Jan Šabata

1. Najděte polohu těžiště homogenní řetězovky

$$y = a\cosh\frac{x}{a}$$

od bodu $(0, a)$ do bodu (b, h).

$$a = a\cosh\frac{0}{a}$$

$$h = a\cosh\frac{b}{a}$$

Řešení:

Pro výpočet těžiště tělesa bych následující vzorec

$$\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{r_i}$$

V našem příkladě, ale nevystupuje těleso, ale řetězovka. A tato řetězovka má nespočetně mnoho bodů, takže sumu nahradím integrálem, hmotnost uvnitř tedy přejde na hustotu, která však nezávisí na souřadnicích, neboť řetězovka je dle zadání homogenní.

$$\vec{R} = \frac{\rho}{M}\int_l \vec{r}\,dl$$

Hmotnost homogenního tělesa lze vypočítat dle následujícího vzorce

$$M = \int_V \rho\, dV$$

V našem případě tento vzorec upravíme pro náš případ. Řetězovka je křivka, takže „přepíšeme“ dV na dl a budeme mít správný vzorec pro náš příklad. Navíc smíme hustotu dát před integrál, protože hustota řetězovky je ze zadání všude stejná a nezávisí na souřadnicích.

$$M = \int_l \rho\, dl = \rho\int_l dl$$

Jedná se o křivkový integrál prvního druhu. Zaveďme parametrizaci $\varphi(x_1, x_2)$:

$$x_1 = x$$

$$x_2 = a\cosh\frac{x}{a}$$

Vypočtěme velikost její derivace podle x.

$$|\varphi'| = \sqrt{1^2 + \left(\sinh\frac{x}{a}\right)^2} = \sqrt{\left(\cosh\frac{x}{a}\right)^2} = \left|\cosh\frac{x}{a}\right| = \cosh\frac{x}{a}$$

$$M = \rho\int_0^b \cosh\frac{x}{a}dx = \rho a\left[\sinh\frac{x}{a}\right]_0^b = \rho a\sinh\frac{b}{a} \to \frac{\rho}{M} = \frac{1}{a\sinh\frac{b}{a}}$$

Nyní už můžeme přistoupit k samotnému výpočtu těžiště.

$$\int_{\langle\varphi\rangle} f\,ds = \int_a^b f\left(\vec{\varphi}(t)\right)\left|\overrightarrow{\varphi'}(t)\right|_2 dt \to X = \frac{\rho}{M}\int_0^b x\cosh\frac{x}{a}dx\,, Y = \frac{\rho}{M}\int_0^b a\left(\cosh\frac{x}{a}\right)^2 dx$$

$$X = \frac{1}{a\sinh\frac{b}{a}}\int_0^b x\cosh\frac{x}{a}dx = \begin{vmatrix} u = x & v' = \cosh\frac{x}{a} \\ u' = 1 & v = a\sinh\frac{x}{a} \end{vmatrix} = \frac{1}{a\sinh\frac{b}{a}}\left(\left[xa\sinh\frac{x}{a}\right]_0^b - a\int_0^b \sinh\frac{x}{a}dx\right)$$

$$= \frac{1}{\sinh\frac{b}{a}}\left(b\sinh\frac{b}{a} - \left[a\cosh\frac{x}{a}\right]_0^b\right) = b - \frac{a\left(\cosh\frac{b}{a} - 1\right)}{\sinh\frac{b}{a}} = b - \frac{h-a}{\sinh\frac{b}{a}}$$

$$Y = \frac{1}{a\sinh\frac{b}{a}}\int_0^b a\left(\cosh\frac{x}{a}\right)^2 dx = \begin{vmatrix} u = \cosh\frac{x}{a} & v' = \cosh\frac{x}{a} \\ u' = \frac{1}{a}\sinh\frac{x}{a} & v = a\sinh\frac{x}{a} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sinh\frac{b}{a}}\left(\left[a\cosh\frac{x}{a}\sinh\frac{x}{a}\right]_0^b - \int_0^b \left(\sinh\frac{x}{a}\right)^2 dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\sinh\frac{b}{a}}\left(\left[a\cosh\frac{x}{a}\sinh\frac{x}{a}\right]_0^b - \left(\int_0^b \left(\cosh\frac{x}{a}\right)^2 - 1dx\right)\right) =$$

$$Y = \frac{1}{\sinh\frac{b}{a}}\int_0^b \left(\cosh\frac{x}{a}\right)^2 dx = \frac{1}{\sinh\frac{b}{a}}\left(a\cosh\frac{b}{a}\sinh\frac{b}{a} + b - \int_0^b \left(\cosh\frac{x}{a}\right)^2 dx\right)$$

$$\frac{2}{\sinh\frac{b}{a}}\int_0^b \left(\cosh\frac{x}{a}\right)^2 dx = \frac{1}{\sinh\frac{b}{a}}\left(a\cosh\frac{b}{a}\sinh\frac{b}{a} + b\right)$$

$$Y = \frac{1}{2\sinh\frac{b}{a}}\left(a\cosh\frac{b}{a}\sinh\frac{b}{a} + b\right) = \frac{h}{2} + \frac{b}{2\sinh\frac{b}{a}}$$

$$\vec{R} = \left(b - \frac{h-a}{\sinh\frac{b}{a}}, \frac{h}{2} + \frac{b}{2\sinh\frac{b}{a}}\right)$$

