Regularizace (zhlazování) a jeho vlastnosti

Buď
$$w(x) = \begin{cases} C e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & \text{pro } |x|<1 \\ 0 & \text{pro } |x|\geq 1 \end{cases}$$
kde $C>0$ je takové, že $\int_{\mathbb{R}^d} w(x) = 1$

Pak
- $w \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ a $\operatorname{supp} w = \overline{B_1(0)}$

Tedy
- $w \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ a navíc $w(x) = w(-x)$ a $w \geq 0$.

Nyní sestrojíme ∞-mnoho funkcí v $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ škálováním a posunutím: Definujme
$$\boxed{w_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^d} w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)} \qquad \varepsilon \in (0,\infty)$$

Pak
- $w_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$; $\operatorname{supp} w_\varepsilon = \overline{B_\varepsilon(0)}$; $\int_{\mathbb{R}^d} w_\varepsilon(x)\,dx = 1$,
  $w_\varepsilon(-x) = w_\varepsilon(x)$

Také
- $\tau_{-y} w_\varepsilon(x) = w_\varepsilon(x-y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, $\operatorname{supp} \tau_{-y} w_\varepsilon = \overline{B_\varepsilon(y)}$,
  a také $w_\varepsilon(x-y) = w_\varepsilon(y-x)$

Platí následující tvrzení

Věta 17.2. Buď $p \in [1,\infty)$.

(i) Je-li $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, pak $f_\varepsilon := w_\varepsilon * f \in L^p(\mathbb{R}^d) \cap C^\infty(\mathbb{R}^d)$ a platí

(i1) $\|f_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$ a $f_\varepsilon \to f$ a.e. in $\mathbb{R}^d$ pro $\varepsilon \to 0+$

(i2) $\|f_\varepsilon - f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \to 0$ pro $\varepsilon \to 0+$

(ii) Je-li $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřená. Pak $\mathcal{D}(\Omega)$ je hustý v $L^p(\Omega)$.

(iii) Je-li $f \in C(\Omega)$ a $\operatorname{supp} f \subset \Omega$ je kompaktní, pak
$$f_\varepsilon \rightrightarrows f \text{ v } \Omega.$$

Dk $\boxed{\text{Ad (i1)}}$ Z důkazu Věty 1.1. plyne

$$\|f_\varepsilon\|_{L^p} = \|\omega_\varepsilon * f\|_{L^p} \le \|\omega_\varepsilon\|_{L^1} \|f\|_{L^p}$$

avšak $\|\omega_\varepsilon\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{\omega_\varepsilon(x)}_{\geq 0} \, dx = 1$, což dává část tvrzení (i1).

Skutečnost, že $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ je jasná resp. ponechána čtenáři.

Dále, dle věty o Lebesgueových bodech (viz níže) platí

$$(\maltese) \qquad \lim_{r\to 0} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} |f(y)-f(x)| \, dy = 0 \quad \text{pro s.v. } x \in \mathbb{R}^d.$$

Pro tato x platí

$$|f_\varepsilon(x) - f(x)| = \left| \int_{B_\varepsilon(x)} \omega_\varepsilon(x-y)[f(y)-f(x)] \, dy \right|$$

neboť

- $\operatorname{supp} \omega_\varepsilon(x-\cdot) = \overline{B_\varepsilon(x)}$

a

- $\int_{\mathbb{R}^d} \omega_\varepsilon(x-y) \, dy = 1$

$$\le \frac{1}{\varepsilon^d} \int_{B_\varepsilon(x)} \omega\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) |f(y)-f(x)| \, dy$$

$$\le c \, \frac{1}{|B_\varepsilon(x)|} \int_{B_\varepsilon(x)} |f(y)-f(x)| \, dy \to 0$$

dle $(\maltese)$.

Tedy (i1) je dokázáno.

