci $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jako výše, tedy

$$g(t) := \Phi(x_0 + th)$$

[Všimněme si, že $x_0 + th \in X$ díky linearity prostoru X]

Pak z předpokladů plyne, že

- g má v 0 extrém
- $g'(0)$ existuje.

Tedy dle věty z 1. roč. (nutná podmínka existence extrému fce reálné proměnné) je však $g'(0) = 0$, což však znamená, že

$$\delta\Phi[x_0](h) = 0.$$

Protože h bylo zvoleno libovolně, tvrzení je dokázáno. ▨

$\longrightarrow \quad L(\cdot,\cdot,\cdot) = \sqrt{1+(y')^2}$

$\longrightarrow \quad L = y^2(x)$

$T[y] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{b-y}}$

$L = x\,y'^2(x)$

Uvažujme dále

$$\Phi[y] := \int_a^b L(x, y(x), y'(x))\,dx$$

a řešme úlohu variačního počtu:

$$\boxed{\text{Nalézt } y_{min} \in X^i \text{ tak, že } \Phi[y_{min}] = \min_{y \in X^i} \Phi[y]}$$

$i = 1, 2, 3$

kde pro $Z = \underbrace{C^1((a,b)) \cap C(\langle a,b\rangle)}_{C^1(\langle a,b\rangle)}$:

$$X^1 = \{z \in Z;\ z(a) = A,\ z(b) = B\} \longleftarrow$$

$$X^2 = \{z \in Z;\ z(a) = A\} \longleftarrow$$

$$X^3 = \{z \in Z\} = Z. \longleftarrow$$

Příklady

ⓐ Úlohy v Příkladu ① s funkcionálem délky křivky, kde

$$L(x, y, y') = \sqrt{1+(y')^2}$$

ⓑ V Příkladu ① také

$$L(\varphi, r, r') = \sqrt{r^2 + (r')^2}$$

ⓒ Úloha o brachystochroně

χρονος – čas

βραχιστος – nejkratší

Natáhnout drátek mezi dvěma body (např. [0,0] a [a,b], a,b > 0) tak, aby korálek navlečený na drátek v bodě [a,b] dorazil do počátku v nejkratším čase

Galileo Galilei (1637): otázka, zda lze najít natažení, po kterém korálek dostane do počátku rychleji než po "přímce" spojující [0,0] a [a,b].

Johann Bernoulli (1.1.1697) předložil vědecké komunitě výzvu formou následujícího oznámení:

„Já, Johann Bernoulli, si dovoluji pozdravit nejchytřejší matematiky z celého světa. Nic nemůže být přitažlivější inteligentním lidem než čestný, vyzývavý a podnětný problém, jehož řešení přinese věhlas a slávu a zůstane navždy trvalým monumentálním dílem.
Následujíce příklady položené Pascalem, Fermatem a jinými, doufám, že získám ocenění celé vědecké komunity tím, že před ty nejlepší matematiky naší doby položím problém, který prověří jejich metody a sílu jejich intelektu. Pokud mi někdo předloží řešení navrženého problému, veřejně ho prohlásím za hodna výtečného ocenění a chvály."

Minimalizovat $T[y]$ přes $\quad y \in C^1((0,a)) \cap C([0,a])$

$y(0)=0\,,\ y(a)=b$

kde

$$T[y] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a \sqrt{\frac{1+(y'(x))^2}{b-y(x)}}\, dx \qquad (\text{DÚ, cvičení})$$

Tedy

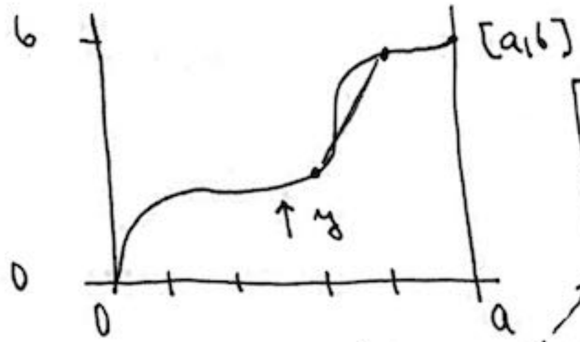
$$L(x,y,y') = \sqrt{\frac{1+(y')^2}{2g(b-y)}}$$

Úloha o brachystochroně je podobná jiné úloze z optiky:
V dokonale průhledném prostředí s proměnným indexem lomu jsou dány dva body A a B.
Cíl: určit trajektorii světelného paprsku jdoucího z A do B.
Fermatův princip říká, že ze všech křivek spojujících A a B je trajektorie světelného paprsku ta, po které dospěje světlo z A do B v nejkratším čase.

