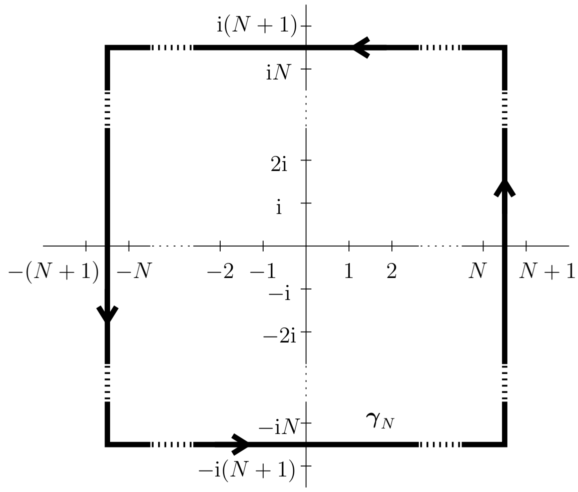
Termín pro odevzdání: čtvrtek 22. dubna 2021



Obrázek 1: Křivka γ_N.

1. Uvažujte integrační křivku γ_N načrtnutou na Obrázku 1. (Křivka γ_N je čtverec se středem v počátku a délkou strany $2N+1$, kde $N \in \mathbb{N}$.) Ukažte, že platí
$$\lim_{N\to+\infty} \int_{\gamma_N} \frac{\cos \pi z}{z^2 \sin \pi z}\,\mathrm{d}z = 0.$$
Na cvičení jsme pomocí residuové věty zjistili, že platí
$$\lim_{N\to+\infty} \int_{\gamma_N} \frac{\cos \pi z}{z^2 \sin \pi z}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{3} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\right),$$
a kombinací obou výsledků tedy dostaneme vztah $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, který jsme již dokázali minulý semestr s použitím teorie Fourierových řad.

2. [Nepovinné] Dokázali byste podobnou metodou sečíst řadu $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^4}$?

Řešení:
Zabývejme se kupříkladu horní hranou čtverce, tedy křivkou γ_N^1 parametrizovanou jako
$$z = s + \mathrm{i}\left(N + \frac{1}{2}\right),$$
kde $s \in \left(-\left(N+\frac{1}{2}\right), \left(N+\frac{1}{2}\right)\right)$. (Integraci přes zbývající strany provedeme obdobně.) Využijeme tvrzení o odhadu komlexního křivkového integrálu
$$\left|\int_{\gamma_N^1} \frac{\cos \pi z}{z^2 \sin \pi z}\,\mathrm{d}z\right| \leq 4 \max_{z\in\gamma_N^1}\left|\frac{\cos \pi z}{z^2 \sin \pi z}\right| \cdot \mathrm{length}\left(\gamma_N^1\right) = 4 \max_{z\in\gamma_N^1}\left|\frac{\cos \pi z}{z^2 \sin \pi z}\right|(2N+1) \leq \frac{4}{N^2}\max_{z\in\gamma_N^1}\left|\frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}\right|(2N+1).$$
Zbývá tedy zjistit, jak se chová člen $\left|\frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}\right|$. Jest
$$\left|\frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}\right| = \left|\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\left(s+\mathrm{i}\left(N+\frac{1}{2}\right)\right)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\left(s+\mathrm{i}\left(N+\frac{1}{2}\right)\right)}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\left(s+\mathrm{i}\left(N+\frac{1}{2}\right)\right)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\left(s+\mathrm{i}\left(N+\frac{1}{2}\right)\right)}}\right| \leq \frac{\mathrm{e}^{-\left(N+\frac{1}{2}\right)} + \mathrm{e}^{\left(N+\frac{1}{2}\right)}}{\mathrm{e}^{\left(N+\frac{1}{2}\right)} - \mathrm{e}^{-\left(N+\frac{1}{2}\right)}} = \frac{1+\mathrm{e}^{-2\left(N+\frac{1}{2}\right)}}{1-\mathrm{e}^{-2\left(N+\frac{1}{2}\right)}},$$
kde jsem použili trojúhelníkovou nerovnost a naši oblíbenou nerovnost $\frac{1}{||a|-|b||} \geq \frac{1}{|a+b|}$. Celkem tedy dostaneme
$$0 \leq \lim_{N\to+\infty}\left|\int_{\gamma_N^1} \frac{\cos \pi z}{z^2 \sin \pi z}\,\mathrm{d}z\right| \leq \lim_{N\to+\infty} \frac{4}{N^2}\frac{1+\mathrm{e}^{-2\left(N+\frac{1}{2}\right)}}{1-\mathrm{e}^{-2\left(N+\frac{1}{2}\right)}}(2N+1) = 0,$$
což vede na požadované tvrzení.

Řadu $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^4}$ sečteme obdobným postupem jako na cvičení. Stačí uvažovat integraci přes stejnou křivku a patřičně změnit integrovanou funkci, jest
$$\lim_{N\to+\infty} \int_{\gamma_N} \frac{\cos \pi z}{z^4 \sin \pi z}\,\mathrm{d}z = \lim_{N\to+\infty} 2\pi\mathrm{i}\left(\mathrm{res}_{z=0}\frac{\cos \pi z}{z^4 \sin \pi z} + \mathrm{res}_{z=k, k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\frac{\cos \pi z}{z^4 \sin \pi z}\right)$$

Rychlý výpočet residuí pak odhalí, že platí

$$\operatorname{res}_{z=0} \frac{\cos \pi z}{z^4 \sin \pi z} = -\frac{\pi^3}{45},$$
$$\operatorname{res}_{z=k, k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{\cos \pi z}{z^4 \sin \pi z} = \frac{1}{k^4 \pi},$$

což znamená, že po dosazení dostaneme

$$\lim_{N\to+\infty} \int_{\gamma_N} \frac{\cos \pi z}{z^4 \sin \pi z} \, \mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} \left(-\frac{\pi^3}{45} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} \right),$$

přičemž křivkový integrál na levé straně opět konverguje k nule. Celkem proto

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^2}{90},$$

což je opět nám dobře známý výsledek z teorie Fourierových řad.