$\boxed{\text{Ad (iii)}}$ Je-li $f \in C(\Omega)$ a $\operatorname{supp} f$ je kompaktní v Ω, pak f je stejnoměrně spojitá: k danému $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, tak, že $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$ kdykoliv $|x-y| < \delta$. Pak z předchozího výpočtu plyne, že

$$\sup_{x \in \operatorname{supp} f} |f_\varepsilon(x) - f(x)| \le c\varepsilon .$$

Tedy $f_\varepsilon \rightrightarrows f$ v Ω.

$\boxed{\text{Ad (i2)}}$ Je-li $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, pak $\exists\, g \in C(\mathbb{R}^d)$, $\operatorname{supp} g$ je kompaktní tak, že $\|f-g\|_{L^p} < \varepsilon$, kde $\varepsilon > 0$ je dáno libovolně. Pak $\|f_\varepsilon - g_\varepsilon\|_{L^p} \le \|f-g\|_{L^p} < \varepsilon$ dle (i1), a $g_\varepsilon \rightrightarrows g$ v $\mathbb{R}^d$. Tudíž

$$\|f_\varepsilon - f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \le \|f-g\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \|g-g_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \|g_\varepsilon - f_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

$$\le 2\|f-g\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + c\|g-g_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$$

! supp g, g_ε je kompaktní

$$\le (2+c)\,\varepsilon.$$

Ad (ii) plyne z předchozího, neb
Je-li $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, pak $f\chi_{[-N,N]} \xrightarrow[N\to\infty]{} f$ v $L^p(\mathbb{R}^d)$

a $f\chi_{[-N,N]}$ má kompaktní nosič. Tedy
$(f\chi_{[-N,N]})_\varepsilon \to f\chi_{[-N,N]}$ pro $\varepsilon \to 0$.

Tyto dvě konvergence dávají hustotu. ∎

V teorii míry platí (následující) důležitá věta, která říká, že každá integrovatelná funkce je "přibližně spojitá" ve skoro všech bodech.

Věta (O Lebesgueových bodech) Buď $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$.
Pak
(i) Pro s.v. $x \in \mathbb{R}^d$: $\frac{1}{|B_\varepsilon(x)|}\int_{B_\varepsilon(x)} f(y)\,dy \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} f(x)$

(ii) —‖— $\frac{1}{|B_\varepsilon(x)|}\int_{B_\varepsilon(x)} |f(y)-f(x)|\,dy \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$

Navíc, je-li $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^d)$, $1 \le p < \infty$, pak:
pro s.v. $x \in \mathbb{R}^d$: $\frac{1}{|B_\varepsilon(x)|}\int |f(y)-f(x)|^p\,dy \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$.

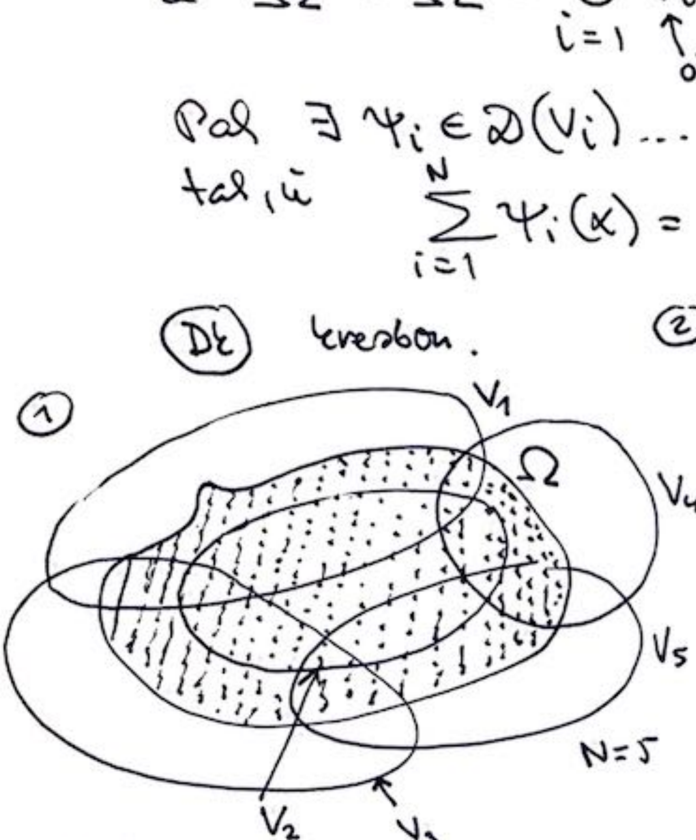
Často je výhodné studium chování globálně definovaného objektu lokalizovat.
S lokalizací je spojen pojem: „rozdělení jednotky" (partition of unity). Platí

