Matematická analýza II (NOFY152) – DÚ 9

Věta o implicitní funkci, ODR ve tvaru totálního diferenciálu

1. Ukažte, že rovnice
$$z^3 - xz + y = 0,$$
na jistém okolí bodu $\left(x^0, y^0\right) = (3, -2)$ jednoznačně určuje funkci $z(x, y)$ a spočtěte hodnotu
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(3, -2).$$

Řešení: Označme si
$$F(x, y, z) = z^3 - xz + y.$$
Nejprve najděme bod z^0, který spolu s $x^0 = 3$ a $y^0 = -2$ řeší rovnici $F\left(x^0, y^0, z^0\right) = 0$. Dosazením za x^0, y^0 dostáváme rovnici
$$\left(z^0\right)^3 - 3z^0 - 2 = 0,$$
která má dvě řešení $z^{0,1} = -1$ a $z^{0,2} = 2$.

Dále platí
$$\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = 3z^2 - x,$$
odkud vidíme, že $\frac{\partial F}{\partial z}\left(x^0, y^0, z^{0,1}\right) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial z}\left(x^0, y^0, z^{0,2}\right) = 9 \neq 0$. Podle věty o implicitní funkci tedy zadaná rovnice na okolí bodu $\left(x^0, y^0\right) = (3, -2)$ jednoznačně určuje funkci $z(x, y)$, pro kterou platí $z(3, -2) = z^{0,2} = 2$. Funkce z je navíc na daném okolí dostatečně hladká, neboť $F \in C^\infty\left(\mathbb{R}^3\right)$.

Na dostatečně malém okolí bodu $\left(x^0, y^0\right) = (3, -2)$ nyní derivujme rovnost
$$z^3(x, y) - xz(x, y) + y = 0,$$
podle y. Dostáváme
$$3z^2(x, y)\frac{\partial z}{\partial y}(x, y) - x\frac{\partial z}{\partial y}(x, y) + 1 = 0, \tag{1}$$
odkud po dosazení za (x, y) bod $\left(x^0, y^0\right) = (3, -2)$ máme
$$3 \cdot 2^2 \frac{\partial z}{\partial y}(3, -2) - 3\frac{\partial z}{\partial y}(3, -2) + 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial y}(3, -2) = -\frac{1}{9}. \tag{2}$$
Nyní zderivujeme rovnici (1) opět podle y a dostaneme
$$6z(x, y)\left(\frac{\partial z}{\partial y}(x, y)\right)^2 + \left(3z^2(x, y) - x\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x, y) = 0.$$
Po dosazení za (x, y) bod $\left(x^0, y^0\right) = (3, -2)$ pak s využitím (2) konečně dostáváme
$$6 \cdot 2\left(-\frac{1}{9}\right)^2 + \left(3 \cdot 2^2 - 3\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(3, -2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(3, -2) = -\frac{4}{243}.$$

2. Ukažte, že rovnice
$$x_1 \mathrm{e}^{y_2} + y_1 \ln x_2 - \mathrm{e} = 0,$$
$$x_1 y_1 + x_2 \mathrm{e}^{y_2} - (2 + \mathrm{e}) = 0,$$
na jistém okolí bodu $\left(x_1^0, x_2^0\right) = (1, 1)$ jednoznačně určují funkce $y_1(x_1, x_2)$ a $y_2(x_1, x_2)$ a spočtěte hodnoty
$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1}(1, 1) \quad \text{a} \quad \frac{\partial y_2}{\partial x_1}(1, 1).$$

Řešení: Označme si

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix},$$

a dále

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{bmatrix},$$

a konečně

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} F_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ F_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \mathrm{e}^{y_2} + y_1 \ln x_2 - \mathrm{e} \\ x_1 y_1 + x_2 \mathrm{e}^{y_2} - (2 + \mathrm{e}) \end{bmatrix}.$$

Nejprve najdeme bod $\mathbf{y}_0$, který společně s $\mathbf{x}_0$ řeší rovnici

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{0},$$

aneb chceme, aby platilo

$$\begin{bmatrix} x_1^0 \mathrm{e}^{y_2^0} + y_1^0 \ln x_2^0 - \mathrm{e} \\ x_1^0 y_1^0 + x_2^0 \mathrm{e}^{y_2^0} - (2 + \mathrm{e}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

což po dosazení za $\mathbf{x}_0$ vede na soustavu rovnic

$$\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{y_2^0} - \mathrm{e} \\ y_1^0 + \mathrm{e}^{y_2^0} - (2 + \mathrm{e}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

což dává

$$\mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Připomeneme si formální výpočet dle věty o implicitních funkcích. Je-li $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\mathbf{x})) = \mathbf{0}$, pak