Úloha o brachistochroně

χρονος ... čas
βραχιστος .... nejkratší

Cíl: Natáhnout drátek mezi počátkem [0,0] a bodem [a,b] tak, aby korálek navlečený v bodě [a,b] na drátek se dostal do počátku v nejkratším čase.



Drátek popsán funkcí $y : [0,a] \to \mathbb{R}$
$y(0) = 0$, $y(a) = b$.

čas, délka, rychlost přiřazené intervalu (t_{i-1}, t_i).

$$T[y] \approx \sum_{i=1}^{N} t_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{s_i}{v_i}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \frac{\sqrt{\left(y(x_i) - y(x_{i-1})\right)^2 + \left(x_i - x_{i-1}\right)^2}}{v_i}$$

$$\overset{\text{LVOSH}}{=} \sum_{i=1}^{N} \frac{\sqrt{1 + \left(y'(\xi_i)\right)^2}}{v(\xi_i)} \left(x_i - x_{i-1}\right)$$

Předpokládáme, že platí, že SOUČET KINETICKÉ A POTENCIÁLNÍ ENERGIE SE ZACHOVÁVÁ:

$$\frac{1}{2} m v^2(\xi_i) + m g y(\xi_i) = m g b$$

$$\Downarrow$$

$$v(\xi_i) = \sqrt{2g\left(b - y(\xi_i)\right)}$$

Tedy

$$T[y] \approx \sum_{i=1}^{N} \frac{\sqrt{1 + \left(y'(\xi_i)\right)^2}}{\sqrt{2g}\sqrt{b - y(\xi_i)}} \left(x_i - x_{i-1}\right) \approx \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2g}} \frac{\sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}}{\sqrt{b - y(x)}}\, dx$$

$$T[y] = \int_a^b L\left(y(x), y'(x)\right) dx$$

Pro $\Phi[y] = \int_a^b L(x, y(x), y'(x))\,dx$ chceme spočítat $\delta\Phi[y](h)$ a nalézt charakterizaci (tj. ekvivalentní popis) podmínky $\delta\Phi[y](h) = 0$ pro $\forall h \in X$ z Věty 1.

Protože $\delta\Phi[y](h) = g'(0) = \frac{d}{dt} g(t)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\Phi[y+th]\Big|_{t=0}$, linearita prostoru X je nutná, aby $y+th$ pro t libovolné ležely v prostoru, kde hledám řešení. Zatímco prostor X^3 ze strany 7 je lineární, prostory X^1 a X^2 lineární obecně nejsou! (jen pro $A=B=0$)

Pro $i=1,2$ hledáme y ve tvaru $y_0 + \xi$, kde y_0 je nějaká (jednoduchá, hladká) funkce splňující $y_0(a) = A$ a $y_0(b) = B$ pro $i=1$ a $y_0(a) = A$ pro $i=2$.

Pro $i=1,2$ pak přepíšeme minimalizační úlohu do tvaru

nalézt $y_{min} \in X^i$ tak, že $\Phi[y_{min}] = \min_{\xi \in X_0^i} \Phi[y_0+\xi]$,

kde $X_0^1 = \{z \in Z;\ z(a) = z(b) = 0\}$

a $X_0^2 = \{z \in Z;\ z(a) = 0\}$.

