L2. Vlnová rovnice

Budeme řešit Cauchyho úlohu, postupně v dimenzích 1, 2, 3.
Tzn., že hledáme $u: (0,\infty)\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ splňující

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - k^2 \Delta u = f & v\ (0,\infty)\times\mathbb{R}^d \\ u(0,\cdot)=u_0 & v\ \mathbb{R}^d \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,\cdot)=u_1 & v\ \mathbb{R}^d \end{bmatrix}$$

kde
$f:(0,\infty)\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$
$u_0:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$
$u_1:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$
jsou dané funkce (DATA ÚLOHY)

K hledání řešení můžeme použít Fourierovu transformaci, ale i jiné metody.

Vlna 1 Případ $d=1$. D'Alembertův vzoreček.

Hledejme nejdříve obecné řešení pro $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - k^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$.

Povšimněme si, že

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-k^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t}-k\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t}+k\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}-k\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}+k\frac{\partial}{\partial x}\right)u$$

což je složení dvou transportních operátorů 1. řádu*)

To nás může přivést na myšlenku zavést nové proměnné

$$\boxed{\begin{aligned} \xi &= x-kt \\ \eta &= x+kt \end{aligned}} \to \begin{aligned} x &= \frac{\xi+\eta}{2} \\ t &= \frac{\eta-\xi}{2k} \end{aligned}$$

a uvažovat $\tilde{u}(\xi,\eta) = u\left(\frac{\eta-\xi}{2k}, \frac{\eta+\xi}{2}\right)$ $(= u(t,x))$

Počítejme $\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial\xi\partial\eta}$.

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial\xi\partial\eta} = \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{2k}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -\frac{1}{4k^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{4k}\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x} - \frac{1}{4k}\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x} - \frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$= -\frac{1}{4k^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - k^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = 0$$

*) Je také možné (a není to obtížné) využít výsledků o transportní rovnici a nalézt obecné řešení vlnové rovnice.

z $\dfrac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta} = 0$ však plyne $\dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta}(\xi,\eta) = \tilde{G}(\eta)$

a odsud $\tilde{u}(\xi,\eta) = G(\eta) + H(\xi)$

pro nějaké G a H.

Tedy obecné řešení vlnové rovnice v $d=1$ má tvar:

$$(1) \qquad \boxed{u(t,x) = G(x+kt) + H(x-kt)}$$

Řešíme-li Cauchyho úlohu $\boxed{\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - k^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \,,\ u(0,\cdot) = u_0 \,,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,\cdot) = u_1}$

pak z (1) plyne

$$(\heartsuit) \qquad \begin{aligned} u(0,x) &= u_0(x) = G(x) + H(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) &= u_1(x) = kG'(x) - kH'(x) \end{aligned}$$

Máme vyřešit dvě rovnice pro H a G.

$$\rightarrow \quad k u_0'(x) = kG'(x) + kH'(x)$$

Tedy

$$\begin{aligned} G'(x) &= \frac{u_0'(x)}{2} + \frac{1}{2k} u_1(x) \\ H'(x) &= \frac{u_0'(x)}{2} - \frac{1}{2k} u_1(x) \end{aligned}$$

což implikuje

$$\left.\begin{aligned} G(x) &= \frac{u_0(x)}{2} + \frac{1}{2k}\int_0^x u_1(s)\,ds \\ H(x) &= \frac{u_0(x)}{2} - \frac{1}{2k}\int_0^x u_1(s)\,ds \end{aligned}\right\}$$

tyto funkce splňují vztahy $(\heartsuit)$ v rámečku

Tedy z (1)

$$(\text{d'A}) \qquad \boxed{u(t,x) = \frac{1}{2}\left\{ u_0(x+kt) + u_0(x-kt) + \frac{1}{k}\int_{x-kt}^{x+kt} u_1(s)\,ds \right\}}$$

což je hledané řešení, tzv. D'Alembertův vzoreček.

Věta 1. Buď $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$, $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$ a u je dané vztahem (d'A). Pak
- $u \in C^2([0,\infty) \times \mathbb{R})$,
- u splňuje $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - k^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ a
- $\lim\limits_{t \to 0+} u(t,x) = u_0(x)$, $\lim\limits_{t \to 0+} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) = u_1(x)$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$.

Dk SAMI.

Uvažujme nyní úlohu (počáteční a okrajovou) na polopřímce.