Tvrzení (o rozdělení jednotky) Buď Ω omezená a $\Omega \subset \overline{\Omega} \subset \bigcup_{i=1}^{N} V_i$ (otevřené pokrytí $\overline{\Omega}$ konečné), V_i otevřená.

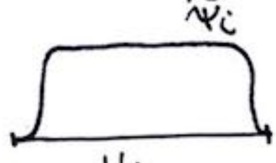
Pak $\exists\, \psi_i \in \mathcal{D}(V_i)$ … C^∞-fce s nosičem v V_i tak, že

$$\sum_{i=1}^{N} \psi_i(x) = 1 \quad \forall x \in \Omega.$$

Dk. kresbou.

① 

$N = 5$

② 

Na $\forall V_i$ sestrojím $\tilde{\psi}_i \in \mathcal{D}(V_i)$

③ $$\psi_i := \frac{\tilde{\psi}_i}{\sum_{i=1}^{N} \tilde{\psi}_i}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} \psi_i(x) = 1. \quad \blacksquare$$

Platí $\Omega \subset \overline{\Omega} \subset \bigcup_{i=1}^{5} V_i$, V_i otevřené

LOKALIZACE: $\underset{\text{globální}}{f \in L^p(\Omega)} \Rightarrow f = f \cdot 1 = f \sum_{i=1}^{N} \psi_i = \sum_{i=1}^{N} f\psi_i$ a $f\psi_i \in \underset{\text{lokální}}{L^p(V_i)}$

Věta 17.3 (Schwartzova věta o nemožnosti zavést násobení distribucí)
Nelze na $\mathcal{D}'$ zavést násobení tak, aby bylo komutativní, asociativní a platilo $x\delta = 0$ a $x T_{v.p.\frac{1}{x}} = 1$.

Připomeň:
- $\langle x\delta, \varphi \rangle = \langle \delta, x\varphi \rangle = 0\varphi(0) = 0$
- $\langle x T_{v.p.\frac{1}{x}}, \varphi \rangle = \langle T_{v.p.\frac{1}{x}}, x\varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} \frac{x\varphi(x)}{x} = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) = \langle 1, \varphi \rangle$

Dk. Sporem. Nechť takové násobení lze zavést. Pak

$$0 = 0\, T_{v.p.\frac{1}{x}} = (x\delta)\, T_{v.p.\frac{1}{x}} = \delta (x T_{v.p.\frac{1}{x}}) = \delta 1 = \delta,$$

což je spor. $\square$

Příklad Ukažte, že $x\delta = 0$ v $\mathcal{D}'$ a $x T_{v.p.\frac{1}{x}} = 1$ v $\mathcal{D}'$.

Řešení ① $\langle x\delta, \varphi \rangle \underset{x\in C^\infty}{\overset{(4)}{=}} \langle \delta, x\varphi \rangle = (x\varphi)(0) = 0 = \langle 0, \varphi \rangle$

② $\langle x T_{v.p.\frac{1}{x}}, \varphi \rangle = \langle T_{v.p.\frac{1}{x}}, x\varphi \rangle = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{|x|\geq\varepsilon} \frac{x(\varphi(x))}{x}$

$= \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{|x|\geq\varepsilon} \varphi(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x) = \langle T_1, \varphi \rangle$

T_1 je regulární distribuce odpovídající 1.