2. Vypočítejte

$$\int_C (2a - y)dx + xdy$$

Kde C je úsek cykloidy $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi$.

Řešení:

Zde budu pracovat s křivkovým integrálem druhého druhu.

$$\int_{\langle\varphi\rangle} \vec{f} \cdot \overrightarrow{ds} = \int_a^b f\left(\vec{\varphi}(t)\right) \cdot \overrightarrow{\varphi'}(t)dt \rightarrow \int_0^{2\pi} (2a - y, x) \cdot (dx, dy)$$

$$x = a(t - \sin t), dx = a(1 - \cos t)dt$$

$$y = a(1 - \cos t), dy = a \sin t \, dt$$

$$\int_0^{2\pi} (2a - y, x) \cdot (dx, dy) = \int_0^{2\pi} \left(2a - a(1 - \cos t), a(t - \sin t)\right) \cdot (a(1 - \cos t), a \sin t)dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (a + \cos t \, , at - a \sin t) \cdot (a - a \cos t \, , a \sin t)dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} a^2(1 - (\cos t)^2 + t \sin t - (\sin t)^2)dt = a^2 \int_0^{2\pi} t \sin t \, dt = \begin{vmatrix} u = t & v' = \sin t \\ u' = 1 & v = -\cos t \end{vmatrix} =$$

$$a^2 \left([-t \cos t]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos t \, dt \right) = a^2([-t \cos t]_0^{2\pi} + [\sin t]_0^{2\pi}) = a^2(-2\pi + 0) = -2a^2\pi$$

Jan Šabata

3. Vypočítejte

$$I = \int_C (\exp(x)\sin y - my)dy + (\exp(x)\cos y - m)dy$$

Kde C je horní půlkružnice $x^2 + y^2 = xa$, probíhající od $(a, 0)$ do $(0,0)$. Návod: Doplňte C do vhodné uzavřené křivky.

Řešení:

Použijeme Greenovu větu. Horní půlkružnice nezní jako něco, co by měla být uzavřená křivka, takže bude třeba ji doplnit „průměrem kružnice", nyní tedy máme uzavřenou křivku a smíme použít Greenovu větu. Integrál opět rozepíšu ve smyslu druhého křivkového integrálu a poté aplikuju Greenovu větu.

$$\int_C (\exp(x)\sin y - my)dy + (\exp(x)\cos y - m)dy = \begin{vmatrix} f_1 = (\exp(x)\sin y - my) \\ f_2 = (\exp(x)\cos y - m) \end{vmatrix}$$

$$= \int_C (f_1, f_2)\cdot(dx, dy) = \int_k (f_1, f_2)\cdot(dx, dy) + \int_d (f_1, f_2)\cdot(dx, dy)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\exp(x)\cos y - m) = \exp(x)\cos y$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\exp(x)\sin y - my) = \exp(x)\cos y - m$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} = \exp(x)\cos y - \exp(x)\cos y + m = m$$

Abych mohl využít Greenovu větu v celé kráse, zavedu cylindrické souřadnice, tak, aby střed půlkružnice byl v počátku.

$$x = \frac{a}{2} + r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$$

$$\int_k (f_1, f_2)\cdot(dx, dy) = \int_0^\pi \left(\int_0^{\frac{a}{2}} mr\,dr\right)d\varphi = m\int_0^\pi \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{\frac{a}{2}} d\varphi = \frac{ma^2}{8}\int_0^\pi d\varphi = \frac{ma^2}{8}\pi$$

Zbývá vypočítat křivkový integrál $\int_d (f_1, f_2)\cdot(dx, dy)$, parametrizujme jej $\vec{\psi} = (t, 0), t \in [0, a]$

$$\vec{\psi}' = (1,0)dt$$

$$\int_d (f_1, f_2)\cdot(dx, dy) = \int_0^a \big((\exp(t)\sin 0 - m0), (\exp(t)\cos 0 - m)\big)\cdot(1,0)dt$$

$$= \int_0^a \big((\exp(t)\sin 0)\big)dt = \int_0^a 0dt = 0 \rightarrow I = \frac{ma^2}{8}\pi$$