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{0},$$

odkud

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} = -\left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}}\right]^{-1} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}},$$

přičemž jsme použili značení

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}, \qquad \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{bmatrix}, \qquad \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}.$$

V našem konkrétním případě dostaneme

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{y_2} & \frac{y_1}{x_2} \\ y_1 & \mathrm{e}^{y_2} \end{bmatrix}, \qquad \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \ln x_2 & x_1 \mathrm{e}^{y_2} \\ x_1 & x_2 \mathrm{e}^{y_2} \end{bmatrix}.$$

Zajímají nás hodnoty v bodě $\mathbf{x}_0$. (Připomeňme si, že $\mathbf{y}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0$.) Po dosazení dostaneme

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} \mathrm{e} & 2 \\ 2 & \mathrm{e} \end{bmatrix}, \qquad \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{e} \\ 1 & \mathrm{e} \end{bmatrix}, \qquad \left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}}\right]^{-1}(\mathbf{x}_0) = -\frac{1}{\mathrm{e}} \begin{bmatrix} \mathrm{e} & -\mathrm{e} \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

kde jsme zároveň ověřili, že $\det\left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}_0)\right) = -\mathrm{e} \neq 0$, a tedy na okolí bodu $\left(x_1^0, x_2^0\right) = (1, 1)$ skutečně zadané rovnice jednoznačně určují funkce $y_1(x_1, x_2)$ a $y_2(x_1, x_2)$, které jsou navíc dostatečně hladké.

Požadované derivace najdeme dosazením do vztahu

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0) = -\left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}}\right]^{-1}(\mathbf{x}_0) \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0)$$

což dává

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{\mathrm{e}} \begin{bmatrix} \mathrm{e} & -\mathrm{e} \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{e} & 2 \\ 2 & \mathrm{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{e} - 2 & 2 - \mathrm{e} \\ -1 & -\frac{2}{\mathrm{e}} \end{bmatrix}$$

a proto

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) = \mathrm{e} - 2,$$
$$\frac{\partial y_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) = -1.$$

3. Najděte implicitní vztah pro obecné řešení rovnice

$$x^2y^3 + y + \big(x^3y^2 - x\big)y' = 0.$$

Nápověda: Převeďte rovnici do rovnice ve tvaru totálního diferenciálu pomocí integračního faktoru $\mu = \mu(xy)$.

Řešení: Zadanou rovnici můžeme přepsat do tvaru

$$M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y = 0,$$

kde

$$M(x,y) = x^2y^3 + y,$$
$$N(x,y) = x^3y^2 - x.$$

Nejedná se přímo o rovnici ve tvaru totálního diferenciálu, neboť

$$\frac{\partial N}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = 3x^2y^2 - 1 - 3x^2y^2 - 1 = -2 \neq 0.$$

Hledejme integrační faktor $\mu = \mu(xy)$, který zajistí platnost

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu(xy)N(x,y)) = \frac{\partial}{\partial y}(\mu(x,y)M(x,y)). \tag{3}$$

Rovnice (3) vede na úlohu

$$\frac{\mu'(xy)}{\mu(xy)} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial M}{\partial y}(x,y)}{xM(x,y) - yN(x,y)} = \frac{-2}{x^3y^3 + xy - x^3y^3 + xy} = -\frac{1}{xy},$$

kde jsme dosadili za M a N. Dostáváme tedy lineární diferenciální rovnici 1. řádu

$$\frac{\mu'(z)}{\mu(z)} = -\frac{1}{z},$$

jejímž řešením je na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, +\infty)$ funkce $\mu(z) = \frac{c}{|z|}$, kde $c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Volme tedy nejjednoduší integrační faktor $\mu(xy) = \frac{1}{xy}$. (Multiplikativní konstanty nehrají roli.) V dalším tedy řešíme zadanou rovnici na čtyřech podoblastech $\mathbb{R}^2$ (mimo souřadné osy).

Přenásobení zadané rovnice nalezeným integračním faktorem vede na rovnici ve tvaru totálního diferenciálu

$$\left(xy^2 + \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x + \left(x^2y - \frac{1}{y}\right)\mathrm{d}y = 0,$$

odkud dostáváme pro její potenciál U

$$U(x,y) = \int\left(xy^2 + \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2y^2 + \ln|x| + \varphi(y),$$

a

$$x^2y - \frac{1}{y} = \frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = x^2y + \varphi'(y) \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi'(y) = -\frac{1}{y} \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi(y) = -\ln|y| - C,$$

kde $C \in \mathbb{R}$. Celkově má tedy zadaná rovnice řešení dané implicitně předpisem

$$\frac{1}{2}x^2y^2 + \ln\left|\frac{x}{y}\right| = C,$$

kde konstantu C určíme z počáteční podmínky.