Věta 17.3. (Schwartzova věta o nemožnosti zavést násobení distribucí)

Na $\mathcal{D}'$ nelze zavést násobení tak, aby bylo
- komutativní, asociativní a platilo $x\delta = 0$ v $\mathcal{D}'$, $x T_{v.p.\frac{1}{x}} = T_1$ v $\mathcal{D}'$.

(Dk) Kdyby ano, pak
$0 = 0\, T_{v.p.\frac{1}{x}} = (x\delta) T_{v.p.\frac{1}{x}} = \delta (x T_{v.p.\frac{1}{x}}) = \delta 1 = \delta,$
což dává spor.

17.5 Řád a nosič distribucí. Struktura distribucí.

NOSIČ DISTRIBUCE Víme, že nosič fce je množina bodů, v jejichž okolí se s f něco zajímavého děje; přesněji
$supp_1 f := \overline{\{x \in \Omega ; f(x) \neq 0\}}$ - uzávěr množiny bodů, ve kterých je f nenulová.

Protože distribuce jsou definovány na funkcích, nelze mluvit o hodnotách distribuce v bodě. Nosič distribuce je tak třeba zavést opatrněji:

Buď $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ a $G \subset \Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřená množina.
Pak T_G definovaná vztahem $\langle T_G, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(G)$
je distribuce na G, tzn. $T_G \in \mathcal{D}'(G)$.
Řekneme, že • T vymizí na G $\overset{df.}{\equiv} \langle T, \varphi \rangle = 0 \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(G)$
• $T = S$ na $G \equiv \langle T - S, \varphi \rangle = 0$ —"—

Pokud T vymizí na každém G_α, kde G_α je prvek ze souboru otevřených množin, pak T vymizí na jejich sjednocení. [Lze nahlédnout pomocí tvrzení o rozdělení jednotky str. 17/34 použitím na
Ω = vnitřek nosiče fce φ, kde $\varphi \in \mathcal{D}\left(\bigcup_\alpha G_\alpha\right)$]

Tedy existuje největší množ. N_T : T vymizí na N_T
Pak nosič distribuce T je definován jako doplněk N_T
tj $\mathbb{R}^d \setminus N_T$.

(Př.) Urči nosič δ $\left(\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)\right)$
Zjevně $\langle \delta, \varphi \rangle = 0 \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$. Tedy nosič $\delta = \{0\}$.

17.6. SOUČIN DISTRIBUCÍ. TENZOROVÝ SOUČIN A KONVOLUCE DISTRIBUCÍ

Tenzorový SOUČIN DISTRIBUCÍ Buď $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^p)$
pak lze definovat součin $f \otimes g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^{d+p})$ předpisem
$$(f \otimes g)(x,y) = f(x)\, g(y) \qquad (x \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^p)$$
Odtud
$$\langle f \otimes g, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^{d+p}} f(x) g(y) \psi(x,y)\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^p} g(y) \psi(x,y)\, dy \right)}_{\in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)} dx$$
$$= \langle f, \langle g, \psi(x,\cdot) \rangle \rangle \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{d+p})$$

Tento vztah zobecníme a definujeme:

Pro $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ a $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^p)$: $\boxed{\langle T \otimes S, \psi \rangle \overset{def}{=} \langle T, \langle S, \psi(x,\cdot) \rangle \rangle \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{d+p})}$

Pak $T \otimes S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{d+p})$

▸ Totéž pro $T, S \in \mathcal{S}' \Rightarrow T \otimes S \in \mathcal{S}'$

<u>Příklad</u> Buď $T = \delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ↑čas, $S = \delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ ↑prostor.

Pak <u>$T \otimes S$</u> $\in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{d+1})$ je <u>δ</u> $\in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{d+1})$

Různé zápisy: $\delta(t,x) = \delta(t) \otimes \delta(x)$ nebo $\delta(t)\delta(x)$, což je méně přesné, může vzbuzovat dojem, že jde o <u>součin distribucí</u> ale jde <u>tenzorový součin</u> neboť $\delta(t), \delta(x)$ nejsou definovány nad stejným prostorem test. fcí.