Spočteme nyní pro libovolné $h \in X_0^i$ (pro $i=3$ $X_0^3 = X^3 = Z$)

$$\delta\Phi[y](h) = \delta\Phi[\overbrace{y_0+\xi}^{y}](h) = \frac{d}{dt}\Phi[y+th]\Big|_{t=0}$$

Máme

$$\delta\Phi[y](h) = \frac{d}{dt}\Phi[y+th]\Big|_{t=0}$$
$$= \frac{d}{dt}\int_a^b L(x, y(x)+th(x), y'(x)+th'(x))\,dx\Big|_{t=0}$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt}\left\{ L(x, y(x)+th(x), y'(x)+th'(x)) \right\} dx \Big|_{t=0}$$

$\frac{d}{dt}\int_a^b \dots dt \overset{?}{=} \int_a^b \frac{d}{dt} \dots dt$

záměna derivace a integrace

$$= \int_a^b \Big[\frac{\partial L}{\partial y}(x, y(x)+th(x), y'(x)+th'(x))\, h(x)$$
$$+ \frac{\partial L}{\partial y'}(x, y(x)+th(x), y'(x)+th'(x))\, h'(x) \Big] dx \Big|_{t=0}$$

$$= \int_a^b \frac{\partial L}{\partial y'}(x, y(x), y'(x))\, h'(x) + \frac{\partial L}{\partial y}(x, y(x), y'(x))\, h(x)\, dx$$

zde bychom mohli výpočet ukončit. My však upravíme první výraz integrací per partes na tvar $\int_a^b g(x)h(x)$

$$= \int_a^b \left\{ \left(-\frac{\partial L}{\partial y'}(x, y(x), y'(x)) \right)' + \frac{\partial L}{\partial y}(x, y(x), y'(x)) \right\} h(x)\, dx$$
$$+ \left[\frac{\partial L}{\partial y'}(x, y(x), y'(x))\, h(x) \right]_a^b$$

Poslední člen $= 0$ pro $\boxed{i=1}$ neb pro $h \in X_0^1$ plyne $h(a) = h(b) = 0$;

$= \frac{\partial L}{\partial y'}(b, y(b), y'(b))\, h(b)$ pro $\boxed{i=2}$ neboť $h(a) = 0$;

$= \frac{\partial L}{\partial y'}(b, y(b), y'(b))\, h(b) - \frac{\partial L}{\partial y'}(a, y(a), y'(a))\, h(a)$ pro $\boxed{i=3}$

K charakterizaci podmínky $\boxed{\delta\Phi[y](h) = 0 \text{ pro } \forall\, h \in X_0^i}$ využijeme následující fundamentální lemma variačního počtu.

<u>Lemma</u> Buď $f \in C((a,b))$ splňující $\int_a^b f(x)h(x)\,dx = 0$ pro všechna $h \in [C_0(\langle a,b\rangle)]_0 = \{z \in C(\langle a,b\rangle);\ z(a)=z(b)=0\}$.

Pak $f \equiv 0$.

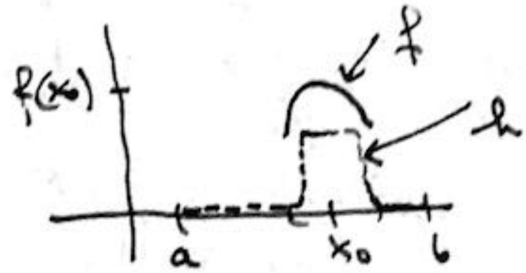
<u>Poznámky</u> 1) Lemma zobecňuje tvrzení: $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ splňující $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ pro libovolné $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ je nutně <u>nulový</u> vektor.

(Dk) Vol $\vec{b} = \vec{a}$, pak $|\vec{a}|^2 = 0 \Rightarrow \vec{a} = \vec{0}$. $\square$

2) Kdyby ve znění lemmatu bylo „$\int_a^b f(x)h(x)\,dx = 0$ pro $h \in C((a,b))$", pak by opět stačilo vzít $h = f$ a z $\int_a^b f^2(x)\,dx$ plyne $f \equiv 0$.