Hledáme $u: \underset{t}{(0,\infty)} \times \underset{x}{(0,\infty)} \to \mathbb{R}$ tak, že

$$(U^+)\quad \boxed{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \kappa^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad v\ (0,\infty)\times\Omega & \Omega = (0,\infty) \\ u(0,\cdot) = u_0,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,\cdot) = u_1 \quad v\ \Omega & \\ u(t,0) = 0 \qquad \forall\, t \in (0,\infty) & [u = 0 \text{ na } (0,\infty)\times\{0\}] \end{array}}$$

u_0, u_1, κ DATA splňující $u_0(0) = u_1(0) = 0$

Řešení nalezneme tak, že úlohu rozšíříme z $(0,\infty)$ do $\mathbb{R}$, a to liše.

$$\tilde{u}(t,x) := \begin{cases} u(t,x) & v\ (0,\infty)\times\mathbb{R}^+ \\ -u(t,-x) & v\ (0,\infty)\times\mathbb{R}^- \end{cases}$$

$$\tilde{u}_0(x) := \begin{cases} u_0(x) & v\ \mathbb{R}^+ \\ -u_0(-x) & v\ \mathbb{R}^- \end{cases}$$

$$\tilde{u}_1(x) := \begin{cases} u_1(x) & v\ \mathbb{R}^+ \\ -u_1(-x) & v\ \mathbb{R}^- \end{cases}$$

Pak (U^+) vede

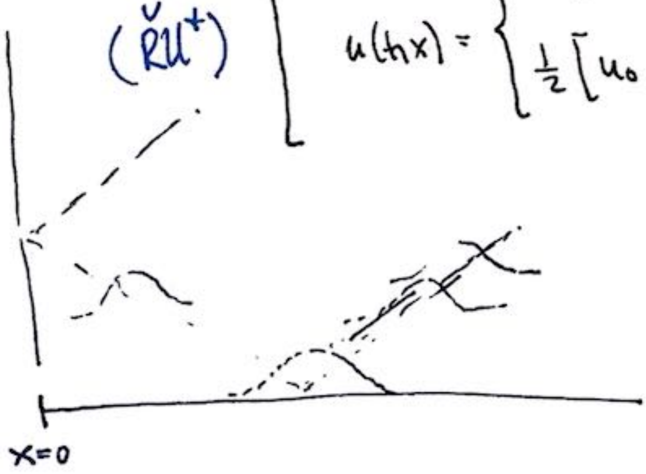
$$(U)\quad \left[\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} - \kappa^2 \dfrac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} = 0 \quad v\ (0,\infty)\times\mathbb{R} \\ \tilde{u}(0,\cdot) = \tilde{u}_0,\ \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(0,\cdot) = \tilde{u}_1 \quad v\ \mathbb{R} \end{array}\right]$$

Dle d'Alembertova vzorce:

$$\tilde{u}(t,x) = \frac{1}{2}\left[\tilde{u}_0(x+\kappa t) + \tilde{u}_0(x-\kappa t) + \frac{1}{\kappa}\int_{x-\kappa t}^{x+\kappa t} \tilde{u}_1(y)\,dy\right]$$

neboli:

$$(\check{R}U^+)\quad \left[\ u(t,x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left[u_0(x+\kappa t) + u_0(x-\kappa t) + \dfrac{1}{\kappa}\displaystyle\int_{x-\kappa t}^{x+\kappa t} u_1(y)\,dy\right] & x \geq \kappa t > 0 \\ \dfrac{1}{2}\left[u_0(x+\kappa t) - u_0(\kappa t - x) + \dfrac{1}{\kappa}\displaystyle\int_{\kappa t - x}^{x+\kappa t} u_1(y)\,dy\right] & \kappa t \geq x \geq 0 \end{cases}\right.$$



tato část představuje odraz vlny v $x=0$.

[Toto řešení nebude $C^2((0,\infty)\times(0,\infty))$ (klasické řešení) pokud $u_0''(0) \neq 0$]

Věta 2 Sférické průměry; $d=2,3$.