<u>Konvoluce temperovaných distribucí</u> (vyžaduje opatrnost)

Mnoho aplikací zahrnuje konvoluci, kde jeden faktor je temperovaná distribuce. Víme

$$(f * g)(x) = \int f(x-y)\, g(y)\, dy$$

a jsou-li $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$ pak $\boxed{\widehat{\varphi * \psi} = \hat{\varphi} \cdot \hat{\psi}}$ (viz strana 16/10)

Tento vztah nemůže platit pro temper. distribuce, neboť součin distribucí nemáme zaveden, neboť nedává dobrý smysl. Víme však, že má smysl součin $m \in \mathcal{S}$ a temperované distribuce.

$\boxed{\text{Nechť } \psi \in \mathcal{S} \text{ a } T \in \mathcal{S}'}$ K zavedení Fourierovy transformace $\psi * T$ potřebujeme adjungovanou (duální) identitu:

Buď $\psi \in \mathcal{S}$, $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}$. Pak

$$\langle \psi * \varphi_1, \varphi_2 \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} (\psi * \varphi_1)(x)\, \varphi_2(x) = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \psi(x-y)\, \varphi_1(y)\, \varphi_2(x)\, dy\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \psi(x-y)\, \varphi_2(x)\, dx \right) \varphi_1(y)\, dy$$

$$= \langle \varphi_1, \tilde{\psi} * \varphi_2 \rangle \qquad \text{kde } \tilde{\psi}(y) = \psi(-y)$$

neboli

$$\boxed{\langle \psi * T, \varphi \rangle = \langle T, \tilde{\psi} * \varphi \rangle \qquad \forall \varphi \in \mathcal{S}}$$

Toto je duální identita (6)

(Definice #1) ↑ pro $T \in \mathcal{S}'$

Odsud plyne: $\boxed{\mathcal{F}[\psi * T] = \hat{\psi}\hat{T}}$ pro $\psi \in \mathcal{S}$ a $T \in \mathcal{S}'$

(Dk) Počítejme

$\varphi \in \mathcal{S}$: $\underline{\underline{\langle \mathcal{F}[\psi * T], \varphi \rangle}} \overset{(5)}{=} \langle \psi * T, \hat{\varphi} \rangle \overset{(6)}{=} \langle T, \tilde{\psi} * \hat{\varphi} \rangle$

protože $\tilde{\psi} * \hat{\varphi} \in \mathcal{S}$, tak platí pro tuto fci Fourierův inverzní vzorec $\mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[\tilde{\psi} * \hat{\varphi}]] = \tilde{\psi} * \hat{\varphi}$

$$= \langle T, \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[\tilde{\psi} * \hat{\varphi}]] \rangle$$

$$\overset{(5)}{=} \langle \hat{T}, \mathcal{F}^{-1}[\tilde{\psi} * \hat{\varphi}] \rangle$$

$$= \langle \hat{T}, \mathcal{F}^{-1}[\tilde{\psi}]\, \mathcal{F}^{-1}[\hat{\varphi}] \rangle$$

F. transf. konvoluce (viz str. 1/10)

$$= \langle \hat{T}, \mathcal{F}^{-1}[\tilde{\psi}]\, \varphi \rangle$$

$$= \langle \hat{T}, \hat{\psi} \cdot \varphi \rangle$$

$$= \underline{\underline{\langle \hat{\psi}\hat{T}, \varphi \rangle}}$$, což dává tvrzení

neb platí $\mathcal{F}^{-1}[\tilde{\psi}](x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{\psi}(s) e^{-ix\cdot s} ds = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \psi(-s) e^{-ix\cdot s} ds$

$$\underset{\substack{s' := -s \\ ds' = -ds}}{=} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int \psi(s') e^{ix\cdot s'} ds' = \hat{\psi}(x)$$