$\boxed{\text{Dk lemmatu}}$ Sporem. Nechť $\exists\, x_0 \in (a,b)$ tak, že $f(x_0) \neq 0$. BÚNO $f(x_0) > 0$. Ze spojitosti f plyne existence $U_\delta(x_0)$ tak, že $f(x) \geq \frac{f(x_0)}{2}$ na $U_\delta(x_0)$, viz obrázek. Volme h jako na obrázku, pak

$$\int_a^b f(x)h(x)\,dx = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)h(x)\,dx > 0 \text{, což je ↯} \ \square$$



Věta 2 (Charakterizace podmínky „$\delta\Phi[y](h)=0$ pro $\forall h\in X_0^i$"; vztah variačního počtu a řešení ODR)

$y\in X^i$ splňující $\delta\Phi[y](h)=0$ pro $\forall h\in X_0^i$ $\Longleftrightarrow$ $y\in X^i$ řeší

$$\boxed{\left(-\frac{\partial L}{\partial y'}(x,y,y')\right)'+\frac{\partial L}{\partial y}(x,y,y')=0}$$

a navíc pro $i=2$ $\quad \frac{\partial L}{\partial y'}(b,y(b),y'(b))=0$

a pro $i=3$ $\quad \frac{\partial L}{\partial y'}(a,y(a),y'(a))=\frac{\partial L}{\partial y'}(b,y(b),y'(b))=0$

Tato rovnice se nazývá $\boxed{\text{Euler-Lagrangeova rovnice}}$ (E-L) funkcionálu Φ

Dk) „$\Leftarrow$" plyne z výpočtu na straně 9 a 10 použitím dosazením.

„$\Rightarrow$" z výpočtu na str. 9 a 10 plyne, že

$0=\delta\Phi[y](h)=0$ pro $h\in X_0^i$ implikuje

$$(*)\quad\left\{\begin{aligned} 0 = &\int_a^b\left\{\left(-\frac{\partial L}{\partial y'}(x,y,y')\right)'+\frac{\partial L}{\partial y}(x,y,y')\right\}h(x)\\ &+\frac{\partial L}{\partial y'}(b,y(b),y'(b))h(b)-\frac{\partial L}{\partial y'}(a,y(a),y'(a))h(a)\\ &\qquad\text{pro } h\in X_0^i\end{aligned}\right.$$

ZA PŘEDPOKLADU

$$\left(-\frac{\partial L}{\partial y'}(x,y,y')\right)'+\frac{\partial L}{\partial y}(x,y,y')\in C(\langle a,b\rangle)$$

a volbou $h\in X_0^1\subsetneq X_0^2\subseteq X_0^3=X^3$, plyne z $(*)$

a fundamentálního lemmatu Euler-Lagr. rovnice, tj:

$$\left(-\frac{\partial L}{\partial y'}(x,y,y')\right)'+\frac{\partial L}{\partial y}(x,y,y')=0.$$

Pro $i=1$ je tvrzení dokázáno. Pro $i=2$ nebo 3, dosadíme (E-L) do (*) a dostaneme

$$\frac{\partial L}{\partial y'}(b,y(b),y'(b))\,h(b)=0 \qquad \forall h\in X_0^2\subset X^3$$

což implikuje

$$\frac{\partial L}{\partial y'}(b,y(b),y'(b))=0.$$

Dosadíme-li pro $i=3$ výše uvedenou podmínku a (E-L) do (*) dostaneme

$$\frac{\partial L}{\partial y'}(a,y(a),y'(a))\,h(a)=0 \qquad \text{pro } \forall h\in X_3,$$

což implikuje

$$\frac{\partial L}{\partial y'}(a,y(a),y'(a))=0.$$

Věta 2 je tak dokázána. ■

POZOROVÁNÍ (důležité)

(1) Pokud L nezávisí explicitně na y, pak plyne z (E-L):

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial y'}(x,y'(x)) = \text{const.}}$$

(2) Pokud L nezávisí explicitně na x, pak

$$(***)\qquad \boxed{L(y,y') - \frac{\partial L}{\partial y'}(y,y')\,y' = \text{const.}}$$