Zavedeme následující označení:

$$\mathcal{U}(x;t,r) := \fint_{\partial B_r(x)} u(t,y)\,dS_y := \frac{1}{|\partial B_r(x)|}\int_{\partial B_r(x)} u(t,y)\,dS_y$$

$$\mathcal{U}_0(x;r) := \fint_{\partial B_r(x)} u_0(y)\,dS_y \qquad U_1(x,r) := \fint_{\partial B_r(x)} u_1(y)\,dS_y$$

Na veličinu $\mathcal{U}$ se budeme dívat jako funkci proměnných $r\in[0,\infty)$ a $t\in(0,\infty)$ parametrizovanou $x\in\mathbb{R}^d$.

Ukážeme, že pokud u chápeme jako řešení vlnové rovnice ve dvou a třech dimenzích, tak $\mathcal{U}$ řeší modifikovanou vlnovou rovnici v $d=1$. Platí:

Lemma Nechť $u\in C^m([0,\infty)\times\mathbb{R}^d)$ je řešení $\boxed{\Box u=0,\ u(0,\cdot)=u_0,\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,\cdot)=u_1}$ v $\mathbb{R}^d$, $d\geq 2$. Buď $x\in\mathbb{R}^d$ libovolné, pevné.

Pak $U\in C^m([0,\infty)\times\mathbb{R}^+)$ splňuje

$$\left\{\begin{array}{ll} \begin{pmatrix}\text{Euler-Poissonova}\\ \text{-Darbouxova}\\ \text{rce}\end{pmatrix} \quad \dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2}-\dfrac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial r^2}-\dfrac{d-1}{r}\dfrac{\partial U}{\partial r}=0 & \text{v } \overset{t}{(0,\infty)}\times\overset{r}{(0,\infty)} \\ U=\mathcal{U}_0\,,\ \dfrac{\partial U}{\partial t}=U_1 & \text{v } \{0\}\times(0,\infty)\end{array}\right.$$

(Dk) Nejdříve pomocný výpočet. Označme $\Psi(r) := \fint_{\partial B_r(x)}\psi(y)\,dS_y$.

Substitucí $z=\frac{y-x}{r}$ dostáváme $\Psi(r)=\fint_{\partial B_1(0)}\psi(x+rz)\,dS_z$.

Odsud plyne

$$\Psi'(r)=\fint_{\partial B_1(0)}\nabla\psi(x+rz)\cdot z\,dS_z = \fint_{\partial B_r(x)}\nabla\psi(y)\cdot\underbrace{\frac{y-x}{r}}_{\vec{n}}\,dS_y$$

$\vec{n}$ vnější jednotková normála

$$=\fint_{\partial B_r(x)}\frac{\partial\psi}{\partial\vec{n}}\,dS_y \overset{\text{Gauss}}{=} \frac{1}{|\partial B_r(x)|}\int_{B_r(x)}\Delta\psi(y)\,dy = \frac{r}{d}\frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)}\Delta\psi(y)\,dy$$

Nyní za Ψ vezmeme U.

$$\text{Tak } \frac{\partial U}{\partial r}(x;t,r)=\frac{r}{d}\fint_{B_r(x)}\Delta u(t,y)\,dy \underset{u \text{ řeší } \Box u=0}{=} \frac{r}{d}\fint_{B_r(x)}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,y)\,dy = \frac{1}{d\alpha(d)\,r^{d-1}}\int_{B_r(x)}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,y)\,dy$$

$$\text{Tak } r^{d-1}\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial r}=\frac{1}{d\alpha(d)}\int_{B_r(x)}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,dy \underset{\text{„Fubini"}}{=} \frac{1}{d\alpha(d)}\int_0^r\left(\int_{\partial B_\rho(x)}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,dS_y\right)d\rho$$

Nyní

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{d-1}\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial r}\right)} \overset{\text{derivování integ. dle horní meze}}{=} \frac{1}{d\alpha(d)}\int_{\partial B_r(x)}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,dS_y = \frac{r^{d-1}}{|\partial B_r(x)|}\int_{\partial B_r(x)}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,dS_y = \underbrace{r^{d-1}\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial t^2}}\,,$$

což dává (E-P-D) rci. ∎

$\boxed{\text{Buď } d=3}$ Pak (E-P-D) se redukuje pro $\tilde{U} := rU$, $\tilde{U}_0 := rU_0$, $\tilde{U}_1 := rU_1$ na úlohu

$$\left[\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial r^2} = 0 \text{ v } \overset{t}{(0,\infty)} \times \overset{r}{(0,\infty)} \\ &\tilde{u} = \tilde{u}_0, \ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = \tilde{u}_1 \text{ v } \{0\} \times (0,\infty) \\ &\tilde{u} = 0 \quad \text{na} \quad (0,\infty) \times \{0\} \end{aligned}\right]$$

Dk $\quad \underline{\dfrac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2}} = r\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = r\left[\dfrac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}\right] = r\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + 2\dfrac{\partial U}{\partial r} = \dfrac{\partial}{\partial r}\left(U + r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) = \underline{\dfrac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial r^2}}$ $\boxtimes$

Povšimněme také, že $\dfrac{\partial^2 \tilde{u}_0}{\partial r^2}(0) = 0$

Pokud $\boxed{0 \le r \le t}$

$$\tilde{u}(x;r,t) = \frac{1}{2}\left[U_0(r+t) + U_0(t-r) + \frac{1}{2}\int_{t-r}^{t+r} \tilde{u}_1(y)\,dy\right]$$

Protože

$$u(t,x) = \lim_{r\to 0+} \frac{\tilde{u}(x;r,t)}{r} = \lim_{r\to 0}\left[\frac{\tilde{u}_0(r+t) - \tilde{u}_0(t-r)}{2r} + \frac{1}{2r}\int_{t-r}^{t+r} \tilde{u}_1(y)\,dy\right]$$

$$= \tilde{u}_0'(t) + \tilde{u}_1(t)$$

Tedy

$$\underline{\underline{u(t,x)}} = \frac{\partial}{\partial t}\Big(t \underbrace{\fint_{\partial B_t(x)} u_0(y)\,dS_y}_{\displaystyle \shortparallel \atop \displaystyle t\fint_{\partial B_1(0)} u_0(x+tz)\,dS_z}\Big) + t\fint_{\partial B_t(x)} u_1(y)\,dS_y$$

$$= \fint_{\partial B_1(0)} \nabla u_0(x+tz)\cdot z\,dS_z + \fint_{\partial B_1(0)} u_0(x+tz)\,dS_z + t\fint_{\partial B_1(0)} u_1(y)\,dS_y$$

$$= \fint_{\partial B_t(x)} u_0(y) + t u_1(y) + \nabla u_0(y)\cdot(y-x)\,dS_y \qquad \begin{aligned} &x \in \mathbb{R}^3 \\ &t > 0 \end{aligned}$$

[Kirchhoffův vzoreček] pro řešení Cauchyho úlohy pro vlnovou rovnici ve třech dimenzích.

Buď $\boxed{d=2}$. Nyní nelze bohužel využít (E-P-D) metodu řeš. Použijeme jinou metodu: redukce dimenze či metoda sestupu. Budeme chápat dvoudimenzionální problém jako speciální případ ve 3 dimenzích.

Pokud u řeší úlohu v $d=2$, pak označme

$$\bar{u}(t, x_1, x_2, x_3) := u(t, x_1, x_2)$$
$$\bar{u}_0(x_1, x_2, x_3) := u_0(x_1, x_2)$$
$$\bar{u}_1(x_1, x_2, x_3) = u_1(x_1, x_2).$$

Ukážeme, že z Kirchhoffova vzorce lze odvodit

$$(P_0)\qquad u(t, \overset{x_1, x_2}{x}) = \frac{1}{2} \fint_{B_t(x)} \frac{t u_0(y) + t^2 u_1(y) + t \nabla u_0(y) \cdot (y-x)}{\left(t^2 - |y-x|^2\right)^{1/2}}$$

což je <u>Poissonův vzorec</u> pro řeš. <u>Cauchyho úlohy pro vlnovou rovnici ve dvou dimenzích</u>.

Ještě než formulku (P_0) odvodíme, všimněme si, že:

Je-li $\underline{d=3}$, pak u_0, u_1 v x mají vliv na řešení jen na hranici $\{(y,t) \mid t>0, |x-y|=t\}$ kužele $C := \{(y,t);\ t>0,\ |x-y|<t\}$.

Je-li však $\underline{d=2}$, pak u_0, u_1 ovlivňují u v celém kuželi.

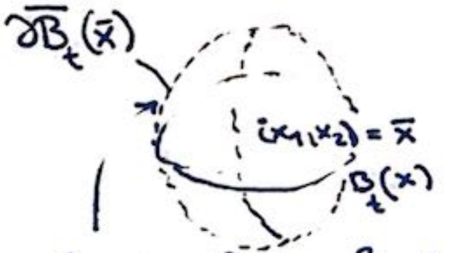
Tento princip, tzv. Huygensův princip, se týká obecně sudých a lichých dimenzí. Princip říká, že porucha či signál, který vznikl v x, se šíří v lichých dimenzích po ostré vlnové ~~xxxx~~ frontě, ale v sudých dimenzích ovlivňují řešení i poté co vedoucí hrana té vlnové fronty prošla bodem x. Pro jistou představu uvažme vlny vzniklé hozeným kamenem do mělké vody. (Nevýhodou této analogie je skutečnost, že není lineární rovnice popisující mělkou vodu vlnová rovnice.)

$\boxed{\text{Odvození } (P_0)}$ Předpokládáme, že $u(t,x_1,x_2)$ řeší vlnovou rovnici v $\mathbb{R}^2$.
Tedy $\bar{u}(t,x_1,x_2,x_3) := u(t,x_1,x_2)$ řeší vlnovou rovnici v $\mathbb{R}^3$.
Dle Kirchhoffova vzorce, viz str. 4/16, kde užijeme místo $\bar{x} = (x_1,x_2,0)$
$\bar{B}_t(\bar{x}) = \{y\in\mathbb{R}^3, |y-\bar{x}|<t\}$

$$u(t,x_1,x_2) = \bar{u}(t,x_1,x_2,x_3)$$
$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(t \fint_{\partial\bar{B}_t(\bar{x})} \bar{u}_0(y)\,dS_y\right) + t \fint_{\partial\bar{B}_t(\bar{x})} \bar{u}_1(y)\,dS_y$$

Tento vztah zjednodušíme takto:

$$\fint_{\partial\bar{B}_t(\bar{x})} \bar{u}_0(y)\,dS_y = \frac{1}{4\pi t^2}\int_{\partial\bar{B}_t(\bar{x})} \bar{u}_0(y)\,dS_y$$



$$= \frac{2}{4\pi t^2}\int_{B_t(x)} u_0(y)\sqrt{1+|\nabla_y x_3(y)|^2}\,dy$$

$$= \frac{2}{4\pi t^2}\int_{B_t(x)} u_0(y)\frac{t}{\sqrt{t^2-|y-x|^2}}\,dy$$

$x_3^2 + (y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2 = t^2$

$x_3 = \pm\sqrt{t^2-|y-x|^2} = x_3(y_1,y_2)$

$\nabla_y x_3 = \left(\frac{y_1-x_1}{\sqrt{t^2-|y-x|^2}}, \frac{y_2-x_2}{\sqrt{t^2-|y-x|^2}}\right)$

$1+|\nabla_y x_3|^2 = \frac{t^2}{t^2-|y-x|^2}$

$$= \frac{1}{2\pi t}\int_{B_t(x)} \frac{u_0(y)}{\sqrt{t^2-|y-x|^2}}\,dy$$

$$= \frac{t}{2}\fint_{B_t(x)} \frac{u_0(y)}{\sqrt{t^2+(y-x)^2}}\,dy$$

Tedy
$$u(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t^2}{2}\fint_{B_t(x)} \frac{u_0(y)}{\sqrt{t^2+(y-x)^2}}\,dy\right) + \frac{t^2}{2}\fint_{B_t(x)} \frac{u_1(y)}{(t^2-|y-x|^2)^{\frac{1}{2}}}\,dy$$

Protože
$$t^2\fint_{B_t(x)} \frac{u_0(y)}{\sqrt{t^2+(y-x)^2}}\,dy \underset{z=\frac{y-x}{t}}{=} \frac{t^2}{\pi t^2}\int_{B_1(0)} \frac{u_0(x+zt)}{\sqrt{1+|z|^2}}\,dz\,\frac{t^2}{t} = t\fint_{B_1(0)} \frac{u_0(x+zt)}{\sqrt{1-|z|^2}}\,dz$$

$y = x+tz$
$\det \nabla_z y = t^2$

tak (dopočítejte!)

$$\boxed{u(t,x) = \frac{1}{2}\fint_{B_t(x)} \frac{t u_0(y) + t^2 u_1(y) + t\nabla u_0(y)\cdot(y-x)}{\sqrt{t^2-|y-x|^2}}\,dy}$$

$\boxtimes$