(Pozor: Otáčím integraci: $(-\infty, +\infty) \longrightarrow (+\infty, -\infty)$)

∎

Konvoluce $f \in \mathcal{S}'$ s $\psi \in \mathcal{S}$ lze zavést jiným přímočařejším způsobem. Protože pro $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$(\psi * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x-y) f(y)\, dy \Rightarrow$$

můžeme psát

$$(\psi * f)(x) = \langle f, \tau_{-x} \tilde{\psi} \rangle \quad \text{kde } (\tau_{-x}\tilde{\psi})(y) = \tilde{\psi}(y-x) = \psi(x-y)$$

Vyjádření vpravo má však smysl nejen pro $f \in \mathcal{S}$, ale i pro temperované distr. $f \in \mathcal{S}'$.

Navíc zobrazení $x \longmapsto \langle f, \tau_{-x}\tilde{\psi} \rangle$ definuje funkci, která je C^∞, neb $\tilde{\psi} \in C^\infty$ a platí:

$$D_x^\alpha(\psi * f)(x) = D_x^\alpha \langle f, \tau_{-x}\tilde{\psi}\rangle = \langle f, D_x^\alpha \tau_{-x}\tilde{\psi}\rangle = \langle f, D_x^\alpha \psi(x-\cdot)\rangle.$$

Vidíme, že konvoluci $\psi \in \mathcal{S}$ a $f \in \mathcal{S}'$ lze definovat předpisem

$$\boxed{(\text{Definice \#2}) \quad (\psi * f)(x) := \langle f, \tau_{-x}\tilde{\psi}\rangle}$$

a takto definovaná konvoluce je C^∞-fce (i pro $f \in \mathcal{S}'$)!

Máme dvě definice konvoluce temperované distribuce a hladké funkce. Je vhodné ukázat, že se shodují.

(Dk)
$$\underbrace{\int_\Omega (\psi * f)(x)\varphi(x)}_{\substack{\langle \psi * f, \varphi\rangle \\ \text{hladká fce dle Def. 2}}} \underset{\text{def.\#2}}{=} \int_\Omega \langle f, \tau_{-x}\tilde{\psi}\rangle \varphi(x)\,dx$$

$$= \left\langle f, \int_\Omega (\tau_{-x}\tilde{\psi})\varphi(x)\,dx\right\rangle$$

$$= \left\langle f, \int_\Omega \psi(x-y)\varphi(x)\,dx\right\rangle$$

$$= \langle f, \tilde{\psi} * \varphi\rangle \underset{\text{def \#1}}{=} \langle \psi * f, \varphi\rangle.$$

$\blacksquare$

<u>Shrnutí</u>: ① Zavedli jsme 2 definice pro konvoluci $\psi \in \mathcal{S}$ a $f \in \mathcal{S}'$. Tyto definice se shodují. Ta druhá ukazuje průzračně, že KONVOLUCE JE ZHLAZUJÍCÍ PROCES. Vezměme speciálně Diracovu distribuci. Pak

$$(\psi * \delta)(x) = \langle \delta, \tau_{-x}\tilde{\psi}\rangle = \psi(x-y)\big|_{y=0} = \psi(x)$$

Tedy $\boxed{\psi * \delta = \psi}$ (což koresponduje mj. s výpočtem: $\widehat{\psi * \delta} = \hat{\psi}\cdot\hat{\delta} = \hat{\psi}\cdot 1 = \hat{\psi}$)

② KONVOLUCE JE ČASTÁ OPERACE. NAPŘ.

(i) <u>Derivování</u> je speciální případ distribuce, neboť

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}(\psi * \delta) = \frac{\partial \psi}{\partial x_k} * \delta$$

(ii) <u>Fourierův inverzní vzoreček</u> lze interpretovat jako spec. případ konvoluce.