Dk: Derivuj (***) vzhledem k x. Pak

$$\left(L(\dots)-\frac{\partial L}{\partial y'}(\dots)\,y'\right)' = \frac{\partial L}{\partial y}(\dots)\,y' + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial y'}(\dots)\,y'' - \frac{\partial L}{\partial y'}(\dots)\,y''}_{\text{stejné členy s opačnými znaménky}} + \left(-\frac{\partial L}{\partial y'}(\dots)\right)' y'$$

$$= \left\{\left(-\frac{\partial L}{\partial y'}(\dots)\right)' + \frac{\partial L}{\partial y}(\dots)\right\} y' \underset{\text{(E-L)}}{=} 0$$

■

Shrnutí $\quad \Phi[y] := \int_a^b L(x, y(x), y'(x))\, dx$

$$\boxed{\delta\Phi[y, h] = 0 \quad \forall h \in X} \quad \text{BANACHŮV}$$

$\Updownarrow$ Pečlivěji a přesněji: okrajové podmínky

$$\boxed{0 = \int_a^b \frac{\partial L}{\partial y}(x, y(x), y'(x))\, \underline{h(x)} + \frac{\partial L}{\partial y'}(x, y(x), y'(x))\, \underline{h'(x)} \quad \forall h \in X}$$

$\Updownarrow$

$$\boxed{-\left(\frac{\partial L}{\partial y'}(x, y, y')\right)' + \frac{\partial L}{\partial y}(x, y, y') = 0}$$

Euler-Lagrange

$\Downarrow$

Zjednodušení (integrace)

① L nezávisí na y $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{\partial L}{\partial y'}(x, y, y') = \text{const}}$

② L nezávisí na x $\Rightarrow$

$$\boxed{L(y, y') - \frac{\partial L}{\partial y'}(y, y')\, y' = \text{const.}}$$

$$\delta\Phi[x_0](h) \overset{\text{def.}}{=} g'(t)\Big|_{t=0} \quad \text{kde } \underbrace{g(t) := \Phi[x_0+th]}_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}$$

$$\delta^{(2)}\Phi[x_0](h,h) \overset{\text{def.}}{=} g''(t)\Big|_{t=0}$$

$=: \Psi_h[x_0]$ a $\delta^2\Phi[x_0](h,k) = \delta\Psi_h[x_0](k)$

a analogicky definuji $\delta^{(k)}\Phi[x_0](h_1,\dots,h_k)$

Definice Gateaux derivací vyšších řádů

- $\delta\Phi[x_0] : h \longmapsto \delta\Phi[x_0](h)$ je lineární funkcionál

$\delta\Phi[x_0]$ Gateaux diferenciál

- Definice Řekneme, že $\Phi[y]$ má v $y \in X$ Frechétův diferenciál $\equiv \exists$ lineární zobrazení $L : X \to \mathbb{R}$ tak, že

$$\lim_{\|h\|_X \to 0} \frac{\Phi[y+h] - \Phi[y] - Lh}{\|h\|_X} = 0$$

L : $\delta\Phi[x_0]$

Analogie k $df(x_0)$

Zopakování znalostí pro $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$

$\boxed{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}}$ Sekce 4.1–4.3

- $f \in C(\langle a, b\rangle) \Rightarrow \exists\, x_{min}, x_{max} \in \langle a, b\rangle$
  $$f(x_{min}) \le f(x) \le f(x_{max}) \quad \forall x \in \langle a, b\rangle$$
- $\left.\begin{array}{l} f \text{ má v } x_0 \text{ extrém} \\ f'(x_0) \text{ existuje} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f'(x_0) = 0$
- silný nástroj: INTERVALY MONOTONIE
- $f'(x_0) = 0$ a $\left\{\begin{array}{l} f''(x_0) > 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f$ má v x_0 ostré $\left\{\begin{array}{l} \max \\ \min \end{array}\right.$
- konvexita/konkávita a vztah k 2. derivaci

$\boxed{f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}}$ Sekce 8.5 – 8.6

- $f \in C(K)$, $K \subset \mathbb{R}^d$ kompaktní $\Rightarrow$ $\exists\, x_{min}, x_{max} \in K$ $f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max})$ $\forall x \in K$

- f má v x_0 extrém, f má v x_0 $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ $\Big\} \Rightarrow$
  - $\nabla f(x_0) = \vec{0}$ d podmínek
  - $\partial_h f(x_0) = 0$ $\forall h \in \mathbb{R}^d$

derivace ve směru

- f má v x_0 totální dif. existuje-li lineární zobrazení $L: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$

$$\lim_{|h|_{\mathbb{R}^d} \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - Lh}{|h|_{\mathbb{R}^d}} = 0$$

Kandidát na $L =: df(x_0)$: $Lh = \nabla f(x_0) \cdot h = \partial_h f(x_0)$

- $f \in C^2(U_\delta(x_0))$, $\nabla f(x_0) = 0$, $d^2 f(x_0)(h,h)$ $\left\{\begin{matrix} \text{positivně} \\ \text{negativně} \end{matrix}\right\}$ definitní $\Bigg\} \Rightarrow f$ má v x_0 ostré lokální $\left\{\begin{matrix} \text{max.} \\ \text{min} \end{matrix}\right.$

$d^{(2)}f(x_0)(h,h)$ POSITIVNĚ DEFINITNÍ $\overset{df.}{\equiv}$

$$\boxed{d^{(2)}f(x_0)(h,h) > 0 \quad \forall h \neq 0}$$

$$\Updownarrow$$

$\exists \alpha > 0$

$$\boxed{d^{(2)}f(x_0)(h,h) \geq \alpha |h|^2} \quad \forall h \neq 0$$

$\underline{\mathbb{R}^d}$ a kompaktnost jednotkové sféry podstatná

$\vdash$

$$\boxed{\phi : (X, \|\cdot\|) \to \mathbb{R}}$$

<u>Tvrzení</u> (Postačující podmínka)

- $\delta\phi[x_0](h) = 0 \quad \forall h \in X$
- $\delta^2\phi[x](h,h) \geq 0 \quad \forall x \in U_\delta(x_0) := \{z \in X ; \|z - x_0\|_X < \delta\}$

$\implies \phi$ má v x_0 lokální minimum.

Dk $\phi[x_0 + h] - \phi[x_0] = g(1) - g(0) =$

$$\overset{\text{Taylor}}{=} g'(0) + \tfrac{1}{2} g''(\xi)$$

$\xi \in (0,1)$

$$= 0 + \underbrace{\tfrac{1}{2}\delta^2\phi[\xi](h,h)}_{\geq 0} \quad \text{pro } \forall h : \|h\|_X < \delta$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi[x_0] \leq \phi[x_0 + h] \qquad — \| —}$$

Def (Konvexita ϕ) • X normovaný lineární, $M \subset X$ konvexní.

• $\phi : X \to \mathbb{R}$ je na M KONVEXNÍ $\overset{df.}{=}$

$$\forall x, y \in M, \forall \lambda \in [0,1]:$$

$$\Phi[\lambda x + (1-\lambda)y] \leq \lambda \phi[x] + (1-\lambda)\phi[y]$$

Tvrzení (Další postačující podmínka)

$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \phi : X \to \mathbb{R} \text{ konvexní na } X \\ \bullet\ \delta\phi[x_0](h) = 0 \quad \forall h \in X \end{array}\right\} \Rightarrow$ x_0 je bod globálního minima

Dk) Kdyby existoval $x \in X$ tak, že

$\phi[x] < \phi[x_0]$, pak

$$\frac{\phi[x_0 + t(x - x_0)] - \phi[x_0]}{t} = \frac{\phi[tx + (1-t)x_0] - \phi[x_0]}{t}$$

$$\overset{\text{konvexita}}{\leq} \frac{t\phi[x] + (1-t)\phi[x_0] - \phi[x_0]}{t}$$

$$= \phi[x] - \phi[x_0] < 0.$$

$\underset{t \to 0}{\Longrightarrow}$ $\delta\phi[x_0](x - x_0) < 0$, což je ↯ $\blacksquare$