Platí: $\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]](x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-is\cdot x}\int_{\mathbb{R}^d} f(y)e^{is\cdot y}\,dy\,ds$

$\boxed{f \in \mathcal{S}}$

$$= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(y)\int_{\mathbb{R}^d} e^{-is\cdot(x-y)}\,ds\,dy = (f * g)(x) \quad \text{kde } g(x) := \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-is\cdot x}\,ds$$

Avšak $g(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\mathcal{F}^{-1}[1](x) \underset{\text{Př. ①, str. 3/20}}{=} \delta$ (g tedy není fce, ale distribuce)

a tedy platí

$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]] = f * \delta = f$ což je „jiný" důkaz Fourierova inverzního vzorečku.

Také jsme ukázali: $\boxed{\delta = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-is\cdot x}\,ds}$

Tento vztah zobecníme na ... ... :

Je-li $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ a ...

$T \otimes S \in \mathcal{D}'(\ldots)$ ...

$\langle T \otimes S, \varphi \rangle = \langle \ldots \varphi(x,\cdot) \rangle$ ...

KONVOLUCE DISTRIBUCÍ POTŘETÍ

Na stranách 3/26 - 3/28 jsme zavedli konvoluci distribuce f a fce $\varphi \in \mathcal{S}$. V některých případech lze však povést konvoluci dvou distribucí, což si nyní ukážeme.

Pro $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$: $(f * g)(x) \overset{df}{=} \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\, g(x-y)\, dy$

a $\langle f*g, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(y)\, g(x-y)\, \varphi(x)\, dy\, dx$

$$\underset{\substack{z = x-y \\ \varphi(x) = \varphi(z+y)}}{=} \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(y)\, g(z)\, \varphi(y+z)\, dy\, dz$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{2d}} (f \otimes g)(y,z)\, \varphi_*(y+z)\, dy\, dz$$

$$= \langle f \otimes g, \varphi_* \rangle \quad \text{kde } \varphi_*(y,z) = \varphi(y+z)$$

pro $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$

Problém: $\varphi_* \notin \mathcal{D}(\mathbb{R}^{d+p})$ neboť zůstává neomezená v druhé proměnné (jen posunutí)

Příklad Buď $T = \delta_0 \in \mathcal{D}'(\ldots$

Pak $T \otimes S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{d+1})$ ...

lze též symbolicky psát

$\delta(t,x) = \delta(t) \otimes \ldots$

Tento problém lze odstranit pokud víme více o nosiči jedné či obou distribucí. Platí (viz Černý, Pokorný MaF V, str. 108–110

<u>Věta 17.4.</u> (O existenci konvoluce distribucí). Buď $T, S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.

(1) Pokud S má kompaktní nosič, pak $T * S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ a platí

$$\langle T * S, \varphi \rangle = \langle T \otimes S, \eta\, \varphi_* \rangle$$

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \text{ a } \eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$$

splňující $\eta \equiv 1$ na okolí $\operatorname{supp} S$.

(1') totéž platí je-li $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ a $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ má kompaktní nosič.

(2) Je-li $d = 1$ a $\operatorname{supp} T$ a $\operatorname{supp} S$ jsou zleva omezené. Pak $T * S$ existuje a platí

$$\langle T * S, \varphi \rangle = \langle T \otimes S, \xi\, \eta\, \varphi_* \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$$

kde ξ, η jsou libovolné takové, že jsou $\equiv 1$ na $\operatorname{supp} T$ resp. $\operatorname{supp} S$ a $\eta = \xi \equiv 0$ na intervalu $(-\infty, -k)$.

Dk viz Černý, Pokorný.

<u>Příklad</u> Platí pro lib. $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ a $\delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$:

$$\langle \delta * T, \varphi \rangle = \langle \delta \otimes T, \varphi_* \eta \rangle = \langle T \otimes \delta, \varphi_* \eta \rangle =$$

$$= \langle T, \langle \delta, \varphi_* \rangle \rangle = \langle T, \varphi \rangle$$

Tedy $\delta * T = T$